بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

بررسی گراف های غیردوری گروه های با مرتبه های کوچک

استادان راهنما:

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

لیلا موسوی

شهریور ماه ۱۳۸۷

بسمه تعالی

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم لیلا موسوی مبارکه

تحت عنوان:

بررسی گراف های غیر دوری گروههای با مرتبه کوچک

در تاریخ ... ۸۷/۶/۳۰ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکترعلیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر بیژن طائری	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

نون والقلم

حمد و سپاس مر خالقی را سزد که به قدرت کامله ی خداوندیش در طبیعت روحانی انسان عشق به آموختن را قرار داد. پروردگاری که فرمود آیا برابرند آنان که می دانند و آنان که نمی دانند؟

الهی اکنون که در پایان یکی دیگر از مراحل علمی زندگیم قرار گرفته ام تو را شکر می گویم که به من آموختی که هیچ نمی دانم و این دانستنم را مدیون الطاف خفیه ی تو هستم.

بر خود واجب می دانم از زحمات همه اساتید ارجمندی که تا کنون از فیض وجودشان بهره برده ام کمال تشکر را داشته باشم. به ویژه

سپاس صمیمانه ام را تقدیم استاد عزیزم دانشمند محترم جناب آقای دکتر محمدی که همواره افتخار شاگردی ایشان را دارم، می نمایم . اگر چه توانایی ادای دین و جبران زحمات ایشان را نخواهم داشت ولی با کمال خضوع از خداوند متعال برای این بزرگوار توفیق و سلامتی را خواهانم.

همچنین سپاس صمیمانه ام را تقدیم استاد عزیزم جناب آقای دکتر عبدالهی که با کمال فروتنی اعتراف می کنم حضور ایشان در این مرحله ی علمی از زندگیم را یک لطف الهی می دانم، می نمایم و از خداوند بزرگ سلامتی و کامیابی ایشان را خواهانم.

وظیفه ی خود می دانم از استاد عزیزم جناب آقای دکتر اعظم که توفیق شاگردی محضر ایشان را داشته ام و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزاری نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر طائری که قبول زحمت نموده و پایان نامه اینجانب را مطالعه نمودند بی نهایت متشکرم.

از زحمات سرکار خانم ها فرهمند، گرامی و غازی در طی تدوین این پایان نامه سپاسگزاری می نمایم.

در پایان از همراهی ها و همدلی های خانواده ی بزرگوارم و به خصوص مادر عزیزم بی نهایت متشکرم.

از همه ی دوستان عزیزم که همواره مشوق من بودند متشکرم و موفقیت همگان را از خداوند متعال خواهانم.

تقدیم به:

بهترین ذخیره های زندگیم

پدر و مادر عزیزم

چکیده

فرض کنید G و H دو گروه متناهی و غیر دوری باشند به طوری که گراف غیر دوری آن ها یکریختتند.
آیا $|G|=|H|$؟ آیا $G \cong H$؟ در این پایان نامه درستی سوال اول را برای برخی از گروه ها ثابت می کنیم. همچنین گروه های حداکثر از مرتبه ی ۱۰۰ که گراف آن ها یکتا هستند مشخص می کنیم.
در ادامه ی این پایان نامه گروه های n- دوری ساز را معرفی می کنیم و ثابت می کنیم گروه های ۲- دوری ساز و ۳- دوری ساز متناهی وجود ندارند. همچنین گروه های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸- دوری ساز متناهی را مشخص می کنیم.

واژه های کلیدی: دوری ساز، گروه موضعاً دوری، گراف غیر دوری، گروه n- دوری ساز.

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

پیشگفتار

فرض کنید G یک گروه باشد و $x \in G$.

مجموعه‌ی $Cyc(G) = \{y \in G |$ به ازای هر $g \in G$، $< y, g >$ دوری است$\}$ را دوری‌ساز G گوییم. گراف غیر دوری گروه غیر موضعاً دوری G را با $\mathcal{C}_G$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌ی رئوس $\mathcal{C}_G$ عبارت است از $V = G \setminus Cyc(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های $\mathcal{C}_G$ عبارت است از، $E = \left\{ \{x, y\} \middle| \ x, y \in G \text{ و } \langle x, y \rangle \text{ دوری نیست} \right\}$. گروه G را $n-$ دوری‌ساز گوییم، اگر $|\{Cyc_G(x) | x \in G\}| = n$ و می‌نویسیم $Cycle(G) = n$.

