بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک

گروه فیزیک نظری و اترفیزیک

پایان‌نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی فیزیک نظری

عنوان:

سنجه هندسی درهم‌تنیدگی سیستم‌های کوانتومی بس ذره‌ای وتعمیم اعداداشمیت

عنوان انگلیسی:

Geometric meausre of entanglement and schmitd decomposition of multipartite systems

استاد راهنما:

دکتر محمدعلی جعفری زاده

استاد مشاور:

دکترمحمودمهدیان

پژوهشگر:

راضیه بلواسی

بهمن ۱۳۹۳

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

که هر چه آموختم در مکتب عشق شما عشق شما آموختم و هر چه بکوشم قطره‌ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

امروز، هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

ره آوردی گران سنگ‌تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

بوسه بر دستان پر مهرتان

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

به مصداق ((من لم یشکر المخلوق لم یشکرالخالق)) بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمدعلی جعفری زاده که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر وتشکر نمایم.

معلما مقامت زعرش برتر باد همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

همچنین از پدر و مادر، برادران و خواهران عزیز، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جنابه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان‌نامه درسی را به نحو احسنت به اتمام برسانم؛ سپاسگزاری می‌نمایم.

از آقای دکتر محمود مهدیان برای همراهی و مشاوره در به سر انجام رساندن این پایان‌نامه تشکر می‌نمایم؛ و نیز جا دارد از خانم دکتر رحیمه صوفیانی به خاطر اینکه داوری این پایان-نامه را به عهده گرفتند قدردانی نمایم.

راضیه بلواسی

نام خانوادگی: بلواسی **نام**: راضیه

اساتید راهنما: دکتر محمدعلی جعفری زاده

عنوان پایان نامه:

سنجه هندسی درهم‌تنیدگی سیستم‌های کوانتومی بس ذره‌ای وتعمیم اعداداشمیت

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته**: فیزیک **گرایش**: نظری **دانشگاه**: تبریز

دانشکده: فیزیک **تعداد صفحه**: ۱۰۴

تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۹۳

کلید واژه‌ها: سنجه هندسی درهم‌تنیدگی، اعداد اشمیت ، تبدیلات واحد محلی، عملیات محلی و ارتباطات کلاسیکی، نمایش مایورانا

چکیده:

درهم تنیدگی کوانتومی یکی از مشخصه‌های بارز سیستم‌های کوانتومی بس ذره‌ای است و نقش کلیدی در فیزیک ازجمله محاسبات و اطلاعات کوانتومی دارد. یکی از سنجه‌های درهم‌تنیدگی سیستم‌های کوانتومی دو ذره‌ای اعداد اشمیت و سنجه بس ذره‌ای درهم‌تنیدگی هندسی است.

در این پروژه، ابتدا تجزیه اشمیت را با استفاده از روش تجزیه مقدار منفرد مراتب بالاتر تعمیم دادیم و نشان دادیم که تانسور هسته همان فرم اشمیت حالات کوانتومی خالص بس ذره ای است. ماسنجه‌ی هندسی درهم‌تنیدگی را در پیمایش کوانتومی با استفاده از روش لایه بندی، محاسبه کردیم. برای این منظور یک گراف به نام گراف ستاره در نظر می‌گیریم. این گراف با توجه به انتخاب راس مبدا، دارای دو لایه یا سه لایه است. چندجمله‌های مایورانا را به دست آوردیم و با استفاده از نمایش مایورانا حالات کوانتومی متقارن سه کیوبیتی را دسته‌بندی کردیم. ما از رهیافت نمایش مایورانا، برای محاسبه سنجه هندسی درهم‌تنیدگی گراف مربعی استفاده کردیم و به وسیله نمایش مایورانا سنجه هندسی درهم‌تنیدگی

