بسم الله الرحمن الرحيم

«باسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام خانوادگی : روشنک رشیدیان شمارهٔ دانشجوئی : ۸۰۵۲۴۷۸۰۷

رشته تحصیلی : ریاضی محض مقطع : کارشناسی ارشد سال تحصیلی : ۸۳-۸۲

عنوان پایان‌نامه : ابر گروههای مشخص شده به وسیله روابط دوتایی

۱۳۸۲/۰۸/۲۰

تاریخ دفاع : چهارشنبه ۸۲/۶/۲۶

نمره پایان‌نامه (به عدد) : ۱۸/۷۵

نمره پایان‌نامه (به حروف) : هیجده و هفتاد و پنج صدم

۱۳۸۲/۰۸/۲۰

هیأت داوران

استاد راهنما : آقای دکتر رضا عامری امضاء

استاد مشاور : آقای دکتر یحیی طالبی رستمی امضاء

استاد مدعو : آقای دکتر خراشادی‌زاده امضاء

استاد مدعو : آقای دکتر عبدالعلی نعمتی امضاء

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر قاسم علیزاده امضاء

۴۸۰۱۳

تقدیم به پدر ومادر عزیزم

آنانکه

۲۰ /۸/ ۱۳۸۲

قلبم در پرتو محبتشان آرام ومطمئن است

و برادران عزیزم شهرام ورضا

تقدیروتشکر

اول دفتر به نام ایزد دانا

حال که در سایه الطاف بیکران ایزدی،با حمایت وپشتگرمی خانواده عزیزم وبا زحمات وراهنمائیهای اساتید محترم گروه ریاضی،**جناب آقای دکتر رضا عامری** بعنوان استاد راهنما و**جناب آقای دکتر یحیی طالبی رستمی** بعنوان استاد مشاور،توانسته ام این دوره را با موفقیت به اتمام برسانم ،خود را ملزم به تشکر وسپاسگزاری از این عزیزان دانسته وآرزوی کامیابیهای بیشتر را در تمام مراحل زندگی،برای ایشان دارم.

روشنک رشیدیان

تابستان۸۲

تاریخچه و مقدمه

در سال ۱۹۳٤، *Marty* در چهارمین کنگره ریاضی اسکاندیناوی،برای اولین بار تعریف ابرگروه را ارائه داد و بعضی از خواص ان را تشریح کرد،بنابراین می توانیم سال ۱۹۳٤ را سال پیدایش ابرساختارها بدانیم.

بعدها *Krasner*، *Kuntzman* و *Croisot* در فرانسه و *Dresher*، *Ore*، *Eaton*، *Wall*، *Compaigne*، *Griffith* و *Prenowits* در ایالت متحده و *Utumi* در ژاپن و *Dietzman* و *Vikrov* در روسیه و *Zappa* در ایتالیا ،در این زمینه تحقیقاتی به عمل آورده واین نظریه را تعمیم داده و قضایای مختلفی در این مورد بیان کردند.

در دهه پنجاه، *Drbohlav* در چکسلواکی روی کلاس هایی از ابرگروهها کار کردو *Boccionoi* در ایتالیا روی شرایط شرکت پذیری در ابرگروهها کار کردودر دهه شصت ، *Orsati* نیز در ایتالیا تحقیقاتی در این زمینه به عمل آوردو *Pickett* و *Graetzer* در ایا لات متحده ،مفاهیم مختلفی را در زمینه چند جبرها گسترش دادند و *Nakano* در ژاپن چند مدولها را مورد مطالعه قرار داد.

در فرانسه *Sade* روی ابر گروه وارها کار کرد،در یونان *Mittas* نظریه ابر گروههای کانونی را بنا نهاد ودر ایالات متحده *Roth* این نظریه را مورد بررسی قرار داد.

Prenowitz و *Jantosciak* فضاهای الحاقی را تجزیه و بررسی کرده وآنها رادر هندسه به کار بردند و *Koskas* در فرانسه ،شرکت پذیری نیم ابر گروه وار را کشف کردو *Mcmullen* و *Price* در استرالیا نظریه ای جبری از ابر گروهها را گسترش داده ودر آنالیز هارمونیک مورد استفاده قرار دادند.

حال در این پایان نامه به مطالعه ابرگروههای مشخص شده توسط روابط دوتایی می پردازیم وخواص اساسی آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم .

این پایان نامه در سه فصل تنظیم گردیده است .در فصل اول مطالب پیشنیاز که در سایر فصلها مورد استفاده قرار می گیرند آورده می شود،مفاهیمی نظیر ابر عمل ،ابرگروهوار ،فضاهای الحاقی وانواع همریختی های ابرگروهها و....

در فصل دوم،به مطالعه ابرگروهها وفضاهای الحاقی مشخص شده بوسیله روابط دوتایی می پردازیم.

در این فصل با در نظر گرفتن یک رابطه دوتایی،ابتدا یک ابر عمل تعریف می کنیم سپس شرایطی را بررسی می کنیم که اگر رابطه ما واجد آن باشد،ابرگروهوار مشخص شده بوسیله آن یک ابرگروه یا فضای الحاقی باشد.

فصل سوم،در این فصل به ارتباط بین ابرگروهها وابرگرافها پرداخته ایم.بدینصورت که به یک ابرگراف مفروض یک شبه ابرگروه نظیر می کنیم و نشان می دهیم که اگر عمل القا شده در خواص معینی صدق کند،آنگاه شبه ابرگروه بدست آمده دارای خواص بیشتری نظیر ابرگروه یا فضای الحاقی است.بویژه هر ابرگراف $\Gamma =< H, \{A_i\}_{i\in I} >$ یک دنباله از شبه ابرگروهها $Q_0 =< H, o_0 >$ و...و $Q_m =< H, o_m >$ را معین می کند بطوری که برای هر $k \geq 1$ ، Q_k یک توسعه از Q_{k-1} است.اگر s ای وجود داشته باشد بطوری که $Q_s = Q_{s+1}$،آنگاه عدد طبیعی P_Γ وجود دارد بطوری که Q_{P_Γ} یک ابرگروه است.

چکیده :

این رساله در ۳ فصل تنظیم گردیده است . در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مربوط به ابرگروهها آورده می شود که در سایر فصول مورد استفاده قرار می گیرند.در فصل دوم به مطالعه ابرگروهها وفضاهای الحاقی مشخص شده بوسیله روابط دوتایی می پردازیم .در فصل سوم ارتباط بین ابرگروهها وابرگرافها ارائه می شود بدین صورت که به هر ابرگراف یک ابرگروه وار وابسته می کنیم ونشان می دهیم که اگر ابر گراف مورد نظر دارای خواص معینی باشد،آنگاه ابرگروه وار وابسته به آن یک ابرگروه خواهد بود.

فهرست مطالب

فصل اول

پیشنیاز

فصل اول

پیشنیاز

مقدمه. در این فصل تعاریف و نتایجی را به عنوان پیشنیاز ارائه می کنیم که در سایر فصل‌های این رساله مورد استفاده قرار می گیرد .

۱-۱ تعریف . یک *ابر گروه وار جزئی (Partial Hypergroupoid)* یک مجموعه غیر تهی H به همراه تابع $o: H \times H \to P(H)$ است .

۱-۲ تعریف . *ابر عمل دوتایی (Binary Hyperoperation)* روی مجموعه غیر تهی H ،تابعی است از $H \times H$ به $P^*(H)$ (مجموعه زیر مجموعه های غیر تهی H).

۱-۳ تعریف .اگر Hیک مجموعه ناتهی بوده و (o)یک ابر عمل روی Hباشد ،آنگاه زوج $< H,o >$ *ابرگروه وار (Hypergroupoid)*نامیده می شود.

۱-٤ تعریف. ابرگروه وار $< H,o >$ را *شبه ابرگروه (Quasi-hypergroup)* گوییم هرگاه برای هر $x \in H$ داشته باشیم:

$$\{x\}oH = H = Ho\{x\} \qquad (۱)$$

برای راحتی از نمادهای Hox و xoH بجای عبارات $Ho\{x\}$ و $\{x\}oH$ استفاده می کنیم و اگر $xoy=\{z\}$ این مطلب را با $xoy=z$ نمایش می دهیم.بویژه برای هر $A,B\subseteq H$ تعریف می کنیم

$$AoB=\bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} aob$$

۱-۵ تعریف. ابرگروه وار $<H,o>$ را یک *نیم ابرگروه (Semi-Hypergroup)* گوییم هرگاه برای هر x,y,z در H داشته باشیم:

$$xo(yoz)=(xoy)oz$$

۱-۶ تعریف .شبه ابرگروه $<H,o>$ را *ابرگروه (Hypergroup)* گوییم هرگاه برای هر x,y,z در H داشته باشیم:

$$xo(yoz)=(xoy)oz$$

۱-۷ تبصره. شرط (۱) در تعریف ۱-۴ معادل است با اینکه برای هر $a,y\in H$ وجود داشته باشد v,u در H بطوری که

$$y\in uoa \text{ و } y\in aov$$

۱-۸ تعریف. اگر A یک مجموعه غیر تهی باشد و برای هر $x,y\in A$، $xoy=A$، آنگاه A یک *ابرگروه کامل (Total hypergroup)* است.

