بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

توابع موضعاً لیپ شیتز روی خمینه های ریمانی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا پوریای ولی

استاد مشاور:

دکتر صغری نوبختیان

پژوهشگر:

شیوا فاتحی بروجنی

اسفند ماه ۱۳۸۶

بسمه تعالی

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم شیوا فاتحی بروجنی

تحت عنوان:

توابع موضعاً لیپ شیتز روی خمینه های ریمانی

در تاریخ ...۸۶/۱۲/۱۴..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی.............. به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمدرضا پوریای ولی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر صغری نوبختیان با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر سعید اعظم با مرتبه علمی استاد امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر اعظم اعتماد با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

نون والقلم

حمد و سپاس بی قیاس خدای بی همتارا که به ما نعمت بیان ارزانی داشت و با قلم قدرت خویش، بشریت را به زیور علم و دانش آراست و انسانیت را زیر لوای فرهنگ و ادب تعالی بخشید. پروردگار متعالی که یک لحظه وجود سراسر نقص آفریدگان خویش را به خود وانگذاشته و یک دم از بالندگی علمی و معنوی باز نمی دارد.

اکنون که این پایان نامه به سرانجام رسیده است، می دانم که همه لطف عمیم او بوده که در تمام مراحل، شامل حالم شده است.

تهیه ی این مجموعه را مرهون راهنمایی استاد راهنمایم جناب آقای دکتر پوریای ولی می دانم که در نهایت صبر و شکیبایی و بزرگواری راهنمای ام کردند و در مدتی که افتخار شاگردیشان را داشتم، از ایشان نه تنها درس ریاضی، بلکه درس زندگی آموختم. لذا از حضورشان کمال قدردانی و تشکر را دارم و برایشان آرزوی سلامتی و عمر پربرکت را از درگاه حق مسئلت دارم.

همچنین بر خود لازم می دانم از راهنمایی های سرکار خانم دکتر نوبختیان به عنوان استاد مشاور اینجانب و همین طور استادگران قدرم، جناب آقای دکتر اعظم و سرکار خانم دکتر اعتماد که زحمت داوری این پاین نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر را داشته باشم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ماموری، گرامی و فرهمند در طی تدوین این پایان نامه سپاس گذاری می کنم.

اما به راستی اگر هم دلی و همراهی های خانواده ی عزیزم نبود، موفق به اتمام این پایان نامه نمی شدم. از آنان و از تمامی عزیزانی که همراهیشان سختی راه را برایم هموار کرد بی نهایت متشکرم.

این مجموعه کوچک را تقدیم می‌کنم به :

دریای مهر و صبر، مادرم و پدرم

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم "بردار شبه مماس" بر زیر مجموعه ای از یک خمینه ی باناخ را معرفی می کنیم و آن را در حل برخی مسائل پایایی شار به کار می گیریم. سپس مفاهیمی از قبیل گرادیان تعمیم یافته و مخروط مماس را از فضاهای باناخ به خمینه های باناخ تعمیم داده و از آن در به دست آوردن نتایج اساسی از بهینه سازی مانند قانون ضرایب لاگرانژ تعمیم یافته ی کلارک استفاده می کنیم. پس از آن بر روی مسئله ی وجود ژئودزی با کوتاهترین طول متصل کننده ی دو زیر مجموعه ی بسته از یک خمینه ی ریمانی کامل (در حالت بعد متناهی یا نامتناهی) بحث می کنیم و برای حالت بعد نامتناهی تخمینی از فاصله ی بین این دو ارائه می دهیم.

در ادامه مفاهیم موضعاً لیپ شیتزی و همچنین برخی مفاهیم گرادیان تعمیم یافته را به توابع و فرم های دیفرانسیلی تعریف شده روی خمینه ها گسترش می دهیم و بحث را با نسبت دادن مفاهیم زیرگرادیان لی تعمیم یافته به این توابع و فرم ها و بررسی خواص آنها خاتمه می دهیم.

واژه های کلیدی: بردار شبه مماس، پایایی شار، گرادیان تعمیم یافته، ژئودزی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان صفحه

پیشگفتار

برای بررسی مسائل بهینه سازی توابع نا هموار روی فضاهای نرم دار، گرادیان تعمیم یافته کلارک به عنوان ابزار بسیار مفیدی مورد استفاده قرار می گیرد. از طرف دیگر خمینه ها در حالت کلی فضاهایی غیر خطی اند و به آسانی مسائل بهینه سازی (مسائل تغییراتی) روی آنها یافت می شوند که توابع مطرح شده در آنها نا هموار هستند.