را در پیمایش کوانتومی روی گراف مربعی حساب کردیم، برای این منظور با استفاده از پیمایش کوانتومی، چند جمله ای مایورانا را برای این گراف محاسبه و سپس ریشه های آن را به دست آوردیم. به جای دسته‌بندی کلاس‌های درهم‌تنیدگی حالات سه کیوبیتی توسط هم‌وردا‌ها آنها را با استفاده از ناورداهای تبدیلات LU دسته‌بندی کردیم. نشان دادیم که ناورداهای تبدیلات $SLOCC$ تنها ناوردهای موجود نیستند وشرط لازم وکافی برای متقارن بودن حالات کوانتومی کیوبیتی را بدست آوردیم. همچنین درهم-تنیدگی حالات متقارن کوانتومی دو و سه کیوبیتی را تحت تبدیلات $SLOCC$ بررسی کردیم.

فهرست مطالب

مقدمه ۲
فصل اول بررسی منابع ۲
فصل ۲: مبانی و روش‌ها ۱۴
۲-۱ مفاهیم کوانتومی ۱۴
۲-۱-۱ بیت کوانتومی ۱۴
۲-۱-۲ ماتریس چگالی ۱۶
۲-۱-۳ جدایی‌پذیری حالات خالص ۱۷
۲-۲ گراف، ماتریس همسایگی ، تکنیک لایه‌بندی ۱۸
۲-۲-۱ گراف ۱۸
۲-۲-۲ گراف کامل ۱۸
۲-۲-۳ گراف ستاره ۱۹
۲-۲-۴ گراف مربعی ۱۹
۲-۲-۵ ماتریس همسایگی ۲۰
۲-۳ پیمایش کوانتومی زمان – پیوسته ۲۱
۲-۴ سنجه هندسی درهم‌تنیدگی ۲۱
۲-۵ تجزیه مقدار منفرد و تعمیم آن به مراتب بالاتر ۲۲
۲-۵-۱ تجزیه مقدار منفرد ۲۳
۲-۵-۲ تجزیه مقدار منفرد و درهم‌تنیدگی دو جزئی حالات خالص کوانتومی ۲۴
۲-۵-۳ تجزیه مقدار منفرد مراتب بالاتر ۲۴
۲-۶ حالات متقارن، نمایش مایورانا ۲۹
۲-۶ -۱ حالات متقارن ۲۹

۲-۶-۲ نمایش مایورانا ۳۰
۲-۷ تبدیلات واحد محلی و عملیات محلی و ارتباطات کلاسیکی ۳۲
۲-۷- ۱ مفهوم تبدیلات LU و $LOCC$ ۳۲
۲-۷ -۲ دستورالعمل کلی محاسبه ناورداهای واحدمحلی حالات خالص ۳۴
۲-۷-۳ محاسبه ناورداهای $SLOCC$ حالت N-کیوبیتی خالص ۴۲
۲-۷-۴ دستورالعمل محاسبه ناورداهای نظیرتبدیلات $SLOCC$..... ۵۲
۲-۷-۵ دسته‌بندی کلاس‌های درهم‌تنیدگی حالات سه کیوبیتی بااستفاده ازهم‌ورداهای نظیر $SLOCC$..... ۵۴
۲-۸ دستورالعمل محاسبه سوپردترمینان ۵۷
فصل۳ بحث و نتایج ۶۰
۳-۱ تعمیم تجزیه اشمیت با استفاده ازروش تجزیه مقدارمنفرد مراتب بالاتر ۶۰
۳-۱-۱ محاسبه فرم استاندارد حالت متقارن سه کیوبیتی با استفاده از $HOSVD$ ۶۱
۳-۱-۲ ارتباط بین ناورداها و ویژه مقادیرماتریس‌های $unfolding$ یک حالت کوانتومی ۶۳
۳-۲ محاسبه درهم‌تنیدگی در پیمایش کوانتومی بااستفاده ازروش لایه‌بندی گراف‌ها برای گراف ستاره دولایه و سه لایه ۶۴
۳-۳ نمایش مایورانا ۷۰
۳-۳-۱ نمایش مایورانای حالات چندکیوبیتی متقارن ۷۰
۳-۳-۲ دسته‌بندی حالات کوانتومی متقارن با استفاده از نمایش مایورانا ۷۲
۳-۳-۳ محاسبه سنجه هندسی درهم‌تنیدگی با استفاده از رهیافت نمایش مایورانا و رهیافت حالات جداپذیر متقارن، در پیمایش کوانتومی روی گراف مربع ۷۵
۳-۴ دسته‌بندی کلاس‌های درهم‌تنیدگی حالات کوانتومی کیوبیتی با استفاده ا ازناورداهای نظیر تبدیلات ۷۹
۳-۵ محاسبه ناورداهای $SL(2,C)$ علاوه برناورداهای تعریف شده موجودوبررسی نقش آنها ۸۱
۳-۶ یکسان بودن ناورداهای حالات کوانتومی۲*۲*۳ تحت تبدیلات $SL(2,C)$ و سوپردترمینان این حالات ۸۷
۳-۷ درهم‌تنیدگی حالات متقارن کوانتومی ۸۸