۱-۹ تعریف . گوییم ابر گـروه $<H,o>$ جابجایی $(Abelian)$ اسـت هـر گـاه بـرای هـر $a,b \in H$ داشته باشیم:

$$aob = boa \ .$$

۱-۱۰ مثال . اگر $<G,.>$ گروه باشد و برای هر $(x,y) \in G^2$ ، $L(x,y) = xoy$ زیر گـروه G تولید شده بوسیله $\{x,y\}$ باشد ،آنگاه $<G,o>$ ابر گروه است .

اثبات. نشان می دهیم برای هر $x \in G$ ، $xoG = G = Gox$.

برای هر $a,y \in G$ وجود دارد $(v = y, u = y)$ بطوری که $y \in <\{y,a\}>, y \in <\{y,a\}>$.

و

$$xo(yoz) = xo(L(y,z)) = L(x,y,z) = (xoy)oz \ .$$

۱-۱۱ مثـال . اگـر G گـروه و H زیـر گـروه نرمـال G باشـد و بـرای هــر $(x,y) \in G^2$، $xoy = Hxy$ ، آنگاه $<G,o>$ ابر گروه است .

اثبات . نشـان مـی دهیـم بـرای هـر $x \in G$ ، $xoG = G = Gox$. مشـابه اثبـات ۱-۱۰بـرای هر $a,y \in G$ وجود دارد $(v = a^{-1}y, u = ya^{-1})$ بطوری که $y \in uoa$ و $y \in aov$.

و

$$xo(yoz) = xo(Hyz) = \bigcup_{t \in Hyz} xot = \bigcup_{t \in Hyz} Hxt = \bigcup_{t \in Hyz} (Hx)(Ht)$$

$$= Hx.\bigcup_{t\in Hyz} Ht = (Hx).(H(Hyz)) = (Hx).(Hyz) = (Hx)(Hy.Hz)$$

چون H زیر گروه نرمال Gاست پس $\frac{G}{H}$ گروه است لذا $\frac{G}{H}$ شرکت پذیر است بنابراین

$$xo(yoz) = (Hx)\cdot(Hy.Hz) = (Hx.Hy)Hz = (xoy)oz\,.$$

۱-۱۲ مثال . اگر G گروه و $(H \le G)$ $\;H)$ زیر گروه غیر نرمال G باشد) و برای هر $(xH, yH)\in\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}$، $xHoyH = \{zH \mid z\in xHy\}$ ، آنگاه $<\frac{G}{H}, o>$ ابر گروه است .

اثبات .

نشان می دهیم برای هر $xH\in\frac{G}{H}$، $(xH)o(\frac{G}{H}) = \frac{G}{H} = (\frac{G}{H})o(xH)$.

برای هر $aH, yH\in\frac{G}{H}$وجود دارد $u = ya^{-1}$ و $v = a^{-1}y$ بطوریکه

$yH\in(uH)o(aH)$ و $yH\in(aH)o(vH)$

لذا برای هر $xH\in\frac{G}{H}$ داریم $(xH)o(\frac{G}{H}) = \frac{G}{H} = (\frac{G}{H})o(xH)$. نشان می دهیم

$$(xH)o(yHozH) = (xHoyH)ozH$$

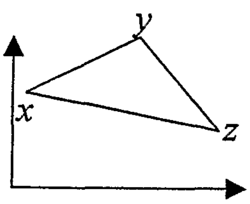
$$(xH)o\{cH \mid c\in yHz\} = (xH)o\bigcup_{c\in yHz} cH = \{mH \mid m\in xHc\ ,\ c\in yHz\}$$

$$= xHyHzH = (xHy)HozH = (xHoyH)ozH$$

۱-۱۳ مثال . اگر S فضای تصویر و P مجموعه نقاط روی S باشد برای $(x,y)\in P_s^2$ تعریف می کنیم((اگر $x\neq y$ ، آنگاه xoy (مجموعه نقاط روی پاره خط xy) و برای هر $x\in P_s$, $xox=x$))، آنگاه $<P_S,o>$ یک ابر گروه است .