در [۲] سوال‌های زیر مطرح شده است.

فرض کنید G یک گروه متناهی و غیر دوری باشد. همچنین فرض کنید H یک گروه باشد به طوری که $\mathcal{C}_G \cong \mathcal{C}_H$. آیا $|G| = |H|$؟ آیا $G \cong H$؟

برای درستی سؤال اول اثباتی پیدا نشده است. همچنین مثال نقضی برای رد این حدس پیدا نشده است. اما درستی این حدس برای برخی از گروه‌ها ثابت شده است. به طور مثال ثابت شده است که برای گروه‌های D_{2n}، S_n، A_n $(n > 3)$، $Q_8 \times \mathbb{Z}_n$ (n فرد)، گروه‌های مرتبه‌ی p^3 (p عدد اول)، گروه‌هایی که ساختار آن‌ها به صورت $\mathbb{Z}_n \oplus (\oplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2)$ $(m > 1$ یک عدد صحیح و $n > 0$ یک عدد صحیح فرد) است و همچنین گروه‌هایی که ساختار آن‌ها به صورت $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_n$ می‌باشد که در آن p یک عدد اول و $n > 0$ یک عدد صحیح است به طوری که $(n, p) = 1$، پاسخ سوال اول صحیح است [۲].

در فصل دوم درستی این حدس را برای برخی دیگر از گروهها ثابت می‌کنیم. مثلاً ثابت می‌کنیم این حدس برای گروه‌های مرتبه‌ی $p+1$ (p اول) با دوری‌ساز بدیهی، گروه‌هایی مانند G با دوری‌ساز بدیهی که یک رأس از درجه‌ی $|G|-2$ دارند ، گروه‌های مرتبه‌ی $3p$ و $5p$ (p اول) و گروه‌های کوآترنیونی تعمیم یافته صحیح می‌باشد. همچنین درستی این حدس را برای گروه‌هایی با ساختار $C_3 \times D_{2p}$ ($p \neq 3$ عدد اول و فرد) و $D_{2m} \times S_3$ ثابت می‌کنیم.

در فصل سوم گروه‌های $n-$ دوری‌ساز را معرفی می‌کنیم. سپس گروه‌های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸− دوری‌ساز را مشخص می‌کنیم. در واقع در این فصل به بیان و اثبات قضایای زیر می‌پردازیم.

قضیه‌ی A: هیچ گروه متناهی ۲ و ۳ دوری‌سازی وجود ندارد.

قضیه‌ی B: گروه متناهی G، ۴− دوری‌ساز است اگر و فقط اگر $G = C_{2n} \times C_2$ یا $G = C_n \times Q_8$، برای عدد طبیعی فرد n.

قضیه‌ی C: گروه متناهی G، ۵− دوری‌ساز است اگر و فقط اگر

$G/Cyc(G) \cong C_3 \times C_3$ یا $G/Cyc(G) \cong S_3$.

قضیه‌ی D: گروه متناهی G، ۶− دوری‌ساز است اگر و فقط اگر ساختار G به یکی از صورت‌های زیر باشد.

$C_n \times D_8$، $C_{4n} \times C_2$، $C_n \times Q_{16}$ که در آن n یک عدد طبیعی فرد است.

قضیه‌ی E: گروه متناهی G، ۷− دوری‌ساز است اگر و فقط اگر $G/Cyc(G)$ با یکی از گروه‌های زیر یکریخت باشد.

$$C_5 \times C_5,\ A = \langle x, y | x^5 = y^4 = 1, x^y = x^3 \rangle,\ D_{10}$$

قضیه‌ی F: گروه متناهی G، ۸− دوری‌ساز است اگر و فقط اگر $G/Cyc(G)$ با یکی از گروه‌های زیر یکریخت باشد.

$(C_2)^3$، A_4، D_{12}، $C_8 \times C_2$، $C_8 : C_2$ (گروه $[16, 6]$ در کتابخانه‌ی GAP)، $C_3 \times S_3$، $C_9 \times C_3$ و $C_9 : C_3$ (گروه $[27, 4]$ در کتابخانه‌ی GAP).

