بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

پایان نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد

" گرایش حرارت و سیالات "

# حل لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی بکمک کامپیوتر

زیر نظر :

دکتر مجید ملکی

توسط :

امیرحسین شیروی

۱۶۶۷۸

شهریور ۱۳۶۸

" بسم الله الرحمن الرحیم "

پایان نامه آقای امیرحسین شیروی در تاریخ ۱۳۶۸/۶/۱۸ کمیتهٔ پایان نامه متشکل از اساتید ذیل مورد بررسی و تائید قرار گرفت .

۱ ـ آقای دکتر مجید ملکی استاد راهنمای رساله

۲ ـ آقای دکتر احمد صابونچی ، استاد کمیتهٔ تخصصی

۳ ـ آقای دکتر محمدسعیدسعیدی ، مسئول کمیتهٔ کارشناسی ارشد دانشکده

## * قدردانی *

سپاس خداوند متعال را که مرا قادر ساخت تا در جهت علم که از با ارزش ترین زینتهای بشری است قدمی بردارم و با تفضل دائمیش همواره این بنده را مورد لطف قرار داده است .

در اینجا بر خود لازم میدانم تا مراتب تشکر و قدردانی خود را از کلیهٔ اساتید محترم دانشکدهٔ مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان که در این دوره با آنها درس داشته و استفاده نموده ام اعلام کرده و خصوصاً" از استاد محترم جناب آقای دکتر مجید ملکی که این پایان نامه تحت نظارت و راهنمائی ایشان انجام شد و همچنین از جناب آقای دکتر احمد صابونچی که زحمت مطالعهٔ آنرا کشیدند ، کمال تشکر را دارم .

## * خلاصه *

در این پایان نامه ، یک روش حل عددی برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی که در معادلات لایه‌های مرزی با آنها سروکار داریم تشریح شده است و توانائیها و محدودیتهای این روش موردبحث قرارگرفته است . .

مطالب درچهارفصل ویک ضمیمه بشرح زیرتدوین شده است :

فصل اول : مربوط به معادلات کلی وشرایط مرزی است . دراین فصل جنبهٔ ریاضیاتی مسئله موردبحث قرارگرفته وروابطی مفیداستخراج شده است . میدان نزدیک دیوارکه از اهمیت زیادی برخوردار است ، دراین فصل توصیف وتشریح شده است . .

فصل دوم : مربوط به تبدیل معادلات بدست آمده درفصل یک ، به فرم تفاوت محدود است . نخست با توجه به طبیعت لایه‌های مرزی، یک سیستم مختصات مناسب انتخاب شده و تمام معادلات را درآن سیستم نوشته‌ایم ، آنگاه آنها را به فرم تفاوت محدود درآورده‌ایم . .

فصل سوم : دراین فصل با توجه به اهمیت میدان نزدیک دیوار ، بحث بیشتری در این موردشده وروابطی جبری بصورت صریح استخراج شده است که درکارما بسیار مورداستفاده قرارگرفته است . همچنین با توجه به یک سری آزمایشات وتجربیات توسط دانشمندان ، ثابتهائی راکه درروندبدست آوردن معادلات صریح به آنها نیازداشته‌ایم ، انتخاب می‌کنیم . .

فصل چهارم : دراین فصل نخست توضیحی اجمالی درموردلایه‌های مرزی آرام داده می‌شودوآنگاه چندنمونهٔ محاسباتی را با این روش ارائه‌کرده ونتایج را با کارهای دیگران مقایسه می‌کنیم . .

درضمیمه نیزبرنامهٔ کامپیوتری مورداستفاده آورده شده است . .