به عنوان نمونه، فرض کنیم S^n ، کره $n-$ بعدی به همراه ساختار معمول یک خمینه ریمانی باشد. قرار دهیم $M = S^{2}, N = S^{1}$. همچنین فرض کنیم γ یک نگاشت هموار از S^{1} به S^{2} باشد و فرم دیفرانسیلی $\omega : TM \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $\omega(v) :=\| v \|$ برای هر $x \in M$ و هر $v \in T_xM$ باشد. نرم اقلیدسی مشتق پذیر نیست، بنابراین ω یک فرم دیفرانسیلی ناهموار روی کلاف مماس TM است. مسائل تغییراتی مختلفی را می توان با کمک طول خم $\int_N \gamma^*\omega = \int \|\dot{\gamma(t)}\| \, dt$ فرمول بندی کرد. با توجه به فقدان مشتق پذیری تابع نرم، نمی توان با اینگونه مسائل با ابزار حساب تغییرات کلاسیک رفتار کرد. تاکنون نتایج کمی برای این گونه مسائل غیر هموار شناخته شده است. همان طور که ذکر شد، یک خمینه در حالت کلی فضای نرم دار و یا حتی فضایی خطی نیست و این خاصیت برای تعریف کلاسیک یک مشتق جهتی و یک زیر گرادیان لازم است. بنابراین برای حل مسائل غیر هموار مانند کار کردن با توابع موضعاً لیپ شیتز بر روی خمینه ها، نیاز به تعمیم این قبیل مفاهیم داریم. در این پایان نامه مسائلی از این قبیل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل است.

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایا و نتایج کلیدی می پردازیم.

در فصل دوم ابتدا مفهوم موضعاً لیپ شیتزی را برای یک تابع با مقدار حقیقی، تعریف شده بر روی خمینه‌ی M، معرفی می کنیم که بر روی یک فضای باناخ مدل بندی شده است و سپس این تعریف را به توابع تعریف شده بین خمینه ها و همچنین به میدان های برداری تعمیم می دهیم. سپس به مفهوم «بردار شبه مماس»[۱] بر یک زیر مجموعه‌ی S از خمینه‌ی M می پردازیم و با استفاده از آن شرایط لازم و کافی بر روی میدان برداری X را به دست می آوریم که S نسبت به X مجموعه ای «موضعاً پایا»[۲] باشد. مباحثی از این دست مسائل «شار — پایایی»[۳] نام دارند. در ادامه‌ی این فصل برخی کاربرد های بردار های شبه مماس را در مسائل بهینه سازی بر روی خمینه ها ذکر می کنیم. به عنوان مثال معادلات معروف اویلر ـ لاگرانژ را با استفاده از این مفهوم به دست آورده و سپس به اثبات قانون ضرایب لاگرانژ برای توابع مشتق پذیر تعریف شده بر روی خمینه ها می پردازیم. در ادامه پا را فراتر نهاده و با حذف فرض مشتق پذیری این قانون را در حالت کلی تری برای توابع موضعاً لیپ شیتز تعریف شده بر روی خمینه های باناخ اثبات می کنیم. ابزار لازم برای انجام چنین کاری گرادیان تعمیم یافته، مخروط مماس و مخروط نرمال هستند که توسط کلارک [۷] بر روی فضاهای باناخ

[۱] $quasi-tangent\ vector$

[۲] $locally\ invariant$

[۳] $flow-invariance$

تعریف شده اند. در این فصل ما با استفاده از دستگاه های مختصی، این مفاهیم را به خمینه ها تعمیم داده و نشان می دهیم که این تعاریف بستگی به دستگاه مختصی نداشته و خوش تعریف اند و به این ترتیب به ابزار بسیار قوی برای مسائل غیر هموار روی خمینه ها دست پیدا می کنیم.