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی در زمینه‌ی جبر و گراف که در اثبات قضایای فصل‌های بعد به‌کار می‌روند بیان شده است. خواننده می‌تواند اثبات اکثر این قضایا را در یک کتاب مقدماتی جبر و گراف پیدا کند. بنابراین از آوردن اثبات برخی از آن‌ها خودداری می‌کنیم و به اثبات قضایایی که عمومیت کمتری دارند، می‌پردازیم.

۱—۱ تعاریف و قضایای مقدماتی گروه

تعریف ۱—۱.۱ فرض کنید G یک گروه و S زیرمجموعه‌ای از آن باشد. کوچکترین زیرگروه G شامل S را زیرگروه تولید شده توسط S می‌نامیم و آن را با $< S >$ نشان می‌دهیم.

اگر $S = \{g_۱, ..., g_n\}$، آن‌گاه می‌نویسیم $< S > = < g_۱, ..., g_n >$.

یک گروه G را متناهیاً تولید شده می‌نامیم، اگر توسط یک زیرمجموعه‌ی متناهی از خودش تولید شود. یک گروه G را دوری با مولد g می‌نامیم، اگر توسط مجموعه‌ی $\{g\}$ تولید شود که در آن $g \in G$. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه گروه دوری از مرتبه‌ی n را با C_n نشان می‌دهیم. واضح است که $C_n \cong \mathbb{Z}_n$ ($\mathbb{Z}_n$ گروه رده‌های مانده‌ای نسبت به عمل جمع به پیمانه‌ی n است).

تعریف ۱—۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. مرکزساز یک عنصر $x \in G$ که آن را با $C_G(x)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$C_G(x) = \{y \in G |\ xy = yx\}.$$

تعریف ۱—۳.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. مرکز G که آن را با $Z(G)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$Z(G) = \{g \in G | xg = gx \text{ ،}g \in G \text{ به ازای هر } \}.$$

تذکر ۱—۴.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت $Z(G)$ یک زیرگروه نرمال G است.

تعریف ۱—۵.۱ زیرگروه سره‌ی M از یک گروه G را بیشین گوییم، هرگاه برای هر زیرگروه N از G که $M \leq N < G$ داشته باشیم $N = M$.

تعریف ۱—۶.۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد. گروه متناهی G را یک $p-$ گروه می‌نامیم، اگر مرتبه‌ی هر عنصر G توانی از p باشد.

لم ۱—۷.۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد و $m \in \mathbb{N}$. در این صورت گروه $G = (C_p)^m$، $\frac{p^m-1}{p-1}$ زیرگروه مرتبه‌ی p دارد.

اثبات. گروه C_p دارای $p-1$ عنصر از مرتبه‌ی p است. زیرا اگر $C_p =< x >$، آن‌گاه

$$O(x) = O(x^2) = O(x^3) = \cdots = O(x^{p-1}) = p.$$

($O(x)$[1]، نشانگر مرتبه‌ی عضو x است.)

اگر $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ (برای هر i، $x_i \in C_p$) عنصری در G از مرتبه‌ی p باشد، آن‌گاه برای هر x_i، p انتخاب وجود دارد. بنابراین تعداد اعضای مرتبه‌ی p در G برابراست با $p^m - 1$. پس تعداد زیرگروه‌های مرتبه‌ی p برابر است با $\frac{p^m-1}{p-1}$. زیرا اگر $O(X) = p$، آن‌گاه $O(X) = O(X^2) = O(X^3) = \cdots = O(X^{p-1})$ و اگر $H =< X >$، آن‌گاه $|H| = p$. پس اعضای H، $p-1$ بار شمارش شده‌اند. ■

قضیه ۱—۸.۱. فرض کنید p یک عدد اول و G یک $p-$ گروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت $|Z(G)| > 1$.

اثبات. به نتیجه‌ی ۳—۱۳.۱۲ از [۱۹] رجوع کنید. ■

قضیه ۱—۹.۱. فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که $G/Z(G)$ دوری است. در این صورت G آبلی است.

