دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض-گرایش آنالیز

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

قضایای تکرار ، همگرایی و نقطه ثابت در برخی فضاهای متریک خاص

سهیلا صبوری دودجی

استاد راهنما

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور

دکتر فریبا ارشاد

خرداد ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض-گرایش آنالیز

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

قضایای تکرار ، همگرایی و نقطه ثابت در برخی فضاهای متریک خاص

سهیلا صبوری دودجی

استاد راهنما

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور

دکتر فریبا ارشاد

خرداد ۹۱

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد خانم **سهیلا صبوری دودجی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** به شماره دانشجویی **۸۹۰۰۶۷۷۴۵** با عنوان:

" قضایای تکرار، همگرایی و نقطه ثابت در برخی فضاهای متریک خاص "

با حضور هیات داوران در روز **چهارشنبه** مورخ **۱۳۹۱/۳/۱۷** ساعت **۸ صبح** در محل ساختمان **اندیشه دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ......۱۸/۵......به حروف...هجده و نیم.......... با درجه...عالی.......تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر بهمن یوسفی	راهنما	استاد	پیام نور شیراز	
۲	دکتر فریبا ارشاد	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۰
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی :۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

فرم اصالت اثر

اینجانب **سهیلا صبوری دودجی** دانشجوی ورودی **سال ۸۹** مقطع **کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض – گرایش آنالیز** گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام بدیهی است مسئولیتن تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو سهیلا صبوری

تاریخ و امضاء ۹۱/۲/۱۷

اینجانب **سهیلا صبوری دودجی** دانشجوی ورودی **سال ۸۹** مقطع **کارشناسی ارشد** رشته **ریاضی محض – گرایش آنالیز** گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو سهیلا صبوری

تاریخ و امضاء ۹۱/۲/۱۷

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

تقدیم به

پدر و مادر دلسوز

همسرمهربان

و

عزیزانم مرضیه و محمدرضا

سپاسگزاری

خدایا تو را شکر می‌گویم که یاری‌ام کردی تا قدمی دیگر را برای رشد و تعالی و نزدیک شدن به تو بردارم.

از محضر اساتید گرانقدر بخش ریاضی، بویژه استاد عزیز جناب آقای پروفسور یوسفی که متواضعانه مرا با گوشه‌ای از آسمان علم خود آشنا کردند سپاسگزارم.

چکیده

این رساله شامل چهار فصل می باشد.

در فصل مقدمه، تعاریف و قضایایی را که در فصول بعد به آن ها نیاز است بیان می کنیم.

در فصل دوم، شرایط لازم برای وجود یک جفت نقطه ثابت منحصر به فرد را در فضای متریک مخروطی ذکر خواهیم کرد و قضایای جفت نقطه ثابت منحصر به فرد را برای نگاشت های انقباض-پذیر در فضای متریک مخروطی، بیان و اثبات خواهیم کرد.

در فصل سوم، یک روش تکرار ضمنی جدید را برای تخمین نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی و همچنین تخمین نقاط مشترک ثابت گردایه متناهی نگاشت های غیر انبساطی، بیان می کنیم. سپس با استفاده از این روش تکرار، قضایای همگرایی قوی و ضعیف را در فضای باناخ محدب یکنواخت بیان و اثبات می کنیم.

در فصل چهارم، روش های تکرار را برای تخمین نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی T با شرایط خاص در فضای هیلبرت H،بیان و اثبات می کنیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

کلیات تحقیق

۱. مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل های بعدی موردنیاز است، می پردازیم.

ابتدا رده ای از فضاها را مورد بررسی قرار می دهیم که هم ساختار جبری و هم ساختار توپولوژیک دارند:

تعریف ۱-۱: اگر X یک فضای برداری روی میدان F باشد، آن گاه نیم – ضرب[۱] داخلی روی X،تابعی مانند $u: X \times X \to F$ است به طوری که هر β, α در Fو هر x, y, zدر X در موارد زیر صدق می کنند:

(الف) $u(\alpha x+\beta y, z)=\alpha u(x, z)+\beta u(y, z)$.