## * فهرست مطالب *


فصل اول : معادلات لایهٔ مرزی ..... ۱

۱ـ۱ : مقدمه ..... ۱

۱ـ۲ : معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برای جریان متقارن محوری ..... ۲

ـ محدودیتها ..... ۲

ـ سیستم مختصات ..... ۳

ـ معادلات بقا ..... ۴

۱ـ۳ : شرایط مرزی وابتدائی ..... ۴

ـ پروفیلهای ابتدائی متغیرهای وابسته ..... ۴

ـ شرایط مرزی ..... ۵

۱ـ۴ : روابط کمکی ..... ۶

ـ روابط ترمودینامیکی ..... ۶

ـ قوانین تبدیل ..... ۶

ـ بیانی برای ویسکوزیتهٔ موثر ..... ۷

ـ عدد اشمیت وپرانتل موثر ..... ۸

ـ میدان نزدیک دیوار ..... ۸

۱ـ۵ : معادلات لایهٔ مرزی یک بعدی نزدیک دیوار ..... ۱۰

ـ فرض جریان کوئت ..... ۱۰

ـ مفاهیم فرضیهٔ تعمیم یافتهٔ وان دریست ..... ۱۲

ـ استفاده از انتالپی دیوار آدیاباتیک ..... ۱۳

- برخی حلهای تحلیلی ..... ۱۴
- فرم صریح روابط ..... ۱۸

فصل دوم : یک روش حل تفاوت محدود ..... ۲۰

۲-۱ : انتخاب سیستم مختصات ..... ۲۰

۲-۲ : معادلات بقا درسیستم مختصات جدید ..... ۲۱

۲-۳ : دبی های جذب شده به داخل لایهٔ مرزی ..... ۲۲

۲-۴ : معادلهٔ تفاضل ..... ۲۳

۲-۵ : تصحیح خطا درمجاورت مرزها ..... ۲۹

- مقادیرخطا کدامند؟ ..... ۲۹
- مقادیرتصحیح خطا برای یک مرزدیوار ..... ۳۰
- مقادیرتصحیح خطا برای یک مرزآزاد ..... ۳۲
- مقادیرتصحیح خطا برای مرزخط تقارن ..... ۳۳

۲-۶ : رفتارشرایط مرزی ویژه ..... ۳۴

- فلوی کل ازدیوارمعلوم باشد ..... ۳۴
- یک مرزخط تقارن باشد ..... ۳۵

۲-۷ : حل معادلات تفاضل ..... ۳۶

۲-۸ : نکات متفرقه ..... ۳۷

- فرمول کنترل شبکه ..... ۳۷
- محاسبه فواصل عمودوضخامت شبکه ..... ۳۷
- یک ضخامت مشخصهٔ لایه ..... ۳۸
- انتخاب طول قدم بعدی ..... ۳۹

فصل سوم : برخی روابط فلوی دیوار وانتخاب ثابتها ..... ۴۰

۳-۱ : هدف ازاین فصل ..... ۴۰

۲ـ۳ : انتگرال گیری عددی ..... ۴۰

۳ـ۳ : فرمولهای جبری ..... ۴۳

ـ روابط برای اعداد رینولدز پائین ..... ۴۳

ـ قانون دراگ برای تمام اعداد رینولدز ..... ۴۴

ـ قانون فلوی حرارتی یا فلوی دیفیوژن برای جریان مغشوش ... ۴۶

۴ـ۳ : خلاصهٔ روابط برای جریان مغشوش ..... ۵۰

۵ـ۳ : انتخاب ثابتها ..... ۵۲

فصل چهارم : چند نمونه محاسباتی ..... ۵۴

۱ـ۴ : لایهٔ مرزی آرام ..... ۵۴

ـ لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی آرام روی صفحهٔ تخت ..... ۵۵

ـ لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی آرام با گرادیان فشار ..... ۵۵

ـ تبدیل لایهٔ مرزی آرام به مغشوش ..... ۵۸

۲ـ۴ : لایهٔ مرزی مغشوش ..... ۵۹

ـ لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی مغشوش روی صفحهٔ تخت ..... ۵۹

ـ لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی مغشوش روی صفحهٔ تخت .... ۵۹

ـ لایهٔ مرزی مغشوش روی جسم متقارن محوری ..... ۶۱

ضمیمه : برنامه کامپیوتری ..... ۶۳

مراجع و مآخذ ..... ۸۳

## ** فصـــل اول

### " معادلات لایهٔ مرزی "

۱-۱ : مقـدمـــه

درسالهای اخیر، استفاده ازروشهای عددی برای حل مسائل مهندسی وعلوم کـــه تاکنون راه‌حل تحلیلی برای آنهاارائه‌نشده، بصورت روزافزونی درحال توسعه است. کارحاضرنمونه‌ای است ازاین امرکه‌برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی کـه‌در ارتباط با پدیدهٔ لایهٔ مرزی مطرح می‌شود، بکار گرفته شده است.

