دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

ریاضی محض(شاخهٔ آنالیز)

عنوان

خاصیت استون ـ وایرشتراس مختلط

تدوین

مریم محمدی پیراسته

استاد راهنما

دکتر حکیمه ماهیار

بهمن ماه ۱۳۸۶

فهرست مطالب

فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی ۱
۱.۱ مقدمه‌ای بر توپولوژی ۱
۲.۱ فضاهای باناخ ۸
۳.۱ جبرهای باناخ ۹
۴.۱ قضیه استون–وایرشتراس ۱۱
۵.۱ توابع مختلط ۱۲
۶.۱ اندازه‌ها ۱۳

فصل دوم خاصیت استون ـ وایرشتراس مختلط برای فضاهای فشرده ۱۶
۱.۲ برخی ویژگی‌های خاصیت استون ـ وایرشتراس مختلط ۱۷
۲.۲ خودتوانها و تحدیدها ۲۲

۳.۲ تحدید به هسته ۴۳

فصل سوم فضاهای مرتب فشرده ۴۹

۱.۳ رده هایی از فضاهای مرتب فشرده ۴۹

۲.۳ اندازه‌ها و محمل‌ها ۷۲

فصل چهارم نتایج تکمیلی ۷۴

۱.۴ جبرهای L^∞ و H^∞ ۷۴

۲.۴ نکات و مثالها ۷۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۱

مراجع ۹۳

چکیده

فضای هاسدورف و فشردهٔ X دارای خاصیت استون ـ وایرشتراس مختلط (CSWP) است هرگاه هر زیرجبری از $C(X,\mathbb{C})$ که نقاط X را جدا می‌کند و شامل توابع ثابت است در $C(X,\mathbb{C})$ چگال باشد.

نتایج بدست آمده توسط رودین در سال ۱۹۵۶ و هافمن و سینگر در سال ۱۹۶۰ نشان می‌دهد که همهٔ فضاهای پراکنده دارای CSWP می‌باشند و بسیاری از فضاهایی که ناپراکنده‌اند، CSWP را ندارند ولی این مسئله که داشتن CSWP دقیقاً معادل با پراکنده بودن است همچنان به عنوان یک مسئله باز باقی ماند. در این پایان نامه، مطالبی کلی دربارهٔ CSWP اثبات کرده و به‌ویژه نشان می‌دهیم که فضای مرتب فشردهٔ X دارای CSWP است اگر و تنها اگر X شامل هیچ کپی از مجموعهٔ کانتور نباشد. با توجه به این مطلب به یک خانواده از فضاهای ناپراکنده با خاصیت CSWP دست می‌یابیم، که در این میان می‌توان به فضای دوگانه پیکان الکساندرف و اوریسون اشاره کرد. از CSWP برای این فضا، یک خاصیت استون ـ وایرشتراس برای توابع منظم شده مختلط بر بازهٔ واحد نتیجه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: جبر تابعی، توپولوژی ترتیبی، مرز شیلف، مجموعهٔ اساسی، توابع منظم شده.

رده بندی موضوعی ریاضی: 46J10، 54C35، 46E25.

مقدمه

فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و فشرده باشد. مجموعهٔ $C(X)=C(X,\mathbb{C})$ ، جبر تمام توابع مختلط پیوسته بر X با نرم سوپرمم را نشان می‌دهد. فرض کنیم A زیرجبری از $C(X)$ باشد که نقاط X را جدا می‌کند، شامل توابع ثابت است و خودالحاقی (نسبت به مزدوج مختلط بسته) است. در این صورت A در $C(X)$ چگال است. این قضیهٔ متعارف در آنالیز ریاضی به قضیه استون ـ وایرشتراس موسوم است. اگر شرط خودالحاقی را برداریم در حالت کلی قضیه استون ـ وایرشتراس برقرار نیست. به عنوان مثال، فرض کنیم T دایره واحد در صفحه مختلط باشد و A جبر تمام توابع به صورت $f(e^{i\theta})=\sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta}$ باشد که در آن c_nها اعداد مختلط و θ حقیقی است. در این صورت A زیرجبری از $C(T)$ است که نقاط T را جدا می‌کند و شامل توابع ثابت است ولی در $C(T)$ چگال نیست. در این پایان نامه که برگرفته از مقالهٔ

[12] K. Kunen, The complex Stone-Weierstrass property, Fund. Math. 182(2004) 151-167.

است به بررسی فضاهای هاسدورف و فشردهٔ X می‌پردازیم که برای آنها هر زیرجبر A از $C(X)$ که نقاط X را جدا می‌کند و شامل توابع ثابت است در $C(X)$ چگال باشد. به چنین فضای X گوئیم دارای خاصیت استون ـ وایرشتراس مختلط (CSWP) است.