۳-۷- ۱ دسته بندی کلی ترین حالت متقارن سه کیوبیتی تحت تبدیلات $SL(2,C)$ ۸۸
۳-۷-۲ حفظ درهم تنیدگی حالت متقارن دوکیوبیتی با دوران ضرایب ۹۰
۳-۷-۳ بررسی درهم‌تنیدگی حالات متقارن دو و سه کیوبیت با در نظرگرفتن ضرایب به عنوان مولفه‌های ماتریس دوران ۹۱
بحث و نتایج ۹۸
پیشنهادات ۱۰۱
منابع ۱۰۲

فهرست شکل‌ها و نمودارها

شکل (۲-۱) نمایش هندسی یک کیوبیت ۱۵

شکل(۲-۲) گراف کامل ۱۸

شکل (۲-۳) گراف ستاره ۱۹

شکل (۲-۴) گراف مربع ۱۹

شکل (۲-۵) تجسمی از SVD ۲۴

شکل (۲-۶) یک تانسورمد۳ ..... ۲۵

شکل (۲-۷) تکه‌های تشکیل دهنده یک تانسور ۲۶

شکل (۲-۸) تانسور رتبه یک ۲۷

شکل (۲-۹) جمع تانسورهای رتبه یک ۲۷

نمودار (۳-۱) درهم‌تنیدگی گراف ستاره دو لایه برحسب زمان ۶۸

نمودار (۳-۲) درهم‌تنیدگی گراف ستاره سه لایه برحسب زمان ۷۰

فهرست جداول

جدول (۲-۱) جایگشت‌های مفیدمربوط به ناورداهای حالت کوانتومی سه کیوبیتی ۳۸
جدول (۲-۲) دسته‌بندی درهم‌تنیدگی حالت کوانتومی سه کیوبیتی با استفاده از هم‌ورداها ... ۵۶
جدول (۳-۱) دسته‌بندی درهم‌تنیدگی حالت کوانتومی سه کیوبیتی با استفاده از ناورداهای LU ۸۱

