بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی (معادلات دیفرانسیل)

بررسی وجود جوابهای سراسری و یکتایی آن در معادلات موج غیرخطی با شرط انتگرالی مرزی و معادلات موج غیرخطی هذلولوی با بازخوری مرزی

به وسیله‌ی

داوود نیلی

استاد راهنما

دکتر فرامز تهمتنی

شهریور ۸۶

به نام خدا

بررسي وجود جوابهاي سراسري و يكتايي آن ها در معادلات غير خطي با شرط مرزي انتگرالي و معادلات غير خطي هذلولوي با بازخوري مرزي

به وسیله:

داود نیلی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی کاربردی

از دانشگاه شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه **خوب**

دکتر فرامرز تهمتنی، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)..........................

دکتر اسماعیل حسام الدینی استادیار بخش ریاضی ....

دکتر محمدباقر احمدی استادیار بخش ریاضی ....

شهریور ماه ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

استاد گرامی و ارجمندم

سپاسگذاری :

در ابتدا خدا را شاکرم که به انسان توانایی تفکر را که بالاترین نعمت اوست عطا کرد و در پایان از زحمات استادان گرامی ام دکتر فرامرز تهمتنی ،دکتر اسماعیل حسام الدینی و دکتر احمدی کمال تشکر را دارم .

چکیده:

بررسی وجود جوابهای سراسری و یکتایی آن در معادلات موج غیرخطی با شرط انتگرالی مرزی و معادلات موج غیرخطی هذلولوی با بازخوری مرزی

به وسیله‌ی:

داوود نیلی

در این مقاله ما به مطالعه مسئله مقدار مرزی و اولیه با شرایط انتگرالی غیرموضعی برای معادله موج یک بعدی می‌پردازیم. در ابتدا به اثبات وجود و یکتایی جواب کلاسیک و پیدا کردن نمایش فوریه آن می‌پردازیم.
اساس به کار برده شده شامل یک دستگاه از توابع ویژه و توابع الحاقی می باشد.
در مرحله بعد ما به اثبات وجود و یکتایی و انحطاط یکنواخت جوابهای قوی و ضعیف مدل غیر خطی معادله موج $u_{tt} - \Delta u + f(u) + h(\nabla u) = \mathbf{0}$ در دامنه کراندار با شرایط مرزی آشفته غیرخطی داده شده توسط

$$\frac{\partial u}{\partial v} + g(u_t) = \mathbf{0}.$$

اثبات وجود جواب به وسیله روش Faedo – Galekin و بررسی رفتار مجانبی آن با استفاده از تکنیک ضربی منصوب به Komornik و Zuzauz انجام می شود.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

عنوان صفحه

عنوان **صفحه**

فصـــل اول

مقـــدمه

مقدمه

۱-۱- پیشگفتار

مطالعه معادلات دیفرانسیل جزیی در قرن هجدهم با کاراویلر[۱]، دی آلمبرت[۲]، لاگرانژ[۳] و لاپلاس[۴] بامطالعه تحلیلی روی مدل های فیزیکی آغاز شد. مدل هایی که منشا به وجود آمدن طیف گسترده ایی از معادلات دیفرانسیل جزیی شدند. تجزیه و تحلیل مدل های فیزیکی تا کنون به عنوان عامل اصلی پیشرفت معادلات دیفرانسیل شناخته شده اند. مفاهیم فیزیکی مانند حرکت رشته مرتعش، نیروی جاذبه، الکترواستاتیک،جریان سیالات، هدایت گرمایی، الکتریسته و مغناطیس، همگی منجر به پیدایش معادلات دیفرانسیل جزیی متفاوتی گردیده اند، معادلاتی که رفتارهای فیزیکی را در قالب نمادهای ریاضی بخوبی بیان می کنند. طبیعی است که جواب های این معادلات بخوبی پاسخگوی اثرات این پدیده های فیزیکی خواهد بود. بنابراین دست یافتن به جواب های این نوع معادلات همواره از اهمیت ویژه ای نزد ریاضی دانان و فیزیک دانان برخودار بوده است.