در سال ۱۹۵۶ رودین نشان داد که (i) اگر X شامل یک کپی از مجموعهٔ کانتور باشد، آنگاه X دارای CSWP نیست؛ (ii) هر فضای پراکندهٔ X (فضایی که فاقد زیرمجموعهٔ کامل ناتهی است) دارای CSWP است. این قضیه مشخصهٔ دقیقی است برای فضاهای متریک فشرده‌ای که دارای CSWP هستند، زیرا فضای متریک فشردهٔ X پراکنده است اگر و تنها اگر شامل هیچ کپی از مجموعهٔ کانتور نباشد. ولی در حالت کلی برای فضای فشردهٔ X که دارای CSWP است مشخصهٔ ساده‌ای نمی‌شناسیم. به کمک نتایج بدست آمده توسط هافمن و سینگر در سال ۱۹۶۰ نتیجه می‌شود که عکس قضیه‌های (i) و (ii) درست نمی‌باشد. در این پایان نامه ضمن بررسی مطالب کلی درباره CSWP، در بعضی حالت‌های خاص شرایط لازم و کافی برای اینکه، فضای هاسدورف و فشردهٔ X دارای CSWP باشد بدست می‌آوریم. به ویژه نشان می‌دهیم که اگر X فضای مرتب کلی و فشرده با توپولوژی ترتیبی باشد آنگاه X دارای CSWP است اگر و تنها اگر X شامل هیچ کپی از مجموعه کانتور نباشد. این نتیجه قضیهٔ اساسی این پایان نامه می‌باشد. با توجه به این قضیه، یک رده از فضاهای ناپراکنده CSWP بدست می‌آیند. از میان آنها می‌توان به فضای دوگانه پیکان الکساندرف و اوریسون اشاره کرد که پراکنده نیست ولی دارای CSWP است، زیرا هیچ کپی از مجموعهٔ

کانتور را شامل نمی‌باشد.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول مقدماتی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند.

در فصل دوم، ابتدا خاصیت استون ـ وایرشتراس مختلط را تعریف کرده و سپس مطالبی کلی دربارهٔ فضاهایی که دارای CSWP هستند بیان می‌کنیم، که درگذشته توسط رودین و هافمن و سینگر مورد مطالعه قرارگرفته‌اند. شاخص دیگری که برای فضاهای فشرده قائل می‌شویم دارا بودن خودتوان نابدیهی است که در این صورت گوئیم فضا دارای NTIP (Non-Trivial Idempotent Property) است. در این فصل نشان می‌دهیم روابط جالبی بین NTIP و CSWP وجود دارد.

در فصل سوم، فضاهای مرتب فشرده را مورد بررسی قرار می‌دهیم و قضیهٔ اساسی پایان نامه را در حالتی که Xیک فضای جدایی‌پذیر است ثابت می‌کنیم. سپس به کمک نظریهٔ اندازه، قضیهٔ اساسی پایان نامه را ثابت می‌کنیم.

بالاخره در فصل چهارم، که با مقدماتی دربارهٔ جبرهای H^∞ و L^∞ آغاز می‌شود، با ذکر چند مثال نشان می‌دهیم در حالت کلی NTIP، CSWP را ایجاب نمی‌کند.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به بررسی و بیان برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی در مورد توپولوژی و آنالیز مختلط می‌پردازیم که در فصل‌های آتی مورد نیاز می‌باشند و سپس جبر تابعی را تعریف و قضیه استون ـ وایرشتراس را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه‌ای بر توپولوژی

در این بخش مفاهیم موردنیاز از مبحث توپولوژی را ارائه می‌دهیم، که بیشتر آنها از مرجع [15] گرفته شده است.

۱.۱.۱ تعریف. (i) فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد. خانوادهٔ β از زیرمجموعه‌های X را یک پایهٔ توپولوژیک در X گوئیم هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ عضوی از خانواده β مانند B شامل x موجود باشد و به علاوه، اگر x به اشتراک دو عضو $B_۱$ و $B_۲$ از β متعلق باشد آنگاه عضوی از β مانند $B_۳$ موجود باشد که $x \in B_۳ \subseteq B_۱ \cap B_۲$.

(ii) اگر β پایه‌ای برای توپولوژی X باشد آنگاه τ، توپولوژی تولید شده توسط β، چنین تعریف می‌شود: زیرمجموعهٔ V از X را در X بازگوئیم (یعنی V عضوی از τ است) اگر به‌ازای هر $x \in V$، عضوی از پایهٔβ مانند B وجود داشته باشد به طوری که $x \in B$ و $B \subseteq V$.

۲.۱.۱ لم [15;2.2.1]. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و β پایه‌ای برای توپولوژی τ در X باشد، در این صورت τ برابر است با گردایهٔ همه اجتماعهای اعضای β.

۳.۱.۱ لم [15;2.2.3]. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز X باشد که به ازای هر x از X و هر مجموعهٔ باز X مانند V که شامل x است، عضوی از $\mathcal{C}$ مانند C وجود داشته باشد که $x \in C \subset V$. در این صورت $\mathcal{C}$ پایه‌ای برای توپولوژی X است.

۴.۱.۱ لم [15;2.5.1]. اگر β پایه‌ای برای توپولوژی X باشد، آنگاه خانواده

$$\beta_Y = \{B \cap Y \mid B \in \beta\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی زیر فضایی در Y است.

۵.۱.۱ تعریف. رابطه R روی مجموعه A را رابطهٔ ترتیبی ساده یا ترتیبی خطی گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) برای هر دو عضو متمایز x و y در A یا $x\,R\,y$ یا $y\,R\,x$. (خاصیت مقایسه‌پذیری)

(ii) هیچ عضو x از A در رابطهٔ $x\,R\,x$ صدق نکند.(خاصیت ناانعکاسی)

(iii) به ازای هر $x, y, z \in A$ ، اگر $x\,R\,y$ و $y\,R\,z$ آنگاه $x\,R\,z$. (خاصیت تعدی)

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای با رابطه ترتیبی ساده $<$ باشد. به ازای هر دو عضو X مانند a و b که $a < b$، چهار زیرمجموعه X موسوم به بازه‌ها به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$(a, b) = \{x \in X \;:\; a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in X \;:\; a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in X \;:\; a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in X \;:\; a \leq x \leq b\}$$

مجموعه‌ای از نوع اول را بازهٔ باز و مجموعه‌ای از نوع آخر را بازهٔ بسته درX می‌نامیم و مجموعه‌های نوع دوم و سوم بازه‌های نیم باز نامیده می‌شوند.

۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای با رابطهٔ ترتیبی ساده $<$ باشد و β گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X به یکی از صورتهای زیر باشد:

(i) همهٔ بازه‌های باز (a, b) در X.

(ii) همهٔ بازه‌هایی به صورت $[a_0, b)$ که در آن، a_0 کوچکترین عضو مجموعهٔ X است. (در صورت وجود)

(iii) همهٔ بازه‌هایی به صورت $(a, b_0]$ که در آن b_0 بزرگترین عضو مجموعهٔ X است. (در صورت وجود)

در این صورت گردایهٔ β تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X می‌دهد که آن را توپولوژی ترتیبی X می‌نامیم.

اگر X دارای کوچکترین عضو نباشد، مجموعه‌هایی از نوع (ii) وجود نخواهند داشت و اگر X دارای بزرگترین عضو نباشد، مجموعه‌هایی از نوع (iii) وجود نخواهند داشت.

۸.۱.۱ لم چسب [1] **[15;2.7.3]** . فرض کنیم Y و X فضاهای توپولوژی و $X = A \cup B$ به طوری که A و B هر دو زیرمجموعه‌های باز (یا هر دو بسته) X باشند. اگر توابع $f : A \to Y$ و $g : B \to Y$ پیوسته باشند. به‌طوری که برای هر $x \in A \cap B$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$، آنگاه تابع $h : X \longrightarrow Y$ با ضابطهٔ زیر پیوسته است.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

۹.۱.۱ نتیجه. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $H \subseteq X$. در این صورت تابع مشخصه H، $\chi_H : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر H هم باز وهم بسته باشد.

برهان. فرض کنیم $H \subseteq X$ هم باز و هم بسته باشد. در این صورت بنا به لم چسب، χ_H پیوسته است. (البته پیوستگی χ_H را می‌توان به‌طور مستقیم نیز نشان داد.)

برعکس، چون $\mathbb{R}$ هاسدورف است همسایگی‌های جدا از هم از صفر و یک به ترتیب مانند U و V موجودند و لذا $\chi_H^{-1}(V) = H$ و $\chi_H^{-1}(U) = H^c$. چون χ_H پیوسته است پس H هم باز و هم بسته می‌باشد.■

۱۰.۱.۱ لم. فرض کنیم X و Y دو مجموعهٔ مرتب با توپولوژی ترتیبی و تابع $f : X \to Y$ دو سویی و حافظ ترتیب باشد. در این صورت f همسانریختی‌است.

برهان. با توجه به پوشایی و حافظ ترتیب بودن f، تساوی زیر را به ازای هر $x, y \in X$ داریم.

$$f((x, y)) = (f(x), f(y))$$

1) The Pasting Lemma

اگر $x_\circ$ و $y_\circ$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عضو Xباشند (در صورت وجود)، آنگاه

$$f([x_\circ, y)) = [f(x_\circ), f(y))$$

$$f((x, y_\circ]) = (f(x), f(y_\circ)]$$

از طرفی با توجه به اینکه برای خانوادهٔ $\{A_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های X، $f(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$ و X و Y مجهز به توپولوژی ترتیبی می‌باشند لذا $V \subset X$ باز است اگر و تنها اگر $f(V) \subseteq Y$ باز باشد. بنابراین f همسانریختی‌است.■

۱۱.۱.۱ لم. هر دنباله کوشی (x_n) در فضای نرمدار X دارای زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) می‌باشد به طوری که

$$||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$$

برهان. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{2^\circ}$. بنابه تعریف دنبالهٔ کوشی، $n_\circ \epsilon \mathbb{N}$ای یافت می‌شود که به ازای هر $n > n_\circ$، $||x_n - x_{n_\circ}|| < \varepsilon$. فرض کنیم برای $k \geq 1$، $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ بدست آمده باشند به‌طوری که $n_\circ < n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$. حال برای $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$، $n_k > n_{k-1}$ای یافت می‌شود که به ازای هر $n > n_k$، $||x_n - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$.

با توجه به اینکه $n_1 > n_\circ$ داریم، $||x_{n_1} - x_{n_\circ}|| < \frac{1}{2^\circ}$. همچنین از $n_{k+1} > n_k$ نتیجه می‌شود که $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$ و حکم ثابت می شود.■

۱۲.۱.۱ تعریف. اگر d متریکی در مجموعهٔ X باشد، آنگاه گردایهٔ همه $\varepsilon-$ گویهای $B_d(x, \varepsilon)$ به‌ازای هر $x \in X$ و $\varepsilon > \circ$ ، تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی در X می‌دهند که آن را توپولوژی متریک القا شده به وسیله d می‌نامیم.

۱۳.۱.۱ تعریف. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد،X را متریک پذیرگوئیم هرگاه متریکی مانند d در X موجود باشد که توپولوژی X را القا کند. یک فضای متریک عبارت است از فضایی متریک پذیر مانند X همراه با متریک مشخص d که توپولوژی X را تولید می‌کند.

