دوالیتی و محاسبه‌ی کارایی در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق

توسط

مجتبی مصطفایی ملکشاه

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

زیر نظر

دکتر غلامرضا جهانشاهلو
دکتر سعید محرابیان

شهریور ۱۳۹۰

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

پردیس کرج

تقدیر و تشکر

از زحمات استاد عزیزم، جناب آقای دکتر غلامرضا جهانشاهلو که بهره‌های زیادی از ایشان در زمینه‌های علمی و اجتماعی برده‌ام و همچنین از جناب آقای دکتر سعید محرابیان که در این پایان‌نامه از رهنمودهای ایشان استفاده کرده‌ام، تشکر می‌کنم. همچنین از جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و داور داخلی این پایان‌نامه بودند، کمال تشکر را دارم. از آقای دکتر فرهاد حسین زاده لطفی هم که داور خارجی بودند، تشکر می‌نمایم. از آقایان محمود مهدیلوزاد، سلمان عباسیان نقنه، اسلام مرادی و حسن عسکری که از کمک هایشان در تدوین پایان‌نامه بهره برده‌ام، کمال تشکر را دارم. همچنین از آقای مجید محمدزاده که در ویرایش این پایان‌نامه راهنمایی‌ام کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

چکیده

این پایان‌نامه با کاربرد داده‌های نادقیق در تحلیل پوششی داده‌ها(DEA) سروکار دارد. داده‌های نادقیق بدین معنی است که بعضی داده‌ها فقط در دامنه‌ای که مقادیر موردنظر درون کران‌های تعیین شده قرار دارند مشخص شده‌اند در حالی‌که داده‌های دیگر فقط برحسب رابطه‌های ترتیبی مشخص شده‌اند. تحلیل پوششی داده‌های نادقیق ($IDEA$) اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده برای داده‌های ورودی و یا خروجی که نادقیق هستند، ایجاد کرده است. در این‌جا، دو استراتژی مجزای رسیدن به یک کران بالا و پایین کارایی واحد تصمیم گیرنده‌ای که دارای داده‌های نادقیق است را مطرح می‌کنیم. استراتژی خوش بینانه، بهترین نمره‌ی کارایی میان نمره‌های کارایی ممکن و استراتژی محافظه‌کار، بدترین نمره‌ی کارایی را به‌دست می‌آورد. همچنین، از آن‌جایی که در DEA جفتی از مدل‌های پرایمال و دوال داریم (که مدل‌های پوششی و مضربی نیز گفته می‌شوند)، به‌طور اساسی می‌توانیم دو مدل $IDEA$ در نظر بگیریم: یکی ورود داده‌های نادقیق به مدل پوششی و دیگری ورود داده‌های نادقیق یکسان در مدل مضربی. بنابراین رابطه‌های بین دو مدل اخیر و چگونگی حل آن‌ها، موضوعاتی با اهمیت هستند. هدف دیگر این پایان‌نامه، نمایش جنبه‌های محاسباتی کران‌های کارایی و چگونگی تعبیر جواب‌های کارایی است. روش محاسباتی ایجاد شده در این‌جا، روش قبلی $IDEA$ را با داخل کردن فرم کلی‌تر داده‌های ترتیبی اکید و ترتیب‌های جزئی در چارچوب آن،به‌طور مؤثری تعمیم می‌دهد که بعضی اشکالات روش قبلی را برطرف می‌کند.

واژه‌های کلیدی: *تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های نادقیق، کران‌های کارایی، رده‌بندی کارایی، دوالیتی، ارزیابی کارایی، ماکسیمم ستونی.*

رده بندی موضوعی ریاضیات ۲۰۱۰: $90C46$, $90C05$.