در طول قرن نوزدهم روش های متعددی برای بدست آوردن جواب های معادلات دیفرانسیل جزیی با توجه به شرایط مرزی وابسته به مدل های موردنظر ارائه شدند که از آن جمله می توان روش جداسازی متغیرها[۵] توسط دی آلمبرت (۱۷۴۷) برای معادله موج، روش توابع گرین[۶] برای معادله لاپلاس و روش های سری های توانی توسط کوشی[۷] (۱۸۴۰) برای پیدا کردن جواب های مسائل مقدار مرزی غیر خطی را نام برد.

تا سال ۱۸۷۰ مطالعه معادلات دیفرانسیل جزیی تنها براساس روش های ابتکاری[۸] برای پیدا کردن جواب های مسائل مقدار مرزی دنبال می شد. اما تحت تاثیر نتایج آنالیزی که توسط

---

1 -Euler
2- De Alembert
3- Lagrange
4- Laplace
5-Seperation of Variables
6-Green's Functions
7-Cauchy
8-Huristic methods

وایراشتراس[1] درسال ۱۸۷۰ بدست آمد، روش های کلاسیک برای دست یافتن بـه اثبـات هـای نتایج وجودی جواب ها مورد توجه قرار گرفتند. در سال ۱۸۹۰ پوانکاره[2] اولین اثبات کامل خود را از وجود و یکتایی جواب معادله لاپلاس با شرایط مرزی پیوسته دیریکله[3] ارائه کـرد. بـا آغـاز قرن بیستم ورشد سریع علوم مختلف، مسائل مهم درفیزیک و پدیده های وابسته به آنها، سبب به وجود آمدن طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل جزیی شدند. بسیاری از این مسائل کـه در ارتباط با مفاهیم فیزیکی مطرح شده اند ونقش مهمی در فیزیک و مهندسی ایفا می کننـد بـه صورت معادله های غیر خطی فرموله شده اند. به عنوان مثال می توان از معادلاتی نام بـرد کـه در نظریه جریان سیالات[4] بوجود آمده اند. این دسته از معادلات از نقطه نظر ایجاد یک نظریـه ریاضی مورد بررسی قرار گرفته اند. معادلات نـاویر- اسـتوکس[5] کـه جریـان حالـت چـسبناک (غلیظ) مایعات تراکم ناپذیر و تحت فشار P را نشان می دهند:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu\Delta u_i + \sum_{i=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad 1 \le i \le n \tag{۱-۱-۱}$$

$$div\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

و معادله اویلر

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_j = \frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad 1 \le i \le n$$

$$div\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \tag{۲-۱-۱}$$

از جمله این معادلاتند. در کنار ایـن معـادلات، معـادلات دیگـری همچـون معادلـه کوراماتو- شیواشینسکی[6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\frac{\partial^4 u}{\partial x4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \tag{۳-۱-۱}$$

که در نظریه احتراق[7] حائز اهمیت است و یا معادله کان- هیلیارد[8]

1-Weierstrass
2-Poincare
3-Dirichlet
4-flow flouid
5-Navier-Stokes
6-Kuramato-Shivashinski
7-Combutio teory
8-Cahn-Hiliard

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\Delta^2 u-\Delta(u^3-\alpha u)=0 \qquad v>0 \qquad (۴-۱-۱)$$

که در ارتباط فازی مطرح می شود و یا معادله کورتوگ- دی وریه[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+cu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (۵-۱-۱)$$

که در مطالعات مربوط به امواج آب مطرح می شود، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته اند.
در تحقیقاتی که از معادلات غیر خطی مانند معادلات فوق توسط ریاضی دانان به عمل آمده است روش های متعددی برای رسیدن به جواب های تحلیلی بررسی شده است. پیچیدگی معادلاتی مانند معادله ناویر- استوکس و یا معادله اویلر باعث شده است که بررسی این معادلات با اعمال شرایطی روی مسائل مقدار مرزی وابسته به آنها در فضاهای تابعی مانند فضاهای هیلبرت و سوبولو[2] انجام شود. با این همه اثبات های وجود و یکتایی همواره از نخسیتن گامها در مطالعه این نوع معادلات دیفرانسیل به شمار می روند. اثبات وجود و یکتایی جوای های معادله اویلر درسال ۱۹۲۵ توسط لیختن اشتاین[3] آغاز شد و توسط دانشمندانی چون آرنولد[4](۱۹۶۶) ومارسدن[5] (۱۹۷۰) ادامه یافت. وجود جواب های سراسری درحالت دو بعدی (n= ۲) درسال ۱۹۳۳ اثبات شد ودر سال ۱۹۶۷ توسط کارتر[6] ادامه یافت در حالی که وجود جواب سراسری در سه بعد (n = ۳) همچنان به صورت مساله ای باز در دست تحقیق است.