۱۴.۱.۱ لم [4;5.1.3]. فضای X همبند است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های هم باز و هم بسته در X، مجموعه تهی و خود X باشند.

۱۵.۱.۱ تعریف. فضای X راکلاً ناهمبند گوئیم هرگاه تنها زیرمجموعه‌های همبند آن مجموعه‌های تک عضوی باشند.

۱۶.۱.۱ تعریف. هرگاه توپولوژی فضای X دارای پایه‌ای شمارا باشد گوئیم X شمارای نوع دوم است.

۱۷.۱.۱ قضیه [15;4.1.2]. هر زیرفضای، فضای شمارای نوع دوم خود شمارای نوع دوم است.

۱۸.۱.۱ تعریف. فضایی راکه هر پوشش باز آن شامل یک زیرپوشش شمارا باشد، فضای لیندلف [1] می‌نامیم.

۱۹.۱.۱ تعریف. فضایی را که دارای زیرمجموعهٔ شمارا و چگال باشد، فضای جدایی‌پذیر می‌نامیم.

۲۰.۱.۱ قضیه [15;4.1.3]. فرض کنیم X دارای پایه‌ای شمارا باشد، در این صورت:

(i) X فضای لیندلف است.

(ii) X فضای جدایی‌پذیر است.

در صورت متریک پذیری X، عکس قضیه فوق نیز برقرار است.

۲۱.۱.۱ لم. هر فضای متریک پذیر فشرده X، پایهٔ شمارا دارد (شمارای نوع دوم‌است).

برهان. برای هر $n \in \mathbb{N}$، گردایهٔ $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{x \in X}$ پوششی باز برای X است. فشردگی X ایجاب می‌کند که، $X = \bigcup_{i=1}^{m_n} B(x_i, \frac{1}{n})$. قرار می‌دهیم، $A_n = \{B(x_1, \frac{1}{n}), \ldots, B(x_{m_n}, \frac{1}{n})\}$. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز X است. نشان می‌دهیم A پایه‌ای برایX می‌باشد. فرض کنیم $x \in X$ و U مجموعه‌ای باز شامل x باشد. لذا $r > 0$ای موجود است که، $x \in B(x, r) \subseteq U$ و $n \in \mathbb{N}$ای وجود دارد که $\frac{2}{n} < r$. $x \in X = \bigcup_{i=1}^{m_n} B(x_i, \frac{1}{n})$ پس i ای یافت می‌شود که $x \in B(x_i, \frac{1}{n})$. لذا،

$$x \in B(x_i, \frac{1}{n}) \subset B(x, r) \subseteq U$$

پس A پایه‌ای شمارا برای X است.■

۲۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم مجموعه‌های تک عضوی در X بسته باشند، در این صورت X را منظم گوئیم هرگاه به ازای هر نقطه آن مانند x و هر مجموعهٔ بسته جدا از x مانند B، مجموعه‌های باز جدا از هم به ترتیب شامل x و B موجود باشند. فضای X را نرمال گوئیم هرگاه به‌ازای هر دو مجموعهٔ بستهٔ جدا از هم آن مانند A و B، مجموعه‌های باز جدا از همی به ترتیب شاملA و B موجود باشند. واضح است که هر فضای نرمال، منظم است.

1) Lindelöf Space

۲۳.۱.۱ قضیه [4.2.4 ; 15]. هرفضای هاسدورف و فشرده، فضای نرمال است.

۲۴.۱.۱ قضیه توسیع تیتسه[1] **[15;4.3.2]**. فرض کنیم X یک فضای نرمال و A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از آن باشد.

(i) هرنگاشت پیوسته از A به بازهٔ بسته $[a,b]$ از $\mathbb{R}$ را می‌توان به یک نگاشت پیوسته از X به $[a,b]$ گسترش داد.

(ii) هرنگاشت پیوسته از A به $\mathbb{R}$ را می‌توان به نگاشت پیوسته‌ای از X به $\mathbb{R}$ گسترش داد.

۲۵.۱.۱ لم اوریسون[2] **[15;4.3.1]**. فرض کنیم $F_۰$ و $F_۱$ زیرمجموعه های بسته و جدا از هم از فضای نرمال X باشند. در این صورت تابع پیوسته $f : X \longrightarrow [a,b]$ موجود است به طوری که $f(F_۰) = \{a\}$ و $f(F_۱) = \{b\}$ و $f(X) \subset [a,b]$.

۲۶.۱.۱ لم. اگر X فضای متریک و فشرده باشد آنگاه $C(X)$ جدایی‌پذیر است.

برهان. از متریک و فشرده بودن X یک نتیجه می‌شود که X فضای جدایی‌پذیر است. زیرمجموعهٔ شمارا و چگال $Q = \{x_۱, x_۲, \dots\}$ از X را در نظر می‌گیریم و برای هر n، تابع $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$f_n(t) = d(t, x_n) \qquad (t \in X)$$

بدیهی است که f_nها توابعی پیوسته بر X هستند، فرض کنیم x و y دو عضو متمایز X باشند. قرار می‌دهیم $d(x,y) = ۲\delta > ۰$. چون Q در X چگال است لذا nای یافت می‌شود که $d(x, x_n) < \delta$ و

$$f_n(y) = d(y, x_n) \geq d(x,y) - d(x, x_n) \geq ۲\delta - \delta = \delta > d(x, x_n) = f_n(x)$$