تعریف پدیدهٔ لایهٔ مرزی : یک لایهٔ مرزی می‌تواند بصورت میدانی دریک سیـــال جاری تعریف شودکه‌درآن، سیال عمدتا" دریک جهت جریان داشته‌وتنشهای برشی، فلوهای حرارتی وانتشارملکولی عمدتا" درجهت عمودبرجهت حرکت دارای اهمیت باشند. باذکـر چندمثال، تعریف راروشن می‌کنیم :

جریان درلولهٔ باسطح مقطع یکسان وطول بلندومستقیم، معمولا" جریان‌لایهٔ مرزی است. دراین مورد، جهت غالب جریان محوری بوده‌وتغییرات تنشهای برشی وفلـــــوی حرارتی درجهت شعاع حائزاهمیت می باشند. حال چنانچه‌سطح مقطع لوله‌بطورناگهانـی بزرگ شود، طبیعتا" یک جریان برگشتی بوجودمی‌آید که دیگرنمی‌تواند از نوع لایـــــهٔ مرزی باشد. ویاچنانچه‌جریان هوارا بصورت دائم روی یک ایرفویل درنظربگیریـــــم، همواره‌یک لایهٔ مرزی نزدیک سطح ایرفویل تشکیل می‌شود. جریان غالب سیال در جهـت طول ایرفویل است ودرمجاورت سطح، تنشهای برشی وشارحرارتی وجودداروندکه‌باعـــث انتقال مومنتم وانرژی درجهت عمودبرسطح می‌شوند. حال چنانچه‌زاویهٔ حمله‌زیـــاد شود، به‌جائی می رسیم که‌خطوط جریان درنزدیکی لبهٔ انتهائی ایرفویل ازسطح جداشده‌و

پس از نقطهٔ جدائی ، جهت غالب جریان دیگردرا متداد طول ایرفویل نیست واز این به بعد ، به این جریان، لایهٔ مرزی نمی گوئیم . ما در اینجا توجهمان را معطوف به لایه های مرزی دوبعدی( متقارن محوری ) و دائم می کنیم .

۲-۱ : معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برای جریان متقارن محوری

محدودیتها :

در این فصل، معادلات دیفرانسیلی عرضه می شود که بیانگرمفاهیم قوانین بقا ، برای جریانهای دائم ومتقارن محوری هستند .

جریانهای سطحی را می توان از اعضای خانوادهٔ جریانهای متقارن محوری دانست . ما در اینجا فرض می کنیم که تنشهای برشی، فلوهای حرارتی وفلوهای دیفیوژن، همگی فقط در اثرگرادیان درجهت عمودبرخطوط جریان بوجودمی آیند که این یک تقریب معمول درمسائل لایهٔ مرزی است . دیگراز فرضیات ، اینست که برگشت جریان[1] نداریم . فقط در اینصورت است که می توانیم معادلات کلی بیضوی[2] را به فرم سهموی[3] تقلیل دهیم .

فرض عدم وجودجریان برگشتی، دراستفاده از تابع جریان نهفته است ، چون اگر جریان برگشتی می داشتیم ، بایستی بعضی ازمقادیرتابع جریان، دریک سطح مقطع از لایهٔ مرزی دوبارظاهرمی شدو بنابراین برای یک مقدار از تابع جریان، دومقدارسرعت ، دما و ... محاسبه می شد .

درجریانهای مغشوش ، ازمقادیرمتوسط زمانی متغیرها استفاده شده واغتشاش حاصل از اجزاء نوسانی جریان بصورت تنشهای برشی موثروفلوهای موثربیان می شوند . با این