پیشگفتار

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ابزاری مفید برای تشخیص کارایی یا سودمندی سازمان‌ها ارائه می‌دهد که در عمل، در تصمیم‌های مدیریتی بسیار مهم است. در DEA فرض بر این است که داده‌های ورودی و خروجی به‌طور دقیق داده شده‌اند. از ویژگی‌های اصلی DEA، حساس بودن نسبت به داده‌ها می‌باشد. یعنی عدم دقت در جمع آوری داده‌ها، باعث به‌دست آمدن نتایج نادرستی می‌گردد. اما در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، داده‌های دقیق در اختیار نیستند. به‌عنوان مثال سطح رضایت مشتری یا سطح مهارت کارگران که ممکن است به‌صورت داده‌های کران‌دار داده شوند. همچنین ترتیب کیفیت عملکرد واحدهای یک سازمان که به‌صورت داده‌های ترتیبی ارائه می‌شوند. به این داده‌های ترتیبی و کران‌دار، داده‌های نادقیق گفته می‌شود. برای بررسی کردن این نوع داده‌ها در تصمیم‌های مدیریتی، تحلیل پوششی داده‌های نادقیق ($IDEA$) مطرح شد که در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم.

در فصل اول، تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی DEA، شامل چگونگی پیدایش تحلیل پوششی داده‌ها و انواع مدل‌های مطرح در آن را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، تبدیل برنامه‌ریزی‌های غیرخطی DEA در مدل‌های $IDEA$ و $AR-IDEA$ به معادل‌های برنامه‌ریزی خطی مطرح شده است. برای این کار از نرمال کردن و تکنیک تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. البته ابتدا فرض بر این است که حداقل یک DMU با مقداری وجود دارد که در ستون داده‌های ورودی یا خروجی متناظر،ماکسیمم است. در صورتی که چنین DMUیی موجود نباشد، با تولید متغیری مجازی، این امر را ممکن می‌سازیم.

در فصل سوم، با توجه به این‌که در مطالعات قبلی $IDEA$، ارزیابی در بهترین حالت برای داده‌های نادقیق مطرح شده بود، لازم است شیوه‌ی مدل بندی دیگر ارزیابی DMU در بدترین حالت برای داده‌های نادقیق طراحی شود. بنابراین یک کران بالا و پایین کارایی ایجاد می‌کنیم. این مطلب ما را به طرح دسته‌بندی سه گروهی می‌رساند که دارای جزئیات بیشتری نسبت به افراز دو گروهی قبلی (کارا و ناکارا) است. البته این دسته‌بندی در حالت داده‌های کران‌دار، پیش از این صورت گرفته بود. ولی در این‌جا، هر ترکیبی از داده‌های کران‌دار و ترتیبی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم، به بررسی نظریه‌ی دوالیتی برای مدل $IDEA$ می‌پردازیم. در DEA معمولی، جفتی از مدل‌های پرایمال و دوال داریم که به آن‌ها مدل‌های مضربی و پوششی نیز گفته می‌شود. این مدل‌ها براساس قضیه‌ی دوالیتی برنامه‌ریزی خطی، نتایج یکسان تولید می‌کنند. حال اگر داده‌های نادقیق در DEA وارد شوند، می‌توانیم دو مدل

$IDEA$ را در نظر بگیریم: یکی وارد کردن داده‌های نادقیق به مدل پوششی و دیگری ورود داده‌های نادقیق یکسان به مدل مضربی. با توجه به این‌که ورودی‌ها و خروجی‌ها متغیر هستند، اندازه‌ی متغیر روی کارایی حاصل می‌شود. پیش از این، چند روش در به‌دست آوردن کران بالا و پایین کارایی ارائه شده است که همگی براساس مدل $IDEA$ مضربی بودند و چگونگی حل مدل $IDEA$ پوششی را در نظر نگرفته‌اند. نشان خواهیم داد که مدل $IDEA$ مضربی یک کران بالا و مدل $IDEA$ پوششی یک کران پایین روی کارایی را تولید می‌کنند. روش‌های قبلی از داده‌های ترتیبی اکید و مقدار ε غیر ارشمیدسی آسیب پذیر بودند. چگونگی تعبیر کارایی حاصل نیز مهم است. تعبیرها در DEA معمولی، وقتی داده‌های نادقیق در DEA وارد می‌شوند، ممکن است تغییر کنند، زیرا به شدت روی نوع یا ماهیت داده‌های نادقیق وابسته هستند.

مقاله‌های زیر در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

[1] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G., 2001. IDEA (imprecise data envelopment analysis) with CMDs (column maximum decision making units). *Journal of the Operational Research Society* 52, 176 − 181.

[2] Park, K.S., 2007. Efficiency bounds and efficiency classifications in DEA with imprecise data. *Journal of the Operational Research Society* 58, 533 − 540.