(ب) $u(x, \alpha y+\beta z)=\bar{\alpha} u(x, y)+\bar{\beta} u(x, z)$.

(ج) $u(x, x) \geq 0$.

(د) $u(x, y)=\overline{u(y, x)}$.

یک ضرب داخلی روی X،در واقع یک نیم ضرب داخلی است که در شرط زیر نیز صدق می کند:

(ج) اگر $u(x, x)=0$ آنگاه $x=0$.

ضرب داخلی را با نماد $<x, y>=u(x, y)$ نمایش می دهیم.

قضیه **۱-۲:** نامساوی کوشی – بانیا کوفسکی - شوارتز[۲]

اگر $<.,.>$ یک نیم ضرب داخلی روی X باشد، آنگاه برای هر x, y در Xرابطه :

1 - Semi-product
2 - Couachy – Bunyakowasky - Schwarz

$$|<x,y>|^{۲} \leq <x,x><y,y>,$$

برقرار است.علاوه بر این،رابطه بالا به تساوی تبدیل می شود اگر و تنها اگر، اسکالرهای $\beta\ ,\alpha \neq ۰$ وجود داشته باشند به طوری که تساوی:

$$<\beta x+\alpha y, \beta x+\alpha y>=۰,$$

ایجاد شود.

نتیجه **۱-۳:** اگر $<.,.>$ یک نیم ضرب داخلی روی X باشد و $\|x\|=<x,x>^{\frac{۱}{۲}}$ ، آنگاه برای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in F$ داریم :

(الف) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

(ب) $\|\alpha x\| \leq |\alpha|\,\|x\|$.

اگر $<.,.>$ یک ضرب داخلی باشد ،آنگاه :

(پ) $\|x\|=۰$ نتیجه می دهد $x=۰$.

تعریف **۱-۴:** فضای هیلبرت[1]، یک فضای ضرب داخلی مانند H روی میدان F همراه با یک ضرب داخلی مانند $<.,.>$است، به طوری که با توجه به متر $d(x,y)=\|x-y\|$ القا شده توسط نرم، H یک فضای متریک تام[2]باشد.

تعریف **۱-۵ :الف)** همگرایی ضعیف[3]: دنباله $\{x_n\}$ در فضای هیلبرت H همگرای ضعیف به $x \in H$ می باشد اگر به ازای هر $y \in H$:

$$<x_n, y> \to <x,y>.$$

---

1 - Hilbert Space
2 - Complete metric Space
3 - Weakly Convergence

در اینجا منظور از $<.,.>$ ضرب داخلی در فضای هیلبرت می باشد واز این به بعد همگرایی ضعیف را با نماد $x_n \rightharpoonup x$ نمایش می دهیم.

ب)همگرایی قوی[1]:در فضای هیلبرت منظور از همگرایی قوی همان همگرایی در نرم است. یعنی دنباله $\{x_n\}$همگرای قوی به $x \in H$است اگر $n \to \infty$ ، آنگاه $\|x_n - x\| \to 0$.

لم ۱-۶: اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به x باشد، آنگاه همگرای ضعیف به x نیز خواهد بود.

لم ۱-۷: هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در فضای هیلبرت H شامل یک زیردنباله همگرای ضعیف می‌باشد.

لم ۱-۸ : اصل کرانداری یکنواخت[2] نتیجه می دهد هر دنباله همگرای ضعیف، کراندار است.

لم **۱-۹** : اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرای ضعیف به $x_\circ$ باشد، آنگاه:

$$\| x_\circ \| \le \liminf_{n\to\infty} \| x_n \| .$$

لم ۱-۱۰ : اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرایی ضعیف به $x_\circ$ باشد و همچنین :

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = \| x_\circ \|,$$

آن گاه دنباله $\{x_n\}$ ، همگرای قوی است .

لم ۱-۱۱ : در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی مثل فضای اقلیدسی همگرایی قوی و همگرایی ضعیف،یکسان هستند.

برای بررسی بیشتر مطالب بالا می توانید به منبع ([۳۲]) مراجعه کنید.