لذا $f_n(y) \neq f_n(x)$. فرض کنیم A جبر چند جمله‌ایهای با ضرایب مختلط روی مجموعهٔ $\{۱, f_۱, f_۲, \dots\}$ باشد که قسمت حقیقی و موهومی ضرایب آنها گویا هستند. لذا A اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمار است، در نتیجه شمارا می‌باشد. از طرفی A شامل مجموعهٔ $\{۱, f_۱, f_۲, \dots\}$ می‌باشد. پس A نقاط X را جدا می‌کند و شامل توابع ثابت است و چون f_nها حقیقی هستند پس A خودالحاقی نیز می‌باشد. لذا بنا به قضیه استون‌ـوایرشتراس در $C(X)$ چگال است و در نتیجه $C(X)$ جدایی‌پذیر است. ■

1) Tietze Extension Theorem 2) Urysohn Lemma

۲۷.۱.۱ قضیه متریک سازی اوریسون[1] [**15;4.4.1**]. هر فضای منظم با پایه شمارا فضایی متریک پذیر است.

۲۸.۱.۱ قضیه [30.3 ; 22]. هر دو فضای متریک فشرده، کامل و کلاً ناهمبند همسانریخت هستند.

۲۹.۱.۱ نتیجه [30.4 ; 22] . مجموعه کانتور تنها فضای متریک فشرده، کامل و کلاً ناهمبند است (با یکی در نظر گرفتن فضاهای همسانریخت).

۳۰.۱.۱ تعریف. فضای X را کاملاً منظم گوئیم هرگاه مجموعه های تک عضوی در X بسته باشند و برای هر نقطه مانند $x_\circ \in X$ و هر مجموعهٔ بسته در X مانند A که $x_\circ \notin A$ ، تابع پیوسته $f : X \to [\circ, ۱]$ موجود باشد که $f(x_\circ) = ۱$ و $f(A) = \{\circ\}$.

۳۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته و یک به یک باشد. اگر $f(X)$ را به عنوان زیرفضایی از Y در نظر بگیریم و تابع $f : X \to f(X)$ همسانریختی باشد، در این صورت f را یک نشاننده (توپولوژیک) X در Y می‌نامیم.

۳۲.۱.۱ قضیه نشاندن[2] [**15;4.4.2**]. فرض کنیم X فضای هاسدورف و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ گردایهٔ همه توابع حقیقی پیوسته بر X باشند با این خاصیت که به ازای هر $x_\circ$ از X و هر همسایگی U مانند $x_\circ$ اندیسی مانند α موجود باشد به‌طوری که $f_\alpha(x_\circ) > \circ$ و f_α در خارج از U صفر شود. در این صورت تابع $F : X \to \mathbb{R}^J$ با ضابطهٔ $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$ یک نشاننده از X در $\mathbb{R}^J$ است که $\mathbb{R}^J$ با توپولوژی حاصلضربی در نظر گرفته می‌شود.

۳۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم و $C_b(X)$ فضای همهٔ توابع حقیقی پیوسته و کراندار روی X باشد. برای هر $f \in C_b(X)$ فرض کنیم $I_f = [\inf f(X), \sup f(X)]$. در این صورت I_f بازه‌ای بسته در $\mathbb{R}$ و شامل برد f است. نگاشت $h : X \to \prod_{f\in C_b(X)} I_f$ را با ضابطهٔ $h(x) = (f(x))_{f\in C_b(X)}$ تعریف می‌کنیم. بنا به قضیه تیخونف[3] $\prod_{f\in C_b(X)} I_f$ هاسدورف و فشرده است و چون X فشرده است پس $\overline{h(X)} \subset \prod_{f\in C_b(X)} I_f$ کاملاً منظم است خانواده $\{f\}_{f\in C_b(X)}$ نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌کند. پس بنا به قضیه نشاندن h یک نشاننده است و می‌توان X را با $h(X)$ یکسان گرفت. در این صورت بستار $h(X)$ را فشرده سازی استون ـ چخ[4] X می‌نامیم و با $\beta(X)$ نمایش می‌دهیم.

1) Urysohn Metrization Theorem 2) Imbedding Theorem 3) Tychonoff Theorem 4) Stone-Ĉech Compactification

۳۴.۱.۱ لم [15; P. 243]. اگر Xفضایی گسسته باشد آنگاه $\beta(X)$ کلاً ناهمبند است.

۳۵.۱.۱ لم [15; P. 243]. فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم باشد. اگر $\beta(X) \neq X$ آنگاه $\beta(X)$ متریک‌ناپذیر است.

۳۶.۱.۱ قضیه [15 ; 3.5.9] . فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. در این صورت X فشرده است اگر و تنها اگر برای هر گردایه $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ X که دارای خاصیت اشتراک متناهی هستند $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ ناتهی باشد.

۲.۱ فضاهای باناخ

۱.۲.۱ قضیه نگاشت باز[۱] [20;2.12]. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و T نگاشتی خطی و کراندار و پوشا از X به Y باشد، در این صورت T نگاشتی باز است.

۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم A و B دو فضای نرمدار باشند و $T : A \to B$ یک ایزومتری خطی پوشا باشد. در این صورت A فضای باناخ است اگر و تنها اگر B فضای باناخ باشد.