در فصل سوم با استفاده از این ابزار یعنی گرادیان تعمیم یافته‌ی کلارک و مخروط مماس و نرمال بر روی خمینه ها، به بررسی دیگر مسائل بهینه سازی بر روی خمینه های ریمانی کامل[۴] خواهیم پرداخت. از آن جمله مسئله یافتن «ژئودزی با کوتاه ترین طول»[۵] این دو زیر مجموعه‌ی بسته از یک خمینه‌ی ریمانی کامل و متناهی البعد را بیان می کنیم. در ادامه نشان می دهیم که در مورد خمینه های از بعد نامتناهی الزاماً چنین ژئودزی هایی وجود ندارد و در عوض مسئله، به یافتن ژئودزی های «تقریباً» کمین تبدیل می شود. پس از آن به مسائل کلی تری از برنامه ریزی ریاضی بر روی خمینه های ریمانی کامل خواهیم پرداخت و در انتها این فصل را با به دست آوردن تقریبی از فاصله‌ی بین دو زیر مجموعه‌ی بسته از خمینه‌ی کامل و همچنین تعمیم نسخه ای از قضیه‌ی نقطه ثابت بر روی خمینه ها خاتمه می دهیم.

در فصل چهارم ابتدا چند روش را برای مشتق جهتی از یک تابع حقیقی مقدار و موضعاً لیپ شیتز روی یک خمینه توضیح می دهیم و خواص آن ها را ذکر می نماییم. همچنین نشان می دهیم تحت شرایطی خاص، این مشتقات جهتی با یکدیگر معادلند. بعد ار آن مفاهیم اندازه پذیری و همچنین زیر گرادیان تعمیم یافته را برای یک تابع

[۴] *complete Riemannian manifolds*

[۵] *minimal geodesics*

حقیقی مقدار و موضعاً لیپ شیتز تعریف شده بر روی یک خمینه ارائه داده و خواص آنها را اثبات می کنیم. سپس مفهوم موضعاً لیپ شیتزی را به فرم دیفرانسیلی ω نیز تعمیم داده و با استفاده از آن زیر گرادیان تعمیم یافته‌ی $\partial\omega$ را تعریف می کنیم و به بررسی خوش تعریفی تعاریف ذکر شده و همچنین بعضی از خواص این زیر گرادیان می پردازیم. در نهایت مفهوم مشتق لی را که در فصل اول بیان شده است به مفهوم زیر گرادیان لی از یک تابع ناهموار و سپس یک فرم دیفرانسیلی ناهموار گسترش می دهیم و با اثبات فرمول کارتان برای این فرم ها، فصل را به اتمام می رسانیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به ارائه‌ی برخی از تعاریف، قضایا و نتایج شناخته شده درباره خمینه های ریمانی می پردازیم . همچنین با توابعی روی خمینه های ریمانی (با بعد متناهی یا نامتناهی) سروکار داریم. منابع اصلی ما در این بخش، مراجع [۱]، [۷]، [۱۵]، [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] هستند.

۱—۱ خمینه‌ی C^∞ از بعد نامتناهی

فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ باشند و $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ نمایش مجموعه‌ی نگاشت های خطّی پیوسته‌ی $u:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$ باشد. $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ همراه با نرم

$$\|u\| := \sup\{ \ \|u(x)\|_{\mathbb{F}} \ \ , \ \ \|x\|_{\mathbb{E}} \leq ۱ \ \},$$

یک فضای باناخ است، که در آن $\|\ \|_{\mathbb{E}}$ و $\|\ \|_{\mathbb{F}}$ به ترتیب نرمهای روی $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ می باشند.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ فضاهای باناخ و $U \subset \mathbb{E}$ باز باشد، گوئیم نگاشت $f : U \longrightarrow \mathbb{F}$ فرشه دیفرانسیل پذیر یا دیفرانسیل پذیر و یا مشتق پذیر در $x_\circ \in U$ است، هر گاه $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{v \longrightarrow \circ} \frac{\|f(x_\circ + v) - f(x_\circ) - L(v)\|_{\mathbb{F}}}{\|v\|_{\mathbb{E}}} = \circ.$$

به عبارت دیگر، برای هر $\varepsilon > \circ$ ، عددی مانند $\delta(\varepsilon) > \circ$ وجود داشته باشد، به طوری که اگر $\|v\|_{\mathbb{E}} < \delta(\varepsilon)$ آنگاه

$$\|f(x_\circ + v) - f(x_\circ) - L(v)\|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon \|v\|_{\mathbb{E}}.$$

اگر f در تمام نقاط U فرشه دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه گوئیم f روی U از کلاس C° است.