[1] Order

اثبات. بنابر فرض، $aZ(G) \in G/Z(G)$ وجود دارد به طوری که

$$G/Z(G) =< aZ(G) >= \{a^n Z(G) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

قرار می‌دهیم $Z = Z(G)$. فرض کنیم $g_۱$ و $g_۲$ دو عنصر دلخواه و متمایز از G باشند. در این صورت $g_۱ Z \in G/Z(G)$ و $g_۲ Z \in G/Z(G)$. بنابراین اعداد صحیح m و n وجود دارند به طوری که $g_۱ Z = a^n Z$ و $g_۲ Z = a^m Z$. در نتیجه $z_۱, z_۲ \in Z(G)$ وجود دارند به طوری که $g_۱ = a^n z_۱$ و $g_۲ = a^m z_۲$. در نتیجه

$$g_۱ g_۲ = a^n z_۱ a^m z_۲ = a^{n+m} z_۱ z_۲ = a^{m+n} z_۲ z_۱ = a^m z_۲ a^n z_۱ = g_۲ g_۱$$

لذا G آبلی است. ■

قضیه ۱—۱۰.۱ فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه از مرتبه‌ی $p^۲$ باشد. در این صورت G آبلی است.

اثبات. طبق قضیه‌ی لاگرانژ $[G : Z(G)]\Big||G|$. بنابراین $[G : Z(G)]$ برابر است با ۱، p یا $p^۲$. اگر $[G : Z(G)] = ۱$، آن‌گاه $G = Z(G)$. در نتیجه G آبلی است. اگر $[G : Z(G)] = p$، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۱—۹.۱، G آبلی است. اگر $[G : Z(G)] = p^۲$، آن‌گاه $|Z(G)| = ۱$ که متناقض با قضیه‌ی ۱—۸.۱، می‌باشد و اثبات تمام است. ■

قضیه ۱—۱۱.۱ فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه آبلی متناهی و غیر بدیهی باشد به طوری که هر عضو غیر همانی آن دارای مرتبه‌ی p است. در این صورت یک عدد طبیعی $n \geq ۱$ موجود است به طوری که $G \cong G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ که در آن $G_i \cong \mathbb{Z}_p$ برای هر i، $i \in \{۱, ..., n\}$ و لذا $|G| = p^n$.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰.۱۱.۳ صفحه‌ی ۱۷۷ از [۲۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۱—۱۲.۱ فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه غیر دوری از مرتبه‌ی $p^۲$ باشد. در این صورت $G \cong C_p \times C_p$.

اثبات. بنابر فرض، G شامل عضوی از مرتبه‌ی $p^۲$ نیست. پس طبق قضیه‌ی لاگرانژ هر عضو غیر همانی از G از مرتبه‌ی p است. طبق قضیه‌ی ۱—۱۰.۱، G آبلی است و در نتیجه طبق قضیه‌ی ۱—۱۱.۱، اثبات تمام است. ■

تعریف ۱—۱۳.۱ فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هر یک از آن‌ها در $\mathbb{F}$ اند، با $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ نمایش می‌دهیم. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد که به آن گروه خطی عام (از درجه‌ی n بر روی $\mathbb{F}$) می‌گوییم.

تعریف ۱—۱۴.۱ مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ که دترمینان آن‌ها برابر یک است، زیرگروه نرمالی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ است. این زیرگروه را با $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ نشان می‌دهیم و آن را گروه خطی خاص از درجه‌ی n بر روی $\mathbb{F}$ می‌نامیم.

تعریف ۱—۱۵.۱ گروه $\frac{\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})}{Z(\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}))}$ را گروه خطی خاص تصویری می‌نامیم و آن را با $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{F})$ نمایش می‌دهیم.

قضیه و تعریف ۱—۱۶.۱ به ازای هر عدد طبیعی n که $n \geq ۲$، گروه کوآترنیونی تعمیم یافته (چهارگان‌های تعمیم یافته) که آن را با $Q_{۴n}$ نشان می‌دهیم، زیرگروهی از

گروه $\mathrm{GL}(۲,\mathbb{C})$ است که با دو ماتریس زیر تولید می‌شود.