فصل اول

بررسی منابع

فصل اول ۱ بررسی منابع

مقدمه

علم اطلاعات کوانتومی، مطالعه براساس این ایده است که اطلاعات به اثرات کوانتومی در فیزیک وابسته باشد. اگرچه بسیاری از نتایج کوانتومی مشابه با نتایج کلاسیکی آن‌ها است، تفاوت‌های قابل توجه بسیاری بین آن‌ها وجود دارد. درگذشته تصور می‌شد که مکانیک کوانتومی ابزاری برای تمام فرایندهای کلاسیکی است. خود اطلاعات به طور وسیعی در عبارات کلاسیکی بیان می‌شد و مکانیک کوانتوم در کمک به طراحی تجهیزات مورد استفاده برای پردازش اطلاعات، کنترل میزان اطلاعات فرستاده شده، نقش حمایتی داشت. اما اکنون نظریه اطلاعات کوانتومی و پردازش اطلاعات، علاوه بر مزیت‌های دیگر، در رمزنگاری کوانتومی که باعث امنیت در ارسال اطلاعات می‌شود و نیز امید ساخت کامپیوترهای کوانتومی به طور چشمگیری حل مسائل ریاضی را تسریع می‌بخشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این شاهکارهای کوانتومی به خواصی مانند عدم قطعیت، درهم‌تنیدگی و تداخل وابسته است. در سطح بنیادی‌تر، روشن شده است که نظریه اطلاعات بر اساس اصول کوانتومی، نظریه اطلاعات کلاسیکی را کامل می‌کند، همان طور که اعداد مختلط، اعداد حقیقی را کامل می‌کنند. این نظریه شامل تعمیم کوانتومی مفاهیم کلاسیکی مانند منابع، کانال‌ها، کدها، و همچنین تعیین انواع اطلاعات (اطلاعات کلاسیکی و درهم‌تنیدگی کوانتومی) می‌باشد. عملیات کلاسیکی، درهم‌تنیدگی را از بین می‌برد اما عملیات کوانتومی مناسب می-تواند از درهم‌تنیدگی برای اهداف خاص استفاده کند.

تعیین اینکه یک حالت کوانتومی درهم تنیده است یا نه، یک موضوع خیلی مهم و اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی است. برای این منظور ناورداهای حالات، تحت تبدیلات واحد و عملیات واحد و

ارتباطات کلاسیکی که به طور جداگانه روی تک تک ذرات اثر می‌کنند (تبدیلات محلی[۱]) ، نقش اساسی بازی می‌کنند، چون بهترین تمییز را بین انواع مختلف درهم‌تنیدگی ارائه می‌دهند.

در این فصل به بررسی‌های انجام شده در زمینه محاسبه سنجه هندسی درهم‌تنیدگی[۲] برای حالت های سه جزئی و چند جزئی می‌پردازیم که شامل مقالات و یا پایان‌نامه می‌باشد. از طرفی چون برای محاسبه سنجه هندسی درهم‌تنیدگی فرم استاندارد حالات کوانتومی لازم است، منابعی که در این بررسی‌ها فرم استاندارد حالات کوانتومی را محاسبه نموده‌اند معرفی می‌کنیم. چندمنبع درمورد ناورداهای نظیر تبدیلات $SL(2,C)$ [۳] و LU [۴]، چگونگی محاسبه و دسته‌بندی حالات کوانتومی توسط آن‌ها معرفی می‌کنیم. همچنین مراجعی در مورد محاسبه دستورالعمل سوپردترمینان معرفی می‌کنیم.

۱-۱ درهم‌تنیدگی کوانتومی

دانش بشری در حوزه‌های مختلف به سرعت در حال پیشرفت است و نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی یکی از جدیدترین علومی است که با رشد روز افزون، باعث رشد برخی از شاخه‌های دیگر علوم نیز گشته است. با پی بردن به وجود الگوریتم‌های کوانتومی که بسیار سریعتر از الگوریتم‌های کلاسیکی موجود کار می‌کنند اشتیاق عظیمی بین دانشمندان برای کار در مورد نظریه‌ی اطلاعات و محاسبات کوانتومی ایجاد شده است. در این بین نه تنها دانشمندان بصورت نظری انتزاعی کار می‌کنند، بلکه تلاش های زیادی برای یافتن بعضی سیستم‌های فیزیکی که آن‌ها را قادر سازد بعضی از ایده‌های نظریه‌ی اطلاعات و محاسبات کوانتومی را بصورت تجربی امتحان کنند، صورت می‌گیرد.