---

1. Reverse flow
2. Elliptic eq.
3. Parabolic eq.

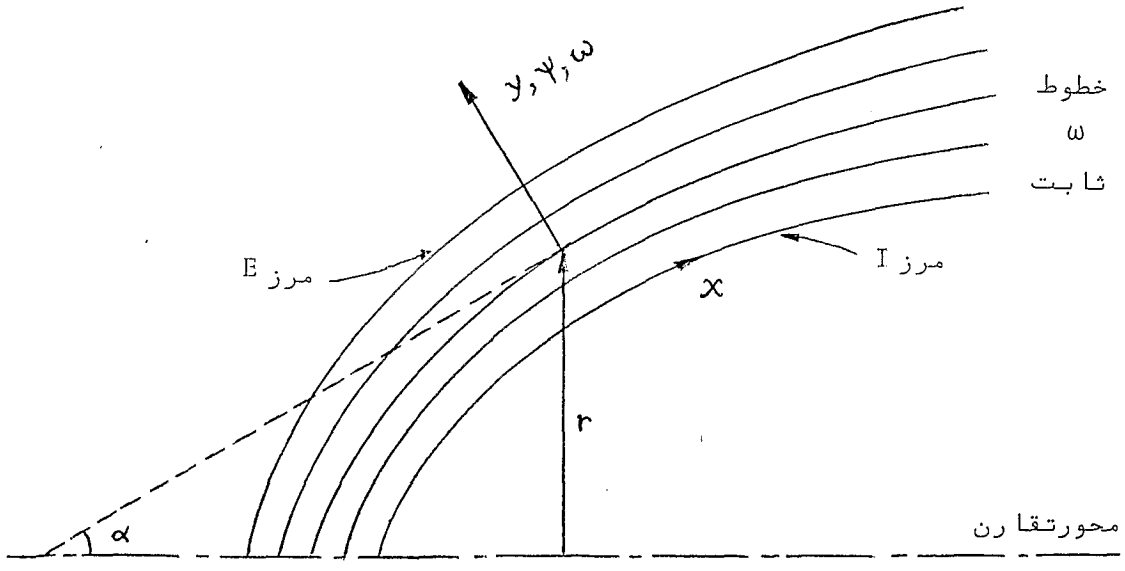
طریق روش حل برای جریان آرام نیزقابل استفاده‌خواهدبود .

محدودیتهای دیگرا عمال شده ، ازاهمیت کمتری برخوردارند . مثلا"فرض کرده‌ایم که‌زاویهٔ حملهٔ خطوط جریان، نسبت به‌محورتقارن بکندی تغییرمی‌کند . همچنین فرض کرده‌ایم که‌نیروهای‌جسم وتشعشع حرارتی قابل صرفنظرمی‌باشند . با فرض این‌محدودیتها می‌توان فشاررا درجهت عمودبرجریان یکنواخت درنظرگرفت .

سیستم مختصات :

شکل ۱–۱ سیستم مختصات موردا ستفاده‌را نشان می‌دهد . میدان جریان را بین دو سطح قراردادی درنظرمی‌گیریم که‌با اندیسهای I (داخلی) و E (خارجی) مشخص می‌شوند . محور x تقریبا" موازی خطوط جریان فرض می‌شود . جهت x با محورتقارن زاویهٔ $\alpha$ می‌سازد، که $\alpha$ خودبا x تغییرمی‌کند . جهت y ازسطح I بطرف خارج وعمودبرمحور y است . فاصله ازمحورتقارن که‌با r نشان داده می‌شود ، درهرنقطهٔ میدان با رابطهٔ زیربدست می‌آید :

$$r = r_I + y \cos \alpha \qquad (۱–۱)$$




شکل ۱–۱ : سیستم مختصات

معادلات لایهٔ مرزی با استفاده از تابع جریان $\psi$ بعنوان یک متغیر عمود بر جریان بیان می‌شوند. طبق تعریف $\psi$ در طول یک خط جریان ثابت است و بنابراین:

$$d\psi \equiv \rho\, u\, r\, dy \quad : \text{Fixed} = \quad (۱-۲)$$

که در اینجا $\rho$ دانسیتهٔ سیال و $u$ سرعت در جهت $x$ است.