[3] Park, K.S., 2010. Duality, efficiency computations and interpretations in imprecise DEA. *European Journal of Operational Research* 200, 289 − 296.

فهرست مطالب

۱ **تعـاریف و مفـاهیـم اولیـه DEA** ۱

۱.۱ مقدمه . . . ۲

۲.۱ واحد تصمیم گیرنده . . . ۳

۳.۱ کارایی . . . ۳

۴.۱ تحـلیل پوششـی داده‌ها(DEA) . . . ۴

۵.۱ مجـموعه‌ی امکان تولید(PPS) . . . ۵

۶.۱ مدل CCR . . . ۶

۷.۱ مدل BCC . . . ۱۷

۸.۱ مدل جمعی . . . ۲۲

۹.۱ مدل SBM . . . ۲۳

۱۰.۱ مدل $BCC-CCR$ . . . ۲۵

۱۱.۱ مدل $CCR-BCC$ . . . ۲۶

۲ **تحلیل پوششی داده‌های نادقیق با CMDها** ۲۷

۱.۲ مقدمه . . . ۲۸

۲.۲ مدل $AR-IDEA$ . . . ۲۹

۳.۲ تبدیل به معادل‌های برنامه‌ریزی خطی . . . ۳۰

۴.۲ مثال عددی ۳۵
۵.۲ تعمیم ۳۸
۶.۲ نتیجه ۴۱

۳ کران‌های کارایی و رده‌بندی کارایی در$IDEA$ ۴۳
۱.۳ مقدمه ۴۴
۲.۳ مدل $IDEA$ ۴۶
۳.۳ ایده‌های طرح ریزی جدید ۴۸
۴.۳ روش‌های محاسباتی ۵۲
۵.۳ مثال عددی ۵۶
۶.۳ نتیجه ۶۲

۴ دوالیتی و محاسبه‌ی کارایی در $IDEA$ ۶۴
۱.۴ مقدمه ۶۵
۲.۴ مدل‌های $IDEA$ مضربی و پوششی ۶۷
۳.۴ دو روش متمایز ۶۹
۴.۴ نتایج دوالیتی ۷۱
۵.۴ جنبه‌های محاسباتی ۷۹
۱.۵.۴ رابطه‌های ترتیبی اکید ۷۹
۲.۵.۴ روش ۸۱
۳.۵.۴ مثال عددی ۸۶
۴.۵.۴ مقایسه با روش‌های قبلی ۸۹
۶.۴ تعبیر کارایی ۹۱
۷.۴ نتیجه ۹۲
مراجع ۹۴

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۰
واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۲
نمایه ۱۰۴

فصل ۱

تعـاریف و مفاهیـم اولیـه DEA

۱.۱ مقدمه

به‌منظور ارزیابی عملکرد واحدها و بخش‌ها، فعالیت‌های علمی زیادی صورت گرفته است.مسلماً رابطه‌ی عملکرد با عوامل تأثیرگذار، تابعی به صورت $Y = (U, V)$ است که در آن ورودی (U, V)، خروجیY را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت عوامل قابل کنترل (U) و عوامل غیرقابل کنترل (V) تشکیل شده است.

تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها،ماکسیمم خروجی را می‌دهد. این تابع در علم اقتصاد از اهمیت بسیاری برخوردار است. زیرا با داشتن آن می‌توان مشخص کرد که یك واحد خوب عمل می‌کند یا نه. به‌علت پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقدار بودن تابع تولید، تابع تولید در دسترس نیست. در روش‌های پارامتری با استفاده از یك سری مشاهدات و داده‌ها سعی می‌کنند این تابع را تخمین بزنند. برای این منظور از فرآیند برازش منحنی استفاده می‌شود. ولی به‌دست آوردن تابع تولید با استفاده از این فرآیند ایراداتی دارد که در زیر به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱) روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌طور دلخواه در نظر گرفته می‌شود. مثلاً رابطه‌ی $Q = x_0 A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_n^{x_n}$ در اقتصاد را برای تابع تولید در نظر می‌گیرند، که در آن $A_1, A_2, \dots, A_n$ ورودی‌ها، Q خروجی و $x_1, x_2, \dots, x_n$ پارامترهای تابع‌اند، که باید تعیین شوند.