نگاشت خطّی $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ در تعریف فوق را دیفرانسیل f در $x_\circ$ گوئیم و آن را با $df(x_\circ)$ و یا $D(f)_{x_\circ}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ دو فضای باناخ و $U \subset \mathbb{E}$ باز و $f : U \longrightarrow \mathbb{F}$ در هر نقطهٔ $x \in U$ فرشه[1] دیفرانسیل پذیر باشد، گوئیم f روی U از کلاس C^1 است، هرگاه نگاشت $df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ یک نگاشت پیوسته روی U باشد. اگر نگاشت

[1] Frechet

df فرشه دیفرانسیل پذیر روی U باشد، آنگاه می توانیم

$$d^2 f := d(df) : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})) \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{E}, \mathbb{F})$$

را تعریف کنیم که در هر نقطه‌ی $x \in U$، یک نگاشت دو خطّی پیوسته متقارن از $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ به $\mathbb{F}$ است.

f را روی U از کلاس C^2 گوئیم، هرگاه $d^2 f$ روی U پیوسته باشد. به همین ترتیب می توان یک تابع از کلاس C^r یا C^∞ را روی U تعریف کرد.

تعریف ۳.۱ . یک خمینه‌ی توپولوژیکی M ، مدل بندی شده روی فضای باناخ $\mathbb{E}$ ، یک فضای توپولوژیک هاسدورف M است که موضعاً همانریخت با فضای باناخ $\mathbb{E}$ می باشد (ممکن است بعد این فضای باناخ نامتناهی باشد)، یعنی برای هر $p \in M$، یک همسایگی U از p و یک همانریختی $\varphi : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{E}$ وجود داشته باشد.

به جفت (U, φ) دستگاه مختصی یا نقشه [2] گوییم.

تعریف ۴.۱ . دو نقشه‌ی (U, φ) و (V, ψ) را C^∞– سازگار گوییم، هرگاه $U \cap V \neq \emptyset$ ایجاب کند که تابع

$$\psi o \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$

دیفئومورفیسم C^∞ باشد، یعنی این تابع یک به یک، پوشا و به عنوان تابعی از یک زیرمجموعه‌ی باز $\mathbb{E}$ به یک زیرمجموعه‌ی باز $\mathbb{E}$، C^∞ و دارای وارون C^∞ باشد.

[2] Chart

تعریف ۵.۱ . یک ساختار دیفرانسیل پذیر یا C^∞ روی یک خمینه‌ی توپولوژیکی M، یک کلاس $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ از نقشه هاست به طوری که:

۱) $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = M$.

۲) برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$، $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ و (U_β, φ_β) ، C^∞– سازگار باشند.

۳) کلاس $\mathcal{U}$ نسبت به (۲) بیشین باشد ، یعنی اگر (U, φ) یک دستگاه مختصی باشد، به طوری که برای هر $\alpha \in \Lambda$، $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ با (U, φ) سازگار باشد، آنگاه باید داشته باشیم $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$.

تعریف ۶.۱ . یک خمینه‌ی C^∞، یک خمینه‌ی توپولوژیکی با یک ساختار C^∞ روی آن است.

تعریف ۷.۱ . فرض کنید M و N خمینه های C^r $(0 \leq r \leq \infty)$ باشند، تابع $f : M \longrightarrow N$ را از کلاس C^r گوئیم هرگاه، برای هر $x \in M$، دستگاه مختصی (U, φ) شامل x از M و (V, ψ) شامل $f(x)$ از N با شرط $f(U) \subset V$ وجود داشته باشد به قسمی که تابع

$$\hat{f} := \psi o f o \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V),$$

از کلاس C^r باشد.