معادلات بقاء:

معادلات بقاء در دستگاه مختصات $x \sim \psi$ بصورت زیر در می‌آید:

بقای مومنتم در جهت $x$: (۱-۳)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}(\tau r) - \frac{1}{\rho u}\frac{dp}{dx}$$

بقای جرمی جزء $j$: (۱-۴)
$$\frac{\partial m_j}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \psi}(J_j r) + \frac{R_j}{\rho u}$$

بقای انتالپی سکون: (۱-۵)
$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \psi}\left\{(J_h - u\tau)r\right\}$$

که در این روابط $P$ فشار، $\tau$ تنش برشی موضعی، $m_j$ نسبت جرمی جزء شیمیائی $j$ ام $\left(\frac{\text{kg of } j}{\text{kg mix}}\right)$، $R_j$ نرخ تولید جزء شیمیائی $j$ ام $\left(\frac{\text{kg of } j}{m^3 s}\right)$، $\hat{h}$ انتالپی سکون (کلا" اندیس $h$ مربوط به انتالپی و اندیس $j$ مربوط به جزء شیمیائی $j$ ام است) و $J$ انتشار دیفیوژن در واحد سطح در جهت $y$ $\left(\frac{kg}{m^2 s}\right)$ می‌باشند.

قبل از شروع به حل معادلات بایستی ارتباط بین کمیاتی نظیر $\tau$، $J_j$ و $J_h$ با متغیرهای وابسته مشخص شود. این موضوع در بخش ۴-۱ خواهد آمد. در اینجا بطور مختصر شرایط مرزی و ابتدائی را که در مسائل عملی معمولا" با آنها سروکار داریم، شرح می‌دهیم.

## ۳-۱ : شرایط مرزی و ابتدائی

### پروفیلهای ابتدائی متغیرهای وابسته:

برای حل معادلات سهموی لایهٔ مرزی، ضروری است که مقدار متغیرها را در نقطه‌ای در بالادست میدان مورد نظر بدانیم. این پروفیلهای ابتدائی می‌توانند توسط آزمایش یا

روابط تجربی ویا تقریب وحدس بدست آیند. درلایه‌های مرزی مغشوش، رفتار جریان در پائین دست، معمولا" خیلی نسبت به جزئیات شرایط بالادست حساس نیست واین باعث می‌شود که زیاد روی تهیه‌کردن اطلاعات پروفیلهای ابتدائی وسواس نداشته‌باشیم. با این حال شکل عمدهٔ پروفیلهای ابتدائی، گاهی می‌توانند درجریان واقعی نقش مهمی داشته‌باشند.

شرایط مرزی:

همانطورکه‌قبلا" ذکر شد، میدان جریان با دوسطح مجازی I و E محدودمی‌شود. در عمل، سه‌نوع مرزازاهمیت بالائی برخوردارند:

۱ـ سطح مرزممکن است منطبق بردیوار باشدکه‌ازمرسومترین حالتهای مسائل لایهٔ مرزی است.

۲ـ سطح مرزممکن است ازمجاورت با یک جریان غیرلزج حاصل شودکه‌اصطلاحا" به‌آن مرزآزادگویند. بعنوان مثال لبهٔ‌بیرونی‌جت مغشوش ویا لبهٔ خارجی لایهٔ مرزی روی‌سطح جامد.

۳ـ سطح مرزممکن است منطبق برخط تقارن باشد. بعنوان مثال، خط مرکزی یک جت.

درحالت ۳، گرادیانهای عمودبرخط تقارن صفرهستند. درحالت ۱، سرعت سیال روی دیوارمساوی سرعت دیوار است (شرط عدم لغزش). البته‌اگردیوارمتخلخل باشد، دانستن نرخ انتقال جرم ازدیوارنیزضروری است.

اثرفشار: بدلیل وجودعبارت‌گرادیان فشاردرمعادلهٔ بقای مومنتم، لازم است تغییرات فشاررا نسبت به‌فاصلهٔ x بدانیم. درحالتهای جریان خارجی، معمولا" سرعت در مرزآزادداده‌می‌شود که‌می‌توانیم با استفاده‌ازمعادلات اویلر، گرادیان فشاررا بدست آوریم (با فرض اینکه‌فشاردرجهت y تغییراتی ندارد). اگرجریان داخلی باشد، فشار

نمی‌توانند قبل از حل معادلات لایهٔ مرزی تعیین شود. درنتیجه، فشار نیز بصورت یک مجهول خواهد بود.