۲) اگر بعد بردار خروجی بیش از یك باشد، این روش را نمی‌توان به‌کار برد و برای مسائلی به‌کار می‌رود که فقط یك خروجی دارند.

۳) منحنی به‌دست آمده، تمایل مرکزی دارد و باید به‌گونه‌ای آن را برطرف کرد.

عیوب فوق اساسی ترین ایرادات روش پارامتری بود، لذا در سال۱۹۵۷ فارل[۱]، روش غیر پارامتری را ارائه کرد که اساس کار چارنز[۲]، کوپر[۳] و رودز[۴] بود و در ادامه به آن می‌پردازیم.

---

[۱] Farrell
[۲] Charnes
[۳] Cooper
[۴] Rohds

۲.۱ واحد تصمیم گیرنده

منظور از واحد تصمیم گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1, \ldots, x_m)$ بردار خروجی $(y_1, \ldots, y_s)$ را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم گیرنده‌ی متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌کنند. مانند شعب یك بانك، کارخانجات یك شرکت خاص یا ادارات یك سازمان دولتی.

فرض کنیم n واحد تصمیم گیرنده داریم که با $(j = 1, \ldots, n)DMU_j = (x_j, y_j)$ نشان خواهیم داد. به طوری‌که $x_j \in \mathbb{R}^m$، $x_j \geq 0$و $x_j \neq 0$ $(j = 1. \ldots, n)$نشان دهنده‌ی بردار ورودی و $y_j \in \mathbb{R}^s$، $y_j \geq 0$و $y_j \neq 0$ $(j = 1. \ldots, n)$ نشان دهنده‌ی بردار خروجی است.

$(0 \in \{1, \ldots, n\})DMU_0$ نشان دهنده‌ی واحد تحت ارزیابی بوده و نماد (*) نشان دهنده‌ی مقدار بهینه بودن متغیر است. ماتریس ورودی X ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ورودی DMU_jها، $(j = 1, \ldots, n)$ تشکیل داده است، یعنی $X = [x_1, \ldots, x_n]$ و به‌طور مشابه ماتریس خروجیYبه‌صورت $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ درنظر گرفته می‌شود.

۳.۱ کارایی

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به‌صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود:

ورودی/خروجی=کارایی

کارایی مطلق یک DMU مقایسه‌ی عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

چون استانداردهای کلی معمولاً تعریف نشده و در صورت تعریف شدن، رسیدن به آن مشکل است، لذا کاربرد کارایی نسبی گسترده‌تر از کاربرد کارایی مطلق است.

اگر واحد تصمیم گیرنده‌ی موردنظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، با استفاده از رابطه‌ی فوق، کارایی آن قابل محاسبه بوده و اندازه‌ی حاصل، کارایی مطلق آن واحد به‌شمار می‌آید.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم گیرنده‌ی مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی به‌صورت

$$E_0 = \frac{u_1 y_{10} + \ldots + u_1 y_{s0}}{v_1 x_{10} + \ldots + v_m x_{m0}}. \qquad (۱.۱)$$

کارایی آن واحد را اندازه‌گیری می کند، که در آن u_r قیمت خروجیrام یعنی y_r $(r = 1, \ldots, s)$ و v_i هزینه‌ی ورودی iام یعنی $x_i$$(i = 1, \ldots, m)$ است. کارایی فوق به کارایی اقتصادی معروف است. قابل ذکر است که تخصیص وزن‌های مناسب به ورودی‌ها و خروجی‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در اندازه‌ی کارایی دارد.

کارایی نسبی، از تقسیم اندازه‌ی کارایی هر واحد به بزرگترین آن‌ها حاصل می‌شود. بنابراین اندازه‌ی کارایی هر واحد، همواره کوچکتر یا مساوی یک بوده و حداقل یک واحد کارایی نسبی برابر یک دارد. به‌طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده‌ی o به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$RE_0 = \frac{E_0}{max_j E_j}. \qquad (۱.۲)$$

۴.۱ تحـــلیل پوششـی داده‌ها(DEA)

تحلیـل پوششی داده‌ها (DEA)، شامل تکنیـک‌ها و روش‌هایـی بـرای ارزیـابی کارایی و یا سنـجش بـهره‌وری واحـدهای تصمیم گیرنده است.