تعیین همبستگی‌های کوانتومی نقش مهمی در توسعه علم اطلاعات دارد. درهم تنیدگی کوانتومی به عنوان یک نوع از این همبستگی‌ها، یکی از اصول اساسی فیزیک کوانتوم است که در ابتدا توسط

---

۱. *local transformation*
2. *Geometric Measure of Entanglemen*
3. *stochastic local operations and classical communication*
4. *local unitary equivalence*

انیشتین، پودولسکی، روزن[۱] [۱] و شرودینگر[۲] [۲] به عنوان یک پدیده عجیب در مکانیک کوانتوم مطرح شد. با ظهور نظریه اطلاعات کوانتومی، به عنوان یک منبعی که قادر به انجام اموری مانند رمزنگاری کوانتومی [۳] انتقال کوانتومی و ... باشد، به رسمیت شناخته شد.

درهم‌تنیدگی برای توصیف حالتی به کارمی‌رود که در آن ذرات می‌توانند با هم ارتباط داشته باشند. ذراتی مثل فوتون‌ها، الکترون‌ها یا کیوبیت‌ها که با همدیگرتعامل دارند، می‌توانند با همدیگر درهم‌تنیده باشند. دانستن اسپین یکی از ذرات درهم‌تنیده، (اینکه اسپین آن رو به پایین است یا رو به بالا) به ما اجازه می‌دهدکه بدانیم اسپین همبسته‌اش در جهت مخالف است. نکته شگفت‌انگیزتر در این مورد این است که به علت پدیده برهم‌نهی[۳]، قبل از اندازه‌گیری، ذره هیچ جهت مرجعی ندارد بلکه به طور همزمان در هر دو حالت اسپینی بالا و پایین قرار دارد. حالت اسپینی ذره اندازه‌گیری شده در زمان اندازه‌گیری به ذره همبسته‌اش تعیین و ابلاغ می‌کند که به طور همزمان در جهت مخالف اسپین ذره اندازه‌گیری شده قرار بگیرد. درهم‌تنیدگی کوانتومی به کیوبیت‌ها اجازه می‌دهد درحالیکه با فاصله باورنکردنی از هم دور هستند، به صورت آنی با هم ارتباط داشته باشند. مهم نیست که فاصله بین ذرات چقدر بزرگ است، آنها تا زمانی که از محیط اطراف ایزوله هستند، درهم‌تنیده باقی می‌مانند. درهم‌تنیدگی یک پدیده واقعی است (انیشتین آن را عمل شبح‌وار در فاصله[۴] نامیده است.) که بارها و بارها توسط آزمایش‌هانشان داده شده است. در سال ۱۹۹۷ نیکلاس گیسین[۵] و همکارانش دردانشگاه ژنو از فوتون‌های درهم‌تنیده برای فعال کردن ارتباطات با فاصله بیش از هفت مایلی استفاده کردند.

در حال حاضر درهم‌تنیدگی یک منبع فیزیکی کلیدی در تحقق بسیاری از وظایف اطلاعات کوانتومی در نظرگرفته شده است، بنابراین مطالعه کمی و کیفی آن مهم و مهم‌تر می‌شود.

---

۱. *Einstein, Podolsky, Rosen*

۲. *Schrödinger*

۳. *Superposition*

۴. *Spooky action at a distance*

۵. *Nicholas Gisin*

۱-۲ سنجه هندسی درهم‌تنیدگی

بسیاری از سنجه‌های درهم‌تنیدگی برای سیستم‌های کوانتومی دو بخشی و همچنین سیستم‌های چند بخشی ارائه شده‌اند [۴]. محاسبه این سنجه‌ها بسیاردشوار است زیرا تعریف آنها شامل بهینه‌سازی طی حالات کوانتومی مشخص و یا پروتکل اطلاعات کوانتومی[۱] است. در مورد سیستم‌های دوجزئی درهم-تنیدگی به خوبی درک شده‌است، در حالی که در مورد سیستم‌های چند جزئی مقدار درهم‌تنیدگی حالات خالص[۲] یک سوال حیاتی است.

سنجه هندسی درهم‌تنیدگی یکی از مهم‌ترین سنجه های درهم‌تنیدگی سیستم‌های چندجزئی است. آن فاصله یک حالت کوانتومی داده شده از مجموعه حالات جداپذیر[۳]را اندازه‌گیری می‌کند و یک تابع کاهشی از حداکثر همپوشانی پروداکت[۴] حالت کوانتومی است. حداکثر همپوشانی پروداکت یک حالت خالص کوانتومی قدرمطلق ضرب داخلی حالت کوانتومی و نزدیک‌ترین حالت جداپذیر آن است [۵-۸].