## ۱-۴ : روابط کمکی

### روابط ترمودینامیکی :

متغیرهای وابسته وخواص سیال، توسط روابط ترمودینامیکی زیادی بهم مربوط می‌شوند. برای مثال، انتالپی سکون توسط رابطهٔ زیر بیان می‌گردد :

$$\tilde{h} = h + u^2/2 \qquad (۱-۶)$$

که در اینجا h انتالپی ویژه ( انتالپی بر واحد جرم ) است. ما در اینجا از انرژی سینتیک حاصل از حرکت در جهت y صرفنظر کرده‌ایم، همچنین از انرژی سینتیک ذرات نوسانی در جریان مغشوش.

### قوانین تبدیل :

کمیاتی مانند تنش برشی، فلوی دیفیوژن وفلوی حرارتی درمعادلات بقاء ظاهر می‌شوند. اگرما فقط روی جریان لایهٔ مرزی آرام بررسی می‌کردیم، این کمیات می‌توانستند توسط قانون نیوتون برای ویسکوزیته، قانون فیک برای دیفیوژن جرم و قانون فوریه برای هدایت حرارتی بیان شوند. درجریان مغشوش ما برای هرکدام، مقدار موثر تعریف می‌کنیم ودرنتیجه قوانین تبدیل بصورت زیر بیان می‌شوند :

$$\tau = \mu_{eff}(\partial u/\partial y) \qquad (۱-۷)$$

$$J_j = -(\mu_{eff}/\sigma_{j,eff})(\partial m_j/\partial y) \qquad (۱-۸)$$

$$J_h = -(\mu_{eff}/\sigma_{h,eff})(\partial h/\partial y) \qquad (۱-۹)$$

$\sigma_j$ عددا شمیت جریان آرام و $\sigma_h$ عددپرانتل جریان آرام است.

**بیانی برای ویسکوزیتهٔ موثر :**

درجریان آرام، $\mu_{eff} = \mu$ می‌شود و براحتی قابل محاسبه است . درجریان مغشوش ، دانش ما در این رابطه ، ناقص است و این ضعف اصلی تئوری لایه‌مرزی مغشوش است . در اینجا ما توجه عمده را روی فرضیهٔ طول اختلاط پرانتل[1] معطوف می‌داریم . این فرضیه بصورت زیر بیان می‌شود :

$$\mu_{eff} = \rho l^2 |\partial u/\partial y| \qquad (۱-۱۰)$$

که در اینجا ، $l$ طول اختلاط است . برای جریانهای دورازدیواره‌ها ، $l$ معمولا" یکنواخت ومتناسب با ضخامت لایه فرض می‌شود . ثابت تناسب معمولا" بین ۰/۰۷ و ۰/۱ برای انواع مختلف جریان قرار دارد . درنزدیکی دیوار ، $l$ متناسب با فاصلهٔ ازدیواره است . اینچنین تغییرات $l$ نخستین بار بوسیلهٔ هودیموتو[2] [۱] استفاده شد و بوسیله اسکودیر[3] [۱] توسعه یافت . وی تغییرات $l$ را بشکل زیردرنظرگرفت .

$$\begin{aligned} 0 < y \leq \lambda y_1/K \quad &: \quad l = Ky \\ \lambda y_1/K < y \quad &: \quad l = \lambda y_1 \end{aligned} \qquad (۱-۱۱)$$

که در اینجا $\lambda$ و $k$ مقادیر ثابتی بوده و $y$ فاصلهٔ ازدیوار است و $y_1$ یک ضخامت مشخصهٔ لایه است . صحت این روابط ، ازطریق آزمایش نیز تائید شده است . میس و مک دونالد[4] [۱] با آزمایش روی لایه‌های مرزی قابل تراکم نشان دادند که تا عدد ماخ ۵ اثر تراکم پذیری روی طول اختلاط ناچیز است .

یکی از اشکالات این فرضیه اینست که درنقطه‌ای که گرادیان سرعت صفر است ، ویسکوزیتهٔ موثر نیز صفر می‌شود . این امر منتهی به یک نتیجهٔ غیرمعقول می‌شود به این صورت که فلوی حرارتی درنقطه‌ای که گرادیان سرعت صفر است ، صفر می‌شود . این اشکال بخصوص

---

1. Prandtl mixing-length hypothesis
2. Hudimoto
3. Escudier
4. Maise & Mc.Donald