برهان. فرض کنیم A فضای باناخ و (g_n) دنبالهٔ کوشی در B باشد. بنا به پوشایی T، $f_n \in A$ یافت می‌شود که $Tf_n = g_n$. چون T خطی و ایزومتری است لذا،

$$\|g_n - g_m\|_B = \|Tf_n - Tf_m\|_B = \|T(f_n - f_m)\|_B = \|f_n - f_m\|_A$$

پس (f_n) دنباله‌ای کوشی در A است و چون A فضای باناخ است لذا (f_n) به عضوی از A مانند f همگراست. فرض کنیم $g = Tf \in B$.

$$\|g_n - g\|_B = \|Tf_n - Tf\|_B = \|T(f_n - f)\|_B = \|f_n - f\|_A$$

لذا (g_n) به g همگراست، پس B فضای باناخ است.

برای اثبات عکس قضیه کافیست T^{-1} را در نظر بگیریم و نقش A و B را عوض کنیم.■

1) The Open Mapping Theorem

۳.۲.۱ قضیه [5.19 ; 19]. فرض کنیم M یک زیر فضای خطی از فضای خطی نرمدار X باشد و $x_\circ \in X$. در این صورت $x_\circ$ در بستار M نیست اگر و تنها اگر تابعکی خطی کراندار مانند f بر X موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in M$، $f(x) = \circ$ ولی $f(x_\circ) \neq \circ$.

۴.۲.۱ تعریف. فضای دوگان فضای خطی نرمدار X عبارت است از مجموعه تمام تابعکهای خطی کراندار بر X که آن را با X^* نمایش می‌دهند. X^* با جمع و ضرب اسکالر

$$(\alpha\Lambda)x = \alpha\Lambda x \ , \ (\Lambda_۱ + \Lambda_۲)x = \Lambda_۱ x + \Lambda_۲ x \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \Lambda \in X^*)$$

و نرم عملگری $\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda x| : x \in X, \|x\| \leq ۱\}$ تشکیل فضای باناخ می‌دهد.

۳.۱ جبرهای باناخ

۱.۳.۱ تعریف. یک جبر (حقیقی یا مختلط) عبارت است از فضای برداری A بر روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ (میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان مختلط $\mathbb{C}$) به همراه نگاشت

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

به‌طوری که برای هر $x, y, z \in A$ و هر اسکالر α داشته باشیم

(i) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ و $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

(ii) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(iii) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

معمولاً به جای $x \cdot y$ می‌نویسیم xy و ما نیز همین نماد را برای حاصلضرب x و y به کار می‌بریم.

۲.۳.۱ تعریف. جبر نرمدار عبارت است از جبر A به همراه نرم $||.||$ که در نامساوی زیر صدق کند

$$||xy|| \leq ||x|| \, ||y|| \qquad (x, y \in A)$$

چنین نرمی را نرم جبری گوئیم.

۳.۳.۱ تعریف. جبر نرمدار $(A, ||.||)$ را جبر باناخ گوییم هرگاه A تحت نرمش کامل باشد. جبر باناخ A را واحددار گوییم هرگاه نسبت به ضرب عنصر همانی داشته باشد.

۴.۳.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و فشرده و $C(X)$ جبر توابع مختلط پیوسته روی X باشد. واضح است که $C(X)$ با نرم یکنواخت $||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد. فرض کنیم A زیر جبری از $C(X)$ باشد. گوییم A نقاط X را جدا می‌کند هرگاه به ازای هر دو عضو متمایز X مثل y, x عضوی از A مانند f یافت شود که $f(y) \neq f(x)$.

۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای هاسدورف و فشرده باشد. زیر جبر A از $C(X)$ را جبر تابعی[1] روی X گوییم هرگاه A نقاط X را جدا کند و شامل توابع ثابت باشد. اگر $||.||$ یک نرم جبری روی A باشد، گوییم$(A, ||.||)$ جبر تابعی نرمیده روی X است. اگر $(A, ||.||)$ تحت نرمش کامل باشد A را جبر تابعی باناخ روی X می‌نامیم. در حالت خاص که نرم A با نرم یکنواخت هم‌ارز باشد، A را جبر یکنواخت گوییم.

۶.۳.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. تابعک خطی ضربی ناصفر $\varphi : A \to \mathbb{C}$ را یک همریختی مختلط روی A می‌نامیم. مجموعه تمام همریختی‌های مختلط روی A را با Δ نمایش می‌دهیم.

۷.۳.۱ قضیه [10.7 ; 20]. هر همریختی مختلط روی یک جبر باناخ A پیوسته است.

۸.۳.۱ قضیه [5.1.2 ; 7]. M یک ایدآل ماکسیمال جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار A است اگر و تنها اگر M هستهٔ یک همریختی مختلط روی A باشد.

بنا به قضیه قبل تناظر دوسویی بین همریختی‌های مختلط و ایدآل‌های ماکسیمال A برقرار است.

۹.۳.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار باشد و Δ مجموعه همهٔ همریختی های مختلط روی A باشد. به هر $f \in A$ تابع $\hat{f} : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ نسبت می‌دهیم. نگاشت $\hat{f}$ را تبدیل گلفاند[2] f می‌نامیم. با فرض $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$، منظور از تبدیل گلفاند نگاشت زیر می‌باشد:

$$A \longrightarrow \hat{A}$$

$$f \longmapsto \hat{f}$$

1) Function Algebra 2) Gelfand Transform

توپولوژی ضعیف[1] تولید شده توسط $\hat{A}$ روی Δ را توپولوژی گلفاند روی Δ می‌نامیم. لذا توپولوژی گلفاند ضعیف‌ترین توپولوژی روی Δ است که تحت آن هر $\hat{f}$ پیوسته است.