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega & ۰ \\ ۰ & \overline{\omega} \end{bmatrix} ، \eta = \begin{bmatrix} o & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

به طوری که $\omega = e^{i\pi/n}$. گروه $Q_{۴n}$ دارای نمایش زیر است.

$$\langle x, y | x^{۲n} = ۱, x^n = y^۲, y^{-۱}xy = x^{-۱}\rangle.$$

اثبات. به قضیه‌ی ۲.۳.۷ صفحه‌ی ۱۷۳ از [۱۸] رجوع کنید. ■

تعریف ۱—۱.۱۷ فرض کنیم H و K دو گروه باشند. در این صورت گوییم گروه H بر گروه K عمل می‌کند هرگاه به هر $h \in H$ و $k \in K$، عضو یکتایی از K که آن را با نماد k^h نشان می‌دهیم متناظر شود به طوری که به ازای هر $k, k_۱, k_۲ \in K$ و هر $h, h_۱, h_۲ \in H$ داشته باشیم

۱) $k^۱ = k$،

۲) $(k^{h_۱})^{h_۲} = k^{h_۱h_۲}$،

۳) $(k_۱k_۲)^h = k_۱^hk_۲^h$.

قضیه ۱—۱.۱۸ فرض کنید گروه H بر گروه K عمل کند. در این صورت به ازای هر $h \in H$ نگاشتی مانند $\varphi_h : K \longrightarrow K$ که با ضابطه‌ی $\varphi_h(k) = k^h$ تعریف شده است، متناظر می‌شود که یک خودریختی از K است. علاوه براین نگاشت $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ که با ضابطه‌ی $\varphi : h \longmapsto \varphi_h$ تعریف می‌شود یک همریختی است. φ را نمایش خودریختی متناظر با این عمل می‌نامیم و گاهی اوقات آن را عمل می‌خوانیم.

قضیه و تعریف ۱—۱.۱۹ فرض کنید φ عمل گروه H بر گروه K باشد. در این صورت مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب (h,k) که $h \in H$ و $k \in K$، تشکیل یک گروه مانند G می‌دهد، اگر به ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$، تعریف کنیم

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{h_2} k_2).$$

در گروه G به جای هر زوج مرتب (h,k) نماد hk می‌گذاریم. در این صورت قاعده‌ی ضرب در G به صورت زیر است.

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2)(k_1^{h_2} k_2)$$

در این صورت گروه G تشکیل شده از تمامی نمادهای پهلوی هم گذاشته شده‌ی hk ($h \in H$ و $k \in K$) و ضرب تعریف شده توسطتساوی فوق را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم K در H با عمل φ می‌نامیم و آن را با نماد $H \times_\varphi K$ نشان می‌دهیم. در حالتی که ابهامی در مورد φ پیش نیاید یا مشخص کردن آن مورد نیاز نباشد به جای نماد مذکور از نماد $H \ltimes K$ یا $H : K$ استفاده می‌کنیم.

اثبات. به قضیه‌ی ۹.۶ و تعریف ۹.۷ از [۱۱] رجوع کنید. ■

قضیه ۱—۱.۲۰ فرض کنید G یک گروه و p و q اعداد اولی باشند به طوری که $p < q$ و $|G| = pq$. در این صورت اگر $p | q - 1$، آن‌گاه G دوری است یا G یک گروه غیر آبلی است که دارای نمایش زیر است.

$$G = \langle x, y | x^p = y^q = 1, x^{-1} y x = y^r \rangle.$$

که $1 < r < q$، $(r,p) = 1$، $r^p \equiv 1 \pmod q$.

اثبات. به قضیه‌ی ۳.۲.۸ صفحه‌ی ۱۹۰ از [۱۸] رجوع کنید. ■

قضیه و تعریف ۱—۲۱.۱ به ازای هر عدد طبیعی n، گروه دووجهی که آن را با D_{2n} نمایش می‌دهیم، گروهی است که دارای نمایش زیر است.

$$\langle x, y | x^n = y^2 = 1, x^y = x^{-1} \rangle.$$

مرکز و مرکزساز عناصر $G = D_{2n}$ به صورت زیر هستند.