DEA در واقع تعمیم کار فارل در ابداع اولین روش غیر پارامتری است. فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم گیرنده و اصول حاکم بر آن‌ها، مجموعه‌ای با عنوان مجموعه‌ی امکان تولید، ارائه و قسمتی از مرز آن را به‌عنوان تابع تولید معرفی نمود. این مرز را مرز کارا نیز می‌نامند و واحدهای تصمیم گیرنده‌ای که روی این مرز قرار می‌گیرند، کارا ارزیابی می‌شوند.

از آنجایی‌که DEA، تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه‌ی واحدها در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها از ویژگی پوششی بودن، منشأ گرفته است. این روش در مقایسه با روش‌های قبلی دارای مزیت‌هایی است که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

در روش‌های DEA بر خلاف برخی روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم نیست. همچنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل تعیین شده (مانند روش‌های رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی روش‌های پارامتری) ندارند.

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه‌ی واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌کند. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه‌ی جبرخطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوگانی استفاده کند و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و خروجی مشخص کند.

DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل گر و تصمیم گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

۵.۱ مجموعه‌ی امکان تولید(PPS)

مجموعه‌ی فعالیت‌های شدنی، مجموعه‌ی امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T=\Big\{(x,y)\in R^{m+s}: \text{بردار خروجی } y\geq 0 \text{ بتواند به‌وسیله‌ی بردار ورودی } x\geq 0 \text{ تولید شود}\Big\}$$

مدل‌های DEA هر کدام به یك مجموعه‌ی امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه‌ی امکان تولید نیز به‌طور یکتا، توسط یك مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود. برای معرفی مدل‌ها، از اصول زیر روی مجموعه‌ی امکان تولید T استفاده می‌شود:

اصل۱ (شمول مشاهدات) همه فعالیت‌های مشاهده شده، یعنی $(x_j,y_j)=DMU_j(j=1,\ldots,n)$، به T تعلق دارند. این بدیهی‌ترین اصلی است که رویT تحمیل شده و همه‌ی مدل‌های DEA این اصل را دارا هستند.

اصل۲ (تحدب) اگر $(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in T$ آن‌گاه برای هر $\lambda\in[0,1]$، $(\lambda x+(1-\lambda)\bar{x},\lambda y+(1-\lambda)\bar{y})\in T$.

یا به صورت نمادین:

$$\forall (x,y),(\bar{x},\bar{y})\in T\ ,\ \forall\lambda\in[0,1]\ ;\ (\lambda x+(1-\lambda)\bar{x},\lambda y+(1-\lambda)\bar{y})\in T.$$

به عبارت دیگر T یک مجموعه‌ی محدب است.

اصل۳ (بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت) به ازای هر $(x,y) \in T$ و هر $\lambda \geq 0$، داریم $(\lambda x, \lambda y) \in T$، یا به صورت نمادین:

$$\forall (x,y) \in T\ ,\ \forall \lambda \geq 0\ ;\ (\lambda x, \lambda y) \in T.$$

اصل۴ (امکان‌پذیری) اگر $(\bar{x},\bar{y}) \in T$ و $x \geq \bar{x}$، آن‌گاه $(x,\bar{y}) \in T$ و اگر $y \leq \bar{y}$، آن‌گاه $(\bar{x},y) \in T$، یا به صورت نمادین:

$$\forall (\bar{x},\bar{y}) \in T, \begin{cases} \forall x;\ \ x \geq \bar{x} \Longrightarrow (x,\bar{y}) \in T, \\ \forall y;\ \ y \leq \bar{y} \Longrightarrow (\bar{x},y) \in T. \end{cases}$$

این اصل بیان می‌کند که اگر خروجی $\bar{y}$ توسط $\bar{x}$ تولید شود، آن‌گاه همین خروجی توسط هر ورودی بزرگتر از $\bar{y}$ نیز می‌تواند تولید شود و همچنین هر خروجی کمتر از $\bar{y}$ نیز می‌تواند توسط ورودی $\bar{x}$ تولید شود.