سنجه ی هندسی درهم‌تنیدگی یک حالت $|\psi>$ از رابطه زیر

$$E_g(|\psi>)=-\log_2\left\{max_{\{|\varepsilon^{prod}\}}|<\varepsilon^{prod}|\psi>|^2\right\}$$

محاسبه می‌گردد که در آن $\{|\varepsilon^{prod}>\}$ مجموعه همه حالات ضربی (جداپذیر) خالص است که به صورت زیر تعریف شده است.

$$|\varepsilon^{prod}_{N,l}>=\left(\sqrt{\frac{N-l}{N}}|0>+\sqrt{\frac{l}{N}}|1>\right)^{\otimes N}$$

سنجه هندسی نقش مهمی در بررسی مسائل مختلف مربوط به درهم‌تنیدگی ایفا می‌کند. با وجود مفید بودن برای استفاده از سنجه هندسی در نظریه اطلاعات کوانتومی مانعی وجود دارد و آن این است که محاسبه تحلیلی آن برای حالات کلی دشواراست. روش ماکزیمم سازی معمول یک سیستم معادلات غیرخطی تولید می‌کند که به طور کلی غیرقابل حل می‌باشند. بنابراین، توسعه یک روش برای تعمیم

---

1 . quantum information protocols
2 . pure state
3 . product states
4 . maximal product overlap

تجزیه اشمیت سیستم های دو جزئی که با استفاده از تجزیه مقدار منفرد به دست می‌آید مهم است. این تعمیم برای سیستم سه کیوبیت توسط آشین و همکارانش[۱] [۹] انجام شده که نشان داده شده که یک حالت خالص اختیاری را می‌توان بعنوان یک ترکیب خطی از پنج حالت جداپذیر نوشت.که حالت مورد نظرمی‌تواند به صورت یک فرم منحصر به فرد نوشته شود. این منجر می‌شود به فرم استانداردی که تعمیم تجزیه اشمیت[۲] دو کیوبیتی است. این فرم منحصر به فرد توسط پنج پارامتر درهم‌تنیدگی (ثابت‌های مستقل) مشخص شده است. به طور مستقل، کارتریت و همکارانش[۳] یک روش برای حالات خالص سیستم‌های چندجزئی اختیاری تعمیم دادند، که ابعاد فضاهای حالت منفرد، محدود ولی اختیاری است [۱۰].

با این وجود برای حالت کوانتومی داده شده فرم استاندارد واحدی وجو دندارد و همان حالت می‌تواند فرم‌های استاندارد مختلفی داشته باشد. بنابراین مجموعه‌های مختلفی از دامنه‌ها وجود دارد. دلیل آن این است که معادلات ایستا معرف نقاط ایستا[۴]، معادلات غیرخطی هستند و در کل چند نوع حل مختلف دارند. بنابراین سوال این است که کدام مجموعه دامنه‌ها باید بعنوان ضرایب اشمیت و کدام یک باید بعنوان راه‌حل های ریاضی کم اهمیت رفتارکنند. یک معیار باید وجود داشته باشد که ضرایب اشمیت درست را از نادرست را تشخیص دهد و ما به یک چنین معیاری نیاز داریم.

بین لو و همکارانش[۵]، یک روش عملی برای پیداکردن فرم استاندارد حالات درهم‌تنیده چند جزئی با بعد اختیاری ارائه داده‌اند، با گسترش روش توسعه یافته در یکی از آثار اخیر خود، فرم‌های استاندارد برای حالات درهم‌تنیده N-جزئی مخلوط[۶] ساخته‌اند این حالات تقارن واحد محلی را از حالت خالص همتای

---

[1] . *A. Acin, A. Andrianov, E. Jane, and R. Tarrach*
[2] . *generalized Schmidt decomposition*
[3] . *Carteret et al*
[4] . *stationarity equations*
[5] . *Bin Liu et al*
[6] . *mixed state*

خود به ارث برده‌اند. همچنین یک طرح منظم برای بیان تقارن‌های محلی فرم استاندارد ارائه شده است. که یک راه عملی برای تایید هم ارزی واحد محلی دو حالت درهم‌تنیده چند جزئی فراهم می‌کند [۱۱].