۱—۲ کلاف برداری و کلاف مماس

تعریف ۸.۱ . فرض کنید M و P خمینه‌های C^∞ یا هموار (مدل بندی شده روی فضاهای باناخ) و $\pi : P \longrightarrow M$ یک تابع C^∞ پوشا باشد، همچنین فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فضای باناخ باشد و $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ پوششی باز برای M باشد به طوری که برای هر $\alpha \in \Lambda$، نگاشت $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}$ وجود داشته باشد و در شرایط زیر صدق کند :

۱) برای هر $\alpha \in \Lambda$ ، نگاشت ϕ_α یک دیفئومورفیسم C^∞ باشد به طوری که با مصور روی U_α جابه جا شود، یعنی نمودار زیر جابه جائی باشد :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{F} \\ & \pi\searrow \quad \swarrow pr_1 & \\ & U_\alpha & \end{array}$$

و برای هر $x \in U_\alpha$ ، $\pi^{-1}(x)$ یک فضای باناخ باشد و $\phi_{\alpha x} := \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$ یک یکریختی از فضای باناخ $\pi^{-1}(x)$ به فضای $\{x\} \times \mathbb{F}$ باشد. به $\pi^{-1}(x)$ تار روی x گوئیم.

۲) برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ ، $\phi_{\beta x} \circ \phi_{\alpha x}^{-1} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ یک یک ریختی و همان ریختی باشد.

۳) اگر $\alpha, \beta \in \Lambda$ ، آنگاه نگاشت

$$x \longmapsto \phi_{\beta x} \circ \phi_{\alpha x}^{-1},$$

یک نگاشت C^∞ از $U_\alpha \cap U_\beta$ به $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ باشد.

در این صورت گوئیم $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ یک پوشش بدیهی سازی[۳] برای π (یا P) و $\{\phi_\alpha\}$ را نگاشت های بدیهی کننده[۴] و $\pi : P \longrightarrow M$ را یک کلاف برداری[۵] گویند. نگاشت های $\phi_{\beta\alpha x} = \phi_{\beta x} \circ \phi_{\alpha x}^{-1}$ را نگاشت های انتقالی[۶] گویند. در حقیقت این نگاشت ها در شرط

$$\phi_{\gamma\beta x} \circ \phi_{\beta\alpha x} = \phi_{\gamma\alpha x},$$

که آن را شرط هم دور[۷] گویند، صدق می کنند.

قضیه ۹.۱ . فرض کنید M یک خمینه‌ی C^∞ و $\pi : P \longrightarrow M$ یک نگاشت پوشا از مجموعه‌ی P بر روی M، همچنین $\{U_\alpha\}$ یک پوشش باز از M ، $\mathbb{F}$ یک فضای باناخ و برای هر α، دوسوئی

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}$$

وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ و هر $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ، نگاشت $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_x$ یک یک ریختی و همان ریختی باشد که در شرط (۳) و همچنین در

[۳] *trivializing covering*

[۴] *trivalizing map*

[۵] *vector bundle*

[۶] *transition map*

[۷] *Cocycle Condition*

شرط هم دور صدق کند. در این صورت یک ساختار C^∞ یکتا روی P وجود دارد به طوری که π یک همانریختی و برای هر $\alpha \in \Lambda$، ϕ_α یک دیفئومورفیسم و $\pi : P \longrightarrow M$ یک کلاف برداری و $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ یک پوشش بدیهی سازی برای π است.

اثبات . به [۱۷] رجوع کنید.

تعریف ۱۰.۱ . فرض کنید M یک خمینه‌ی C^∞ و $p \in M$. یک خم در p یک نگاشت C^1، $c : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ است که در آن I یک فاصله‌ی باز، $0 \in I$ و $c(0) = p$ است.

فرض کنید c_1 و c_2 خم هایی در p باشند و (U, φ) یک دستگاه مختصی شامل p باشد، آنگاه گوئیم c_1 و c_2 در p نسبت به φ بر هم مماسند اگر و تنها اگر

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0).$$

بنابراین دو خم نسبت به φ بر هم مماسند، اگر دارای بردارهای مماس یکسان در دستگاه مختصی φ باشند.

گزاره ۱۱.۱ . فرض کنید c_1 و c_2 دو خم در p باشند. فرض کنید (U_β, φ_β)، $\beta = 1, 2$، دستگاه های مختصی شامل p باشند، آنگاه c_1 و c_2 در p نسبت به φ_1 بر هم مماسند اگر و تنها اگر نسبت به φ_2 بر هم مماس باشند.

اثبات . به [۱] رجوع کنید.

گزاره‌ی بالا می گوید که مماس بودن خم ها در $p \in M$، مستقل از دستگاه مختصی انتخاب شده است. بنابراین گوئیم c_1 و c_2 در $p \in M$ بر هم مماسند اگر c_1 و c_2