اصل۵ (کمینه درون‌یابی) T اشتراک همه‌ی مجموعه‌هایی مانند T است که در اصل ۱ و بعضی از اصول فوق صدق می‌کند.

۶.۱ مدل CCR

این مدل، اولین مدل DEA برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز [۹]، ارائه شد.

قضیه ۶.۱.۱. [۴۴] *یك مجموعه‌ی منحصر به فرد وجود دارد که در اصول ۱ تا ۵ صدق می‌کند. این مجموعه به‌صورت زیر است:*

$$T_{CCR} = \Big\{(x,y) : x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\ ,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\ ,\ \lambda_j \geq 0 (j=1,\ldots,n)\Big\}.$$

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (x,y) یافت نشود که غالب بر(x_0,y_0) باشد، یعنی هیچ(x,y) یافت نشود که $(-x,y) \geq (-x_0,y_0)$ و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار باشد، آن‌گاه گوییم که (x_0,y_0)

کارای نسبی است. در غیر این صورت ناکارا می‌باشد.

اگر یکی از حالات زیر رخ دهد آن‌گاه به وضوح (x_0, y_0) ناکارا خواهد بود:

۱)اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_0، خروجی بیشتر یا مساوی y_0 داشته باشد.

۲) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با خروجی بیشتر از y_0، ورودی کمتر یا مساوی x_0 داشته باشد.

۳) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_0، خروجی بیشتر از y_0 داشته باشد.

حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \theta \\
&s.t. \quad (\theta x_0, y_0) \in T_{CCR}.
\end{aligned} \tag{۱.۳}
$$

با توجه به قضیه‌ی ۶.۱.۱ و اصل شهودی تجرید و از این‌که $(\theta x_0, y_0) \in T_{CCR}$، مدل (۱.۳)، به مدل (۱.۴) تبدیل می‌شود. مدل (۱.۴)، که به مدل CCR در فرم پوششی[۵] با ماهیت ورودی[۶] معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه‌ی متناهی دارد و جواب بهین در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \theta \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_0, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_0, \\
&\qquad \lambda_j \geq 0 \ , \ \ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{۱.۴}
$$

شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که $\theta^* = 1$. زیرا $\theta^* = 1$ ، به این معنی است که امکان کاهش متناسب در همه‌ی ورودی‌های DMU_0، در مجموعه‌ی امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد.

ولی این شرط کافی نیست، زیرا در این حالت اگر امکان کاهش بعضی از ورودی‌ها یا افزایش بعضی از خروجی‌های

[۵] Envelopment form
[۶] Input oriented

DMU_0، به‌صورت نامتناسب در مجموعه‌ی امکان تولید T_{CCR}، وجود داشته باشد، DMU_0 کارای ضعیف[۷] نامیده می‌شود. ولی اگر $\theta^* = 1$ و امکان کاهش در هیچ یك از ورودی‌ها و افزایش در هیچ یك از خروجی‌ها در مجموعه‌ی امکان تولید T_{CCR}، وجود نداشته باشد، آن‌گاه DMU_0، کارای قوی[۸] نامیده می‌شود. اگر $\theta^* < 1$، آن‌گاه DMU_0، ناکارا در ماهیت ورودی است و $(1 - \theta^*)$ مقدار ناکارایی تکنیکی [۹] در ماهیت ورودی است.

حالت دوم به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \quad \varphi \\ &s.t. \quad (x_0, \varphi y_0) \in T_{CCR}. \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

که با توجه به قضیه‌ی ۶.۱.۱ و اصل شهودی تجرید و از این‌که $(x_0, \varphi y_0) \in T_{CCR}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\max \quad \varphi \\ &s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \leq x_0, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \geq \varphi y_0, \\ &\qquad \mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{۱.۶}$$

مدل (۱.۶) می‌کوشد خروجی‌های DMU_0 را به‌طور متناسب ماکسیمم کند و به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت خروجی[۱۰] معروف است.