اخیرا دو روش قدرتمند برای محاسبه تحلیلی سنجه هندسی درهم‌تنیدگی حالات چند جزئی توسط لئون تامارایان[1] ارائه شد. یک روش برای محاسبه تحلیلی سنجه‌های درهم‌تنیدگی حالات خالص سه کیوبیتی ارائه می‌دهد. روشی که بر این قضیه که بیان می‌کند سنجه درهم‌تنیدگی حالت خالص چند جزئی که به طور مستقیم با عملگر چگالی حالت کاهش یافته بیان شده متکی است. با توجه به این قضیه معادلات جبری برای اندازه‌گیری هندسی درهم‌تنیدگی به دست آمده و در موارد بسیار جالبی به صراحت حل شده‌اند. راه‌حل‌ها یک بیان تحلیلی برای سنجه هندسی درهم‌تنیدگی در طیف گسترده‌ای از سیستم-های سه کیوبیتی می‌دهند [۱۲-۱۶].

از همین روش برای پیداکردن سنجه هندسی درهم‌تنیدگی برای حالات خالص سه کیوبیتی کلی استفاده می‌شود.

اصطلاحات شمای- بسته[2] برای سنجه هندسی درهم‌تنیدگی برای حالات سه کیوبیتی ارائه شده-است که ترکیب خطی از چهار حالت جدا پذیر متعامد هستند. به نظر می‌رسد که سنجه هندسی برای این حالات سه بیان مختلف بسته به محدوده تعریف در فضای پارامتر دارد. هر عبارت از این سنجه تفسیر معنی‌دار هندسی خود را دارد و در نتیجه فضای هیلبرت سه کیوبیت شامل سه ناحیه درهم‌تنیده مختلف است.

یک روش قدرتمند دیگر برای محاسبه تحلیلی سنجه هندسی درهم‌تنیدگی حالات چندجزئی توسعه داده شده است. روش مذکور از مفهوم دوگانگی استفاده می‌کند و یک بیجکش بین حالات کوانتومی که درهم‌تنیدگی بالایی دارند و نزدیک‌ترین حالات جداپذیر ایجادمی‌کند.

---

[1] . *Levon Tamaryan*
[2]. *closed form*

بیجکشن به صراحت سنجه هندسی درهم‌تنیدگی حالات W تعمیم یافته اختیاری از N کیوبیت و دو نقطه بحرانی درهم‌تنیدگی در فضای پارامتر حالت کوانتومی را می‌دهد.

اولین مقداربحرانی مناطق درهم‌تنیده متقارن و نامتقارن از حالاتی که بیشترین درهم‌تنیدگی را دارند جدا می‌کند. در حالی که مقدار دوم حالات که بیشترین وکمترین مقدار درهم‌تنیدگی را دارند از هم جدا می‌کند.

رفتارسنجه هندسی درهم‌تنیدگی حالات W چندکیوبیتی تجزیه و تحلیل شده و فرمول به دست آمده است. ابتدا آن را به مقادیری که در آزمایش‌ها می‌توان برآورد کرد ربط می‌دهد. سپس، یک مثال در مورد اینکه چگونه درهم‌تنیدگی یک حالت کوانتومی با مجهولات بسیار را محاسبه می‌کنند.