تعریف ۱-۱۲ : اگر H یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $<.,.>$ و نرم $\|.\|$ باشد،

---

[1] -Strongly convergence
[2] -Principle of uniform boundedness

نگاشت $F: H \to H$ را $\eta-$ قوی یکنوا[1] می نامیم، هر گاه برای هر $x, y \in H$ ،نامساوی،

$$<Fx - Fy, x - y> \;\geq\; \eta \| x - y \|^{۲},$$

که در آن $\eta > ۰$ یک مقدار ثابت است،برقرار باشد.

تعریف ۱-۱۳ : نگاشت $F: H \to H$ را $k-$لیپچیتـژن[2] مـی نـامیم، اگـر ثابـت $k > ۰$ موجـود باشد،به طوری که برای هر $x, y \in H$:

$$\| Fx - Fy \| \;\leq\; k \| x - y \| .$$

تعریف ۱-۱۴ : نگاشت T با دامنه $D(T)$ و برد $R(T)$ را نیم بسته در نقطه P مـی‌گـوییم، اگـر دنباله $\{x_n\}$ در $D(T`)$ همگرای ضعیف به $x^* \in D(T)$ و نیز دنباله $\{Tx_n\}$ در $R(T)$ همگرای قوی به P باشند، آنگاه $Tx^* = P$.

با توجه به این که در فصل سوم این پایان نامه به فضای باناخ پرداخته ایم. بعضـی از تعـاریف را در فضای باناخ به صورت زیر داریم:

تعریف ۱-۱۵: اگر X یک فضـای بـرداری مخـتلط باشـد، یـک نـیم نـرم[3] تـابعی اسـت ماننـد $P: X \to [۰, \infty)$ که خواص زیر را دارا می باشد:

الف) $(x, y) \in X$, $P(x, y) \leq P(x) + P(y)$.

ب) $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

از (الف) نتیجه می شود که $P(۰) = ۰$.

[1] - η -strong monotone
[2] - K- Liptchitzion
[3] - Semi norm

یک نرم، یک نیم نرم[1] P است به طوری که:

ج) اگر $P(x)=0$ آنگاه $x=0$.

معمولا نرم با نماد $\|.\|$ نمایش داده می شود.

اگر X یک فضای نرم دار باشد، آنگاه $d(x,y)=\|x-y\|$، یک متر روی X تعریف می کند.

تعریف ۱-۱۶ : یک فضای نرمدار[2]، زوج مرتبی مانند $(X,\|.\|)$ است، وقتی که X یک فضای برداری است و $\|.\|$ یک نرم روی X است.

یک فضای باناخ[3] یک فضای نرم دار X است که تحت متر $d(x,y)=\|x-y\|$، یک فضای متریک کامل باشد. یعنی در این فضا به ازای هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}$ در X ، عنصری مانند $x\in X$ موجود است به طوری که:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

تعریف ۱-۱۷ : اگر E یک فضای باناخ حقیقی و K زیر مجموعه غیر تهی محدب[4] بسته در E باشد، نگاشت $T:K\to K$ غیرانبساطی[5] نامیده می شود، اگر برای هر $x,y\in K$ داشته باشیم:

$$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|.$$

تعریف ۱-۱۸ : یک فضای باناخ E در شرط اپیال[6] صدق می کند ،اگر برای هر $\{x_n\}\subset E$ با شرط $x_n \rightharpoonup x$ که $x\in E$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n-y\| \quad \forall y\in E, y\neq x.$$

---

1 - Semi norm
2 - Norm Space
3 - Banach Space
4 - Convex
5 - Nonexpansive Mapping
6 - Opial Condition

تعریف ۱-۱۹ : فرض کنید D یک زیرمجموعه بسته از فضای باناخ حقیقی E بوده و نگاشت $T:D\to D$ را در نظر بگیرید:

الف) T را نیم بسته در صفر[1] می گوییم، اگر $\{x_n\}\subset D$ بقسمیکه $x_n \rightharpoonup x_{\circ}$ و $Tx_n\to \circ$ ، آنگاه $Tx_{\circ}=\circ$.