الف) اگر n فرد باشد، آن‌گاه $Z(D_{2n}) = \{1\}$ و به ازای هر i، $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ داریم

۱) به ازای هر $i > 0$، $C_G(x^i) = < x >$،

۲) $C_G(yx^i) = \{1, yx^i\}$،

۳) $C_G(1) = G$.

ب) اگر n زوج باشد، آن‌گاه $Z(D_{2n}) = \{1, x^{\frac{n}{2}}\}$ و

۱) $C_G(x^i) = < x >$،

۲) $C_G(yx^i) = C_G(yx^{i+\frac{n}{2}}) = \{1, yx^i, yx^{i+\frac{n}{2}}, x^{\frac{n}{2}}\}$،

به ازای هر i، $i \in \{0, 1, ..., \frac{n}{2} - 1\}$،

۳) $G = C_G(1) = C_G(x^{\frac{n}{2}})$.

اثبات. به [۱۹] صفحه‌ی ۳۴۲ رجوع کنید. ■

قضیه ۱—۲۲.۱ فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به طوری که همه‌ی زیرگروه‌های سیلوی G دوری هستند. در این صورت نمایش G به صورت زیر است.

$$G = \langle a, b | a^m = b^n = 1, \ b^{-1}ab = a^r \rangle$$

که درآن m فرد، $((r-1)n, m) = 1$ و $r^n \equiv 1 \pmod{m}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۴۶ از [۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۱—۲۳.۱ فرض کنید G یک گروه و p عدد اول فردی باشد به طوری که $|G| = 2p$. در این صورت $G \cong D_{2p}$ یا $D \cong \mathbb{Z}_{2p}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۲۶۹ از [۱۶] رجوع کنید. ■

تعریف ۱—۲۴.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت $x^{-1}y^{-1}xy$ را جابجاگر دو عضو x, y می‌نامیم و با $[x, y]$ نشان می‌دهیم. گروه تولید شده توسط همه‌ی جابجاگرهای اعضای G را گروه مشتق G می‌نامیم و با G' نشان می‌دهیم. واضح است که گروه مشتق G یک زیرگروه نرمال از G است.

قضیه ۱—۲۵.۱ قضیه‌ی دوم یکریختی

فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $H \cap K \trianglelefteq H$ و $\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{Hk}{K}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۹ از [۱۲] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱—۲۶.۱ قضیه‌ی سوم یکریختی

فرض کنید G یک گروه و $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ و $K \leq H$. در این صورت $H/K \trianglelefteq G/K$ و $\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۹ از [۱۲] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱—۱.۲۷ فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت

۱) یک سری نرمال از G زنجیری مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G \qquad (C)$$

از زیرگروه‌های نرمال G است. در این سری هر G_i را یک جمله‌ی سری و هر G_i/G_{i-1} را یک عامل سری می‌نامیم. تعداد عامل‌های غیربدیهی سری را طول سری می‌نامیم.

۲) سری نرمال (C) را سری مرکزی G گوییم، اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}}).$$

۳) گروه G را پوچ‌توان گوییم، هرگاه G دارای یک سری مرکزی باشد.

در این حالت طول کوتاهترین سری مرکزی را رده‌ی پوچ‌توانی G گوییم.

تعریف ۱—۱.۲۸ فرض کنید G یک گروه باشد و $Z_0(G) = \{e\}$، $Z_1(G) = Z(G)$، $Z_2(G) \leq G$ به طوری که $\frac{Z_2(G)}{Z(G)} = Z(\frac{G}{Z(G)})$ و به ازای هر i، $Z_{i+1}(G) \leq G$ به طوری که $\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z(\frac{G}{Z_i(G)})$. در این صورت به ازای هر i، $Z_i(G)$، i اُمین مرکز G گفته می‌شود که برای سادگی با Z_i نشان می‌دهیم. سری مرکزی

$$\{e\} = Z_0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \cdots$$

را سری مرکزی بالایی G می‌نامند.

قضیه ۱—۱.۲۹ فرض کنید $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = 1$ یک سری مرکزی گروه پوچ‌توان G باشد. در این صورت به ازای هر i، $0 \leq i \leq r+1$، $G_{r-i} \leq Z_i$ و لذا $Z_r = G$ و رده‌ی پوچ‌توانی G برابر است با طول سری مرکزی بالایی G.