۱۰.۳.۱ قضیه [20 ; 11.9] . فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار باشد. در این صورت M_A، فضای ایدآل ماکسیمال A، هاسدورف و فشرده است.

۱۱.۳.۱ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار و $C(M_A)$ جبر توابع پیوسته روی M_A باشد. در این صورت $\hat{A}$ زیر جبری از $C(M_A)$ است که نقاط M_A را جدا می‌کند و شامل توابع ثابت است.

برهان. با توجه به اینکه تبدیل گلفاند عضو واحد A، تابع ثابت یک روی M_A است لذا $\hat{A}$ شامل توابع ثابت است. حال فرض کنیم φ_1 و φ_2 دو عضو متمایز M_A باشند. لذا $f \in A$ وجود دارد که $\varphi_1(f) \neq \varphi_2(f)$ در نتیجه $\hat{f}(\varphi_1) \neq \hat{f}(\varphi_2)$ که $\hat{f} \in \hat{A}$. لذا $\hat{A}$ نقاط M_A را جدا می‌کند.■

۱۲.۳.۱ قضیه [2.3.7 ; 13]. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و فشرده و ناتهی باشد. برای $x \in X$ تابع h_x را روی $C(X)$ به صورت $h_x(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم که $f \in C(X)$. در این صورت نگاشت $x \to h_x$ یک همسانریختی پوشا از X به فضای ایدآل ماکسیمال $C(X)$ می‌باشد.

۱۳.۳.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $x \longrightarrow x^*$ یک برگشت جبری[2] روی A باشد. در این صورت A را یک B^*-جبر یا C^*- جبر می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $\|x^*x\| = \|x\|^2$. به عبارت دیگر X و $M_{C(X)}$ تحت نگاشت فوق همسانریخت هستند.

۱۴.۳.۱ قضیه گلفاند-نیمارک [3] [20;11.18]. فرض کنیم A یک C^*- جبر تعویض‌پذیر واحددار باشد. در این صورت تبدیل گلفاند $x \longrightarrow \hat{x}$ یک یکریختی ایزومتریک از A به روی جبر $C(M_A)$ است.

۴.۱ قضیه استون-وایرشتراس

۱.۴.۱ تعریف. برای فضای توپولوژی X، زیر جبر A از $C(X)$ را خودالحاقی گوییم هرگاه برای هر $f \in A$ مزدوج مختلط f، یعنی $\bar{f}$، متعلق به A باشد.

1) Weak Topology 2) Algebra Involution 3) Gelfand-Naimark

۲.۴.۱ تعریف. فرض کنیم A خانواده‌ای از توابع بر مجموعه X باشد. گوییم A در هیچ نقطهٔ X صفر نمی‌شود هرگاه به ازای هر $x \in X$ تابع $g \in A$ وجود داشته باشد که $g(x) \neq 0$. واضح است که اگر A شامل توابع ثابت باشد آنگاه A در هیچ نقطه از X صفر نمی‌شود.

۳.۴.۱ قضیه استون ـ وایرشتراس مختلط [1] [18;7.33]. فرض کنیم A جبری خود الحاقی از توابع پیوسته روی مجموعهٔ فشرده و هاسدورف X باشد که نقاط X را جدا کند و در هیچ نقطه از X صفر نشود. در این‌صورت A در $C(X)$ چگال است.

۵.۱ توابع مختلط

۱.۵.۱ تعریف. فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در صفحه مختلط باشد. تابع $f : \Omega \to \mathbb{C}$ را در Ω تحلیلی گوئیم هرگاه مشتق آن در هر نقطه از Ω موجود باشد.

۲.۵.۱ قضیه [10.28 ; 19] . فرض کنیم Ω مجموعه‌ای باز در صفحه باشد و دنبالهٔ $f_n \in H(\Omega)$ بر هر زیر مجموعهٔ فشرده از Ω به طور یکنواخت به تابع f همگرا باشد. در این صورت $f \in H(\Omega)$.

۳.۵.۱ تعریف. فرض کنیم D قرص واحد باز (به مرکز مبدأ) در صفحهٔ مختلط باشد. مجموعهٔ تمام توابع پیوسته روی $\bar{D}$ را که در D تحلیلی هستند قرص جبر می‌نامیم و با $A(\bar{D})$ نمایش می‌دهیم. جبر $A(\bar{D})$ شامل توابع ثابت و تابع همانی می‌باشد و در نتیجه نقاط $\bar{D}$ را جدا می‌کند. همچنین با توجه به اینکه حد یکنواخت توابع تحلیلی، تحلیلی است نتیجه می‌شود که $A(\bar{D})$ تحت نرم سوپرمم کامل است لذا $A(\bar{D})$ با نرم سوپرمم یک جبر یکنواخت است.

۴.۵.۱ قضیه (اصل ماکسیمم قدر مطلق[2]) [3;4.42.1]. اگر تابع f در حوزهٔ مفروض Ω تحلیلی و غیر ثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ دارای هیچ مقدار ماکسیممی در Ω نیست.

۵.۵.۱ نتیجه [4.42 ; 3]. فرض کنیم تابع f در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته و در درون R تحلیلی و غیر ثابت باشد. در این صورت $|f(z)|$ ماکسیمم خود را در نقطه‌ای از مرز R (نه هیچ‌گاه در درون R) می‌گیرد.