مدل (۱.۶) همواره شدنی است و جواب بهین در شرط $\varphi^* \geq 1$ صدق می‌کند. اگر $\varphi^* = 1$، آن‌گاه DMU_0 کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است. اگر $\varphi^* > 1$ آن‌گاه DMU_0، ناکارا در ماهیت خروجی است و $\frac{1}{\varphi^*}$ نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی تکنیکی DMU_0 در ماهیت خروجی و $(1 - \frac{1}{\varphi^*})$ نشان‌دهنده‌ی میزان ناکارایی تکنیکی DMU_0 در ماهیت خروجی است. مفهوم کارایی قوی در مدل با ماهیت خروجی، مشابه مدل با ماهیت ورودی است.

[۷] Weak efficient
[۸] Strong efficient
[۹] Technical inefficiency
[۱۰] Output oriented

نمادگذاری ۱.۲.۶. *از نمادها و علائم زیر در این پایان‌نامه استفاده خواهد شد:*

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t, \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t,$$

$$X = [x_1, \ldots, x_n], \quad Y = [y_1, \ldots, y_n],$$

$$S^- = (s_1^-, \ldots, s_m^-)^t, \quad S^+ = (s_1^+, \ldots, s_s^+)^t,$$

$$T^- = (t_1^-, \ldots, t_m^-)^t, \quad T^+ = (t_1^+, \ldots, t_s^+)^t.$$

مدل (۱.۴) پس از افزودن متغیرهای کمکی، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + S^- = \theta x_0, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - S^+ = y_0, \\
& \lambda_j \geq 0, \quad S^- \geq 0, \quad S^+ \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{۱.۷}$$

مدل (۱.۶) نیز پس از افزودن متغیرهای کمکی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \varphi \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + T^- = x_0, \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j - T^+ = \varphi y_0, \\
& \mu_j \geq 0, \quad T^- \geq 0, \quad T^+ \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{۱.۸}$$

قضیه ۱.۳.۶. [۴۴] *اگر $(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهین مدل (۱.۷) و $(\varphi^*, \mu^*, T^{-*}, T^{+*})$ جواب بهین مدل(۱.۸) باشد، آن‌گاه روابط ذیل برقرار است:*

$$\varphi^* = \frac{1}{\theta^*}, \quad \mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}, \quad T^{-^*} = \frac{S^{-*}}{\theta^*}, \quad T^{+*} = \frac{S^{+*}}{\theta^*}.$$

بنابر قضیه‌ی فوق در مدل CCR، مقدار کارایی (ناکارایی) در ماهیت ورودی با مقدار کارایی(ناکارایی) در ماهیت خروجی یکسان است وDMUهای کارا تحت هر دو مدل یکسان هستند.

تعریف ۱.۴.۶. **(کارای قوی در ماهیت ورودی-CCR)** *DMU_0 تحت مدل(۱.۷) کارای قوی است هرگاه $\theta^* = 1$ و در همه‌ی جواب‌های بهین، مقادیر متغیرهای کمکی یعنی S^{+*} و S^{-*}، صفر باشد.*

نکته ۱.۵.۶. *دوگان مدل با فرم پوششی، مدل با فرم مضربی[11] نامیده می‌شود.*

با توجه به نکته‌ی فوق مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \max \quad & u^t y_0 \\ s.t. \quad & v^t x_0 = 1 \ , \\ & u^t y_j - v^t x_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u \geq 0 \ , \ v \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۹}$$

با توجه به این‌که مدل (۱.۴) همواره بهینه‌ی متناهی دارد، لذا بنا به قضیه‌ی قوی دوگانی، مدل(۱.۹) همواره بهینه‌ی متناهی خواهد داشت و مقدار بهین هر دو مدل با هم برابر است.

فرم مضربی مدل CCR در ماهیت خروجی که همان دوگان مدل (۱.۶) است، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & v^t x_0 \\ s.t. \quad & u^t y_0 = 1 \ , \\ & u^t y_j - v^t x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u \geq 0 \ , \ v \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۱۰}$$

[11] Multiplicative form

قضیه ۱.۶.۶. [۴۴] *اگر $(v^* = p^*, u^* = q^*)$ جواب بهین مدل (۱.۹) باشد، آن‌گاه جواب بهین مدل (۱.۱۰) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$(v^* = \frac{p^*}{\theta^*}, u^* = \frac{q^*}{\theta^*})$$

تعریف ۱.۷.۶. **(CCR - کارای قوی تحت مدل مضربی CCR)** *DMU_0 تحت مدل (۱.۹) کارای قوی نامیده می‌شود، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:*

۱) *حداقل یك جواب بهین (v^*, u^*)، از (۱.۹) موجود باشد به‌طوری‌که $v^* > 0$ و $u^* > 0$.*

۲) $u^{*t}y_0 = 1$.