ب) T نیم فشرده[2] است اگر برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}\subset D$ با فرض

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=\circ ،$$

یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ موجود باشد، به طوری که زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ به نقطه ای مانند $x^*\in D$ همگرای قوی[3] باشد.

تعریف۱-۲۰ : فضای محدب یکنواخت[4]،یک فضای برداری نرمدار است که برای هر $\varepsilon>\circ$،مقدار $\delta>\circ$وجود دارد به طوریکه برای هر بردار $x,y\in X$ که $\|x\|=\|y\|=۱$ و $\|x-y\|>۲-\delta$, آنگاه $\|x-y\|<\varepsilon$.

نتیجه۱-۲۱ :یک فضای باناخ X محدب یکنواخت است اگر و فقط اگر، X^* (دوگان[5] X) به طور یکنواخت هموار[6] باشد ([۳۴]).

لم ۱-۲۲ ([۱۳و۱۴]): اگر E فضای باناخ محدب یکنواخت و K زیرمجموعه غیرتهی محدب بسته از E بوده و $T:K\to K$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد، آنگاه $I-T$ نیم بسته در صفر

---
1 - Demiclosed
2 - Semicompact
3 - strong converge
4 - Uniformly convex
5 - Duallity
6 - Uniformly smooth

می‌باشد، که I نگاشت همانی از فضای E است.

لـــم ۱-۲۳ ([۱۵]): E یـک فضـای بانـاخ محـدب یکنواخـت و a و b دو ثابـت بـا شـرایط $0 < a < b < 1$ باشند. همچنین فـرض کنیـد $\{t_n\} \subset [a,b]$ یـک دنبالـه حقیقـی و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در E باشند. اگر

$$\lim_{n\to\infty} \| t_n x_n + (1-t_n) y_n \| = d\,,$$

و $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le d$ وهمچنین، $\lim_{n\to\infty} \| y_n \| \le d$, که در آن $d \ge 0$ یک ثابت است ،آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0\,.$$

در ادامه این فصل، تعدادی از تعاریف و نمادهای استاندارد را در فضای متریک مخروطی [1] بیان می کنیم:

تعریف ۱-۲۴: یک مخروط [2] P، زیر مجموعه ای از فضای باناخ حقیقی است، به طوری که:

الف) P بسته و غیرتهی باشد و $P \ne \{0\}$.

ب) اگر a و b اعداد حقیقی غیر منفی و $x, y \in P$ ، آن گاه $ax + by \in P$.

ج) $P \cap (-P) = \{0\}$ (یعنی اگر $x \in P$ و $-x \in P$ آنگاه $x = 0$).

مخروط P یک رابطه ترتیبی جزئی مانند $\le$ را ، به صورت زیر بر فضای E القا می کند:

$$x \le y \Leftrightarrow y - x \in P\,.$$

توجه کنید $x < y$ اگر و فقط اگر ، $x \le y$ و به علاوه $x \ne y$. همچنین $x << y$ برای حـالتی بـه کار می رود که $y - x$ متعلق به مجموعه نقاط درونی P باشد.

---

1 - Cone Metric
2 - Cone

تعریف ۱–۲۵ : مخروط P نرمال[1] نامیده می شود اگر یک ثابت M با شرایط $M>0$ موجود باشد، به طوری که برای هر $x,y\in P$ و $0\le x\le y$ ،آنگاه

$$\|x\|\le M\|y\|.$$

کوچکترین عدد مثبت M که در این نامساوی صدق می کند ،ثابت نرمال[2] نامیده می شود ([۲]).

مثال ۱–۲۶ : فرض کنید $E=\mathbb{R}^n$ و $P=\{(x_1,x_2,...,x_n):\forall i=1,2,...,n,\ x_i\ge 0\}$، در این صورت P یک مخروط نرمال با درون ناتهی می باشد([31]).