1) Complex Stone-Weierstrass Theorem 2) Maximum Modulus Principle

۶.۱ اندازه‌ها

۱.۶.۱ تعریف. گردایهٔ $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ X را یک $\sigma-$ جبر در X می‌نامیم هرگاه $\mathfrak{M}$ دارای خواص زیر باشد:

(i) $X \in \mathfrak{M}$

(ii) هرگاه $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

(iii) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$، $A_n \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A \in \mathfrak{M}$.

هرگاه $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X باشد، آنگاه X را فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

اگر X فضای اندازه‌پذیر، Y فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به Y باشد، گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر در X باشد.

۲.۶.۱ قضیه [19 ; 1.9] . فرض کنیم X یک فضای اندازه‌پذیر باشد. در این صورت

(i) هرگاه u و v توابعی حقیقی اندازه‌پذیر بر X باشند، آنگاه $f = u + iv$ تابع مختلط اندازه‌پذیر بر X می‌باشد.

(ii) هرگاه $f = u + iv$ یک تابع مختلط اندازه‌پذیر بر X باشد، آنگاه u و v و $|f|$ توابع حقیقی اندازه‌پذیر بر X می‌باشند.

(iii) هرگاه f و g توابع مختلط اندازه‌پذیر بر X باشند، آنگاه $f + g$ و fg نیز اندازه‌پذیر هستند.

۳.۶.۱ تعریف. یک اندازه مثبت، تابعی مجموعه‌ای مانند μ از $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ به $[0, \infty]$ است که شمارا جمعی شمارش‌پذیر می‌باشد، یعنی هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارا و از هم جدا از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد آنگاه،

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (1)$$

همچنین فرض می‌کنیم حداقل برای یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند A، $\mu(A) < \infty$.

فضای اندازه‌پذیر X همراه با یک اندازهٔ مثبت روی $\sigma-$ جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر X را فضای اندازه گوئیم.

اندازهٔ مختلط یک تابع شمارا جمعی مختلط تعریف شده بر یک $\sigma-$ جبر می‌باشد. توجه کنید که در این حالت، همگرایی سری (۱) (بر خلاف اندازه‌های مثبت که سری ممکن است واگرا، یعنی همگرا به ∞ باشد) بخشی از ملزومات است. چون اجتماع مجموعه‌های A_i در صورت جابه‌جایی A_iها تغییر نمی‌کند، پس هر آرایش مجدد سری (۱) نیز

باید همگرا باشد. لذا بنا به قضایای مقدماتی، سری عملاً به طور مطلق همگراست.

۴.۶.۱ قضیه [1.24 ; 19] . فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر در مجموعهٔ X و μ یک اندازهٔ مثبت بر $\mathfrak{M}$ باشد و E و f به ترتیب مجموعه و تابعی اندازه‌پذیر باشند. هرگاه $\mu(E) = 0$ آنگاه $\int_f d\mu = 0$ حتی اگر به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $f(x) = \infty$.

۵.۶.۱ تعریف. فرض کنیم μ یک اندازهٔ مختلط بر $\mathfrak{M}$ باشد. تابع مجموعه‌ای $|\mu|$ بر $\mathfrak{M}$، با ضابطهٔ زیر را تغییرکل μ یا اندازهٔ تغییرکل μ می‌نامیم.

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \quad \text{است } E \text{ افرازی از } \{E_i\}_{i=1}^{\infty}\}$$

۶.۶.۱ قضیه [6.2 ; 19]. فرض کنیم μ یک اندازهٔ مختلط بر $\mathfrak{M}$ باشد. تغییرکل $|\mu|$، یک اندازه مثبت بر $\mathfrak{M}$ است.

۷.۶.۱ تعریف. اندازه μ تعریف شده بر $\sigma-$ جبر تمام مجموعه های بورل در فضای هاسدورف و موضعاً فشردهٔ X را یک اندازه بورل X می‌نامیم.

فرض کنیم μ اندازه‌ای مثبت باشد. گوئیم اندازهٔ μ منظم است هرگاه برای هر مجموعهٔبورل E.

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \text{باز است} U, E \subset U\} = \sup\{\mu(K) : \text{فشرده است} K\,,\ K \subset E\}\,.$$

۸.۶.۱ تعریف. اندازه بورل مختلط μ را منظم گوئیم هرگاه اندازهٔ $|\mu|$ منظم باشد.

۹.۶.۱ قضیه [6.4 ; 19] . هرگاه μ یک اندازهٔ مختلط بر X باشد، آنگاه $|\mu|(X) < \infty$.

۱۰.۶.۱ قضیه [6.12 ; 19]. فرض کنیم μ یک اندازه مختلط بر σ- جبر $\mathfrak{M}$ در X باشد. در این صورت تابع اندازه پذیری مانند h وجود دارد که به ازای هر $x \in X$، $|h(x)| = 1$ و $d\mu = h\, d|\mu|$.

۱۱.۶.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و موضعاً فشرده باشد. مجموعه تمام توابع مختلط پیوسته روی X را، که در بی‌نهایت صفر می‌باشند، با نماد $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. f در بی‌نهایت صفر است یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ زیرمجموعه‌ای فشرده مانند F در X موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $x \notin F$، $|f(x)| < \varepsilon$.
واضح است که در صورت فشرده بودن X، $C_0(X) = C(X)$.