نشان می دهیم برای هر x , $xoP_S=P_Sox=P_S$

$$y\in P_S\Rightarrow y\in yox\Rightarrow y\in P_Sox$$



$$(xoy)oz=xo(yoz)$$

با توجه به شکل شرکت پذیری نیز برقرار است .

۱-۱۴ مثال . اگر G گروه آبلی و R رابطه هم ارزی روی G باشد بطوریکه $\bar{x}=\{x,-x\}$ و برای هر $(\bar{x},\bar{y})\in(G/R)^2$ ، $\bar{x}o\bar{y}=\{\overline{x+y,x-y}\}$ ،آنگاه $<\frac{G}{R},o>$ ابر گروه است .

نشان می دهیم برای هر $\bar{x}\in G/R$ ، $\bar{x}o\frac{G}{R}=\frac{G}{R}o\bar{x}=\frac{G}{R}$،

$$\bar{y}\in\frac{G}{R}\Rightarrow\bar{y}\in\{\overline{x+y+x}\ ,\ \overline{x+y-x}\}=\overline{x+y}o\bar{x}\subseteq\frac{G}{R}o\bar{x}$$

بنابراین برای هر $\bar{x}$ ، $\frac{G}{R}\subseteq\frac{G}{R}o\bar{x}$ واضح است که $\bar{x}o\bar{y}=\bar{y}o\bar{x}$ پس $\frac{G}{R}\subseteq\bar{x}o\frac{G}{R}$.

نشان می دهیم $(\bar{x}o\bar{y})o\bar{z}=\bar{x}o(\bar{y}o\bar{z})$

$$(\bar{x}o\bar{y})o\bar{z}=\{\overline{x+y}\ ,\ \overline{x-y}\}o\bar{z}=\left(\overline{x+y}o\bar{z}\right)\cup\left(\overline{x-y}o\bar{z}\right)$$

$$=\{\overline{x+y+z}\ ,\ \overline{x+y-z}\}\cup\{\overline{x-y+z}\ ,\ \overline{x-y-z}\}$$

$$\bar{x}o(\bar{y}o\bar{z})=\bar{x}o\{\overline{y+z}\ ,\ \overline{y-z}\}=\bar{x}o(\overline{y+z})\cup\bar{x}o(\overline{y-z})$$

$$=\{\overline{x+y+z}\ ,\ \overline{x-y-z}\}\cup\{\overline{x+y-z}\ ,\ \overline{x-y+z}\}$$

بنابراین $(\bar{x}o\bar{y})o\bar{z}=\bar{x}o(\bar{y}o\bar{z})$ پس $<\frac{G}{R},o>$ ابر گروه است .

قرارداد.در سراسراین رساله بجای ابر گروه $<H,o>$ ازابر گروهHنام برده می شود.

۱-۱۵ تعریف . اگر $<H,o>$ یک ابر گروه باشد $e\in H$ یک عنصر همانی *(Identity)*است اگر برای هر $h\in H$ ، $h\in eoh$ و $h\in hoe$. مجموعه همه همانی هایH را با I_H نمایش می دهیم .

۱-۱۶ تعریف . اگر $<H,o>$ ابر گروه باشد $x'\in H$ وارون *(Inverse)* x است هر گاه $xox'\cap I_H\neq\varnothing$ و $x'ox\cap I_H\neq\varnothing$ مجموعه همه وارونهای x را با $i(x)$ نمایش می دهیم.

۱-۱۷ تعریف . ابر گروه $<H,o>$ منظم *(Regular)* است اگر برای هر $x\in H$ ، $i(x)\neq\varnothing$.

۱-۱۸ تعریف . ابر گروه منظم H را برگشت پذیر *(Reversible)* گوییم هر گاه برای هر $a,b,c\in H$ شرط زیر معتبر باشد .

$$a\in boc\Rightarrow\exists b'\in i(b)\ ,\ c\in aob'$$

۱-۱۹ تعریف . اگر ρرابطه دوتایی روی مجموعه دلخواه Hباشد برای $k\in N$ و$k\geq ۲$ تعریف می کنیم:

$$\rho^k=\{(a_۱,a_{k+۱})\mid\exists(a_۲,...,a_k)\in H^{k-۱}:(a_۱,a_۲)\in\rho,...,(a_k,a_{k+۱})\in\rho\}$$