رهیافتی که در بالا برای ارائه‌ی مدل (۱.۹) ارائه شد، رهیافتی مبتنی بر مجموعه‌ی امکان تولید و استفاده از دوگان فرم پوششی CCR بود. اکنون با استفاده از تعریف کارایی نسبی مدل (۱.۹) را به‌دست خواهیم آورد.

اگر واحد تصمیم گیرنده دارای یك ورودی و یك خروجی باشد، آن‌گاه نسبت خروجی به ورودی، نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی آن واحد تصمیم گیرنده است. اگر واحد تصمیم گیرنده دارای بیش از یك ورودی یا بیش از یك خروجی باشد و قیمت خروجی‌ها و هزینه‌ی ورودی‌ها مشخص باشد، در این‌صورت نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی‌ها، نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی واحد تصمیم گیرنده است. برای محاسبه‌ی کارایی نسبی هر واحد باید کارایی آن واحد را بر ماکسیمم کارایی از بین سایر واحدها تقسیم کنیم. مشکل زمانی پیش می‌آید که قیمت خروجی‌ها و هزینه‌ی ورودی‌ها مشخص نباشد، راهکاری که در این حالت DEA پیشنهاد می‌کند به‌این‌صورت است که با دیدگاهی خوش‌بینانه، به وزن‌ها اجازه می‌دهد طوری انتخاب شوند که DMU_0 به ماکسیمم کارایی خود برسد و این مقدار را به عنوان میزان کارایی نسبی DMU_0 در نظر می‌گیرد. فرض کنید بردار نامنفی $u \in R^s$ نشان دهنده‌ی قیمت خروجی‌ها و بردار نامنفی $v \in R^m$ نشان‌دهنده‌ی هزینه‌ی ورودی‌ها باشد، آن‌گاه جواب بهینه‌ی مدل زیر نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی نسبی DMU_0 است:

$$RE_0 = \max_{(u,v)\geq 0} \frac{\frac{u^t y_0}{v^t x_0}}{\max_{1\leq j\leq n} \frac{u^t y_j}{v^t x_j}}. \qquad (۱.۱۱)$$

اگر $RE_0 = 1$، آن‌گاه DMU_0، کارای تکنیکی در ماهیت ورودی نامیده می‌شود. در مدل بالا ممکن است که بعضی

از وزن‌ها صفر درنظر گرفته شوند و این بدان معنی است که ورودی یا خروجی متناظر نادیده گرفته شده است. اگر $RE_0 = 1$ و جواب بهینه‌ای موجود باشد که$(v^*, u^*) 0$، در این‌صورت بنا به تعریف DMU_0، CCR-کارای قوی است.

اگر قرار دهیم:

$$max_{1 \leq j \leq n} \frac{u^t y_j}{v^t x_j} = \frac{1}{t},$$

مدل (۱.۱۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} RE_0 = \max \quad & t.\frac{u^t y_0}{v^t x_0} \\ s.t. \quad & (u^t y_j)/(v^t x_j) \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u \geq 0 \ , \ v \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۱۲}$$

اگر قرار دهیم: $tu = \bar{u}$ و $tv = \bar{v}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RE_0 = \max \quad & \frac{\bar{u}^t y_0}{\bar{v}^t x_0} \\ s.t. \quad & \frac{\bar{u}^t y_j}{\bar{v}^t x_j} \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & \bar{u} \geq 0 \ , \ \bar{v} \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۱۳}$$

اگر مجدداً قرار دهیم: $u = \bar{u}$ و $v = \bar{v}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RE_0 = \max \quad & \frac{u^t y_0}{v^t x_0} \\ s.t \quad & \frac{u^t y_j}{v^t x_j} \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ & u \geq 0 \ , \ v \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۱۴}$$

مدل (۱.۱۴) به مدل کسری CCR معروف است. با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر، مدل (۱.۱۴) با فرض مثبت