تعمیم تجزیه اشمیت حالات خالص سه کیوبیتی، چهار ضریب مثبت و یک ضریب مختلط دارد. برخلاف مورد دو جزئی، آنها اختیاری نیستند و بزرگترین ضریب اشمیت شدیدا ضرایب دیگر را محدود می‌کند. یک نامعادله غیردقیق بین ضرایب اشمیت سه کیوبیت به دست آمده، که بزرگترین ضریب حداقل مرز بالا را برای سه ضریب غیرقطری تعریف می‌کند یا به طور معادل، سه ضریب غیر قطری با هم بزرگترین مرز پایین را برای بزرگترین ضریب تعریف می‌کنند. علاوه براین، وجود نامعادله دیگری که باید یک حد با لا برای ضرایب اشمیت باقی مانده ایجاد کند نشان داده شده است. ما به دنبال روشی هستیم که با استفاده از آن بتوان فرم اشمیت سیستم‌های کوانتومی چندجزئی را تعمیم داد.

۱-۳ تجزیه مقدار منفرد[1]و مراتب بالاتر

در سال ۲۰۱۳ ، *Li, Jun-Li* و همکارش ایده‌هایی در مورد کاربردهای تجزیه مقدار منفرد ماتریس و ارتباط آن با درهم‌تنیدگی حالات کوانتومی دو جزئی، تجزیه مقدارمنفرد مراتب بالاتر[2] و ارتباط آن با

[1] . *Singular Value Decomposition*
[2] . *Higher Order Singular Value Decomposition*

حالات کوانتومی چندجزئی صحبت کردند. و نشان دادند که فرم استاندارد حالات کوانتومی بس ذره‌ای (تعمیم اعداد اشمیت) را با استفاده از تجزیه تانسوری به روش تاکر [۱۷] به دست می‌آوریم[۱۱, ۱۸] .

فرم اشمیت یک حالت کوانتومی دو جزئی به صورت زیر است:

$$|\psi>=\sum_{i=1,j=1}^{I,J} C_{i,j}|i>|j>$$

$C_{i,j}$ اعداد اشمیت حالت $|\psi>$ نامیده می‌شوند.

با تعمیم این رابطه چند جزئی فرم استاندارد را برای حالات کوانتومی چندجزئی به دست می‌آوریم.

بنابراین یک حالت کوانتومی درهم‌تنیده n-جزئی مانند $|\psi>$ ، را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$|\psi>=\sum_{i_1=1,i_2=1,\ ...,i_N=1}^{I_1,I_2,...,I_N} \psi_{i_1,i_2,...,i_N}|i_1>|i_2>...|i_N>$$

که $\psi_{i_1,i_2,...,i_N}\in\mathbb{C}$ ضرایب حالات کوانتومی در پایه‌های نمایش داده شده هستند.

که تانسور هسته فرم استاندارد حالت خالص چند جزئی است و کلاس درهم‌تنیدگی هم‌ارز واحد محلی است. این روش محاسبه فرم استاندارد به خاطر اینکه الگوریتم مشخصی دارد نسبت به روش مقالات دیگر دارد کاربردی تراست.

۱-۴ نمایش مایورانا[1]

سال۱۹۳۲، مایورانا پیشنهاد کرد که یک حالت متقارن با جایگشت کامل از N اسپین $\frac{1}{2}$ ، می‌تواند بوسیله N اسپینور که بصورت هندسی متناظر با N نقطه‌ی روی کره بلوخ هستند، نمایش داده شود. (نمایش حالات چند کیوبیتی براساس N کیوبیت (اسپینور) ، نمایش مایورانا نامیده می‌شود). چند دهه بعد از پیشنهاد او، نمایش مایورانا علاقه‌مندی‌های بسیاری در ارتباط آن با درهم‌تنیدگی بس ذره‌ای برانگیخته است.

مایورانا پیشنهاد کرد که یک حالت کوانتومی خالص اسپین $j=\frac{N}{2}$ می‌تواند به صورت ترکیب متقارن از N اسپینور نشان داده شود:

$$|\psi_{sym}>=N\sum_P \hat{P}\ \{|\epsilon_1,\epsilon_2,...\epsilon_N>|\}$$

[1] . *Majorana representation*