مثال ۱–۲۷ : فرض کنیم $D\subseteq\mathbb{R}^n$ فشرده[3] باشدو $E=C(D)$ (گردایه همه توابع پیوسته بر D) مخروط P را با تعریف،

$$P=\{f\in E: f(x)\ge 0,\ \forall x\in D\},$$

در نظر بگیرید، در این صورت P مخروطی نرمال با درون ناتهی می باشد([31]).

تعریف ۱–۲۸ : مخروط P منتظم[4] نامیده می شود اگر هر دنباله افزایشی (کاهشی) و کراندار از بالا (پایین) درمخروط P ، همگرا درفضای E باشد.

مشخص است که هر مخروط منتظم، نرمال است.

از این به بعد قرارداد می کنیم که P یک مخروط در فضای باناخ حقیقی E بوده و $\le$ رابطه جزیی مرتبی باشد که بوسیله P روی E تعریف شده است.

تعریف ۱– ۲۹: اگر X مجموعه ای ناتهی و دلخواه باشد، در این صورت تابع $d:X\times Y\to E$ که در خواص زیر صدق می کند:

---

[1] - Normal
[2] - Norma Constant
[3] - Compact
[4]- Regular

الف) به ازای هر $x,y\in X$، $d(x,y)\geq 0$ و همچنین $d(x,y)=0$ اگر و تنها اگر، $x=y$.

ب) به ازای هر $x,y\in X$، $d(x,y)=d(y,x)$.

پ) به ازای هر $x,y,z\in X$، $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

را یک متر مخروطی[1] و فضای (X,d) را یک فضای متریک مخروطی[2] می‌نامیم.

مثال ۱-۳۰ : فرض کنید $E=\mathbb{R}^2$ و $X=\mathbb{R}$,

$$P=\{(x,y)\in E \mid x,y\geq 0\},$$

تابع $d:X\times X\to E$ با تعریف:

$$d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|),$$

به ازای هر $x,y\in X$ و $\alpha\geq 0$ در نظر بگیرید، در این صورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی می باشد.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی باشد، در این صورت به تعاریف زیر توجه کنید:

تعریف ۱–۳۱ : دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ در X را همگرا[3] به $x\in X$ می نامیم، هرگاه به ازای هر $C\gg 0$، $n_0\in\mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $n\geq n_0$ ،

$$d(x_n,x)\ll C.$$

تعریف ۱–۳۲ : زیر مجموعه A از X بسته نامیده می شود، اگربرای هر دنباله $\{x_n\}$ در A که به x همگرا باشد، آنگاه $x\in A$.

[1] - Cone Metric
[2] - Cone Metric space
[3] - Converegent

تعریف ۱-۳۳ : دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ را کشی[1] می نامیم، هرگاه به ازای هر $C >> 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد، به طوری که برای هر $m,n \geq n_0$، $d(x_m, x_n) << C$.

تعریف ۱-۳۴ : X را یک فضای مخروطی کامل[2] می نامیم، هرگاه هر دنباله کشـی در آن همگـرا باشد.

تعریف ۱-۳۵ : نگاشت $F : X \to X$ را پیوسته می نامیم، اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X ومقدار $x \in X$ که $x_n \to x$ ، آنگاه $F(x_n) \to F(x)$.

در رابطه با این مباحث، مراجع ([۱]) الی ([۱۲])معرفی می شود.

تعریف ۱-۳۶ : زیر مجموعه A از X را فشـرده دنبالـه ای[3] مـی نـامیم، هرگـاه بـرای هـر دنبالـه $\{x_n\} \subseteq A$، زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود داشته باشد که به عضوی از A همگرا باشد.

نتیجه ۱-۳۷ : هر فضای متریک فشرده دنباله ای ، کامل است.

تعریف ۱-۳۸ : نقطه $x \in X$ را نقطه ثابت[4] نگاشت $T : X \to X$ می نامیم زمانیکه $Tx = x$ باشد.

همچنین مجموعه همه نقاط ثابت Tرا با $F(T)$ یا $Fix(T)$ نشان می دهند.

[1] - Cauchy
[2] - Complete cone metric
[3] - Sequentially Compact
[4] - Fixed point