معادلات غیر خطی که در فوق به آنها اشاره شد تنها نمونه هایی از معادلاتی هستند که دست یابی به جواب های صریح و تحلیلی برای آنها کار ساده ای به نظر نمی رسد درحالی که می توان با استفاده از روش های گوناگون چگونگی رفتار جواب ها را مورد بررسی قرار داد. از این رو بسیاری از مسائل، ریاضی دانان پیش از آن که در پی یافتن پاسخ های تحلیلی مساله باشند، با بررسی رفتار جواب ها درصدد اثبات قضایای وجودی می باشند. لذا یکی از ارزنده ترین بررسی ها درمعادلات دیفرانسیل، بررسی جواب ها بدون یافتن پاسخ آنها است.

آنچه که ما نیز در این پایان نامه قصد داریم به آن بپردازیم بررسی رفتار جواب های غیر بدیهی برای رده های متفاوتی از معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی بدون یافتن پاسخ های تحلیلی آنها است. در این میان آنچه که مهم به نظر می رسد، روش هاو ابزارهایی است که ما در این بررسی یاری می کنند. البته در برخورد با هر مساله در معادلات دیفرانسیل، شکل هندسی دامنه، خطی یا غیر خطی بودن معادله، نوع شرایط مرزی و شرایط اولیه، هر کدام نقش تعیین

1-Korteweg-DeVrie
2-Sobolev spaces
3-Lichten Stain
4-Arnold
5-Marsden
6-Karter

کننده ای در روش بررسی جواب ها ایفا می کنند. روشی که برای بررسی رفتار جواب های معادلات غیر خطی هذلولوی روش انرژی[1] است. این روش دست مایه بسیاری از تحقیقات انجام شده در معادلات دیفرانسیل جزیی در دهه های اخیر می باشد. از پیشگامان این روش می توان از جیمزنولز[2] نام برد که دارای تحقیقات گسترده ای در نظریه الاستیسیتی[3] است. ایده اصلی بکارگیری این روش بررسی رفتار انرژی جواب ها (که خود نوعی نرم جواب های مساله را نشان می دهد)با توجه به شرایط مساله است. ابزارهایی که دربکار گیری این روش مورد استفاده قرار می گیرند با توجه به نوع مسائل متفاوت می باشند.

۱-۲- اهداف

در این مقاله برای اثبات وجود و یکتایی معادله موج یک بعدی با شرایط انتگرال غیرموضعی با استفاده از روش ضربی و به دست آوردن مقادیر ویژه و نوشتن توابع ویژه و الحاقی آن استفاده می کنیم و برای اثبات یکتایی با فرض اینکه مسئله دو جواب داشته باشد به رابطه تساوی آن دو جواب خواهیم رسید که نشان می دهد مسئله دارای جواب یکتا است. اما در مسئله دوم که در فصل چهارم بررسی می شود برای اثبات وجود جواب برای معادله غیرخطی هذلولوی با شرط بازخوری مرزی از روشهای استاندارد نمی توانیم استفاده کنیم ولی با تغییر مسئله معادل با آن با استفاده از روش Galerkin که تشکیل یک پایه متعامل برای فضا می کند و با استفاده از فرمول تغییرات ثابت در فضای هیلبرت نشان می دهد که فرمول تغییرات ثابت کراندار مثبت است. در این روش با فرض اینکه جواب ما تاکید خطی از عناصر پایه باشد و با فرض داشتن جواب w در فرمول تغییرات ثابت و نشان دادن مشتق های w به تعداد بیشترین مرتبه مشتق معادله غیرخطی نشان می دهد که فرمول تغییرات ثابت مقدار کران مثبت ثابت را اختیار می‌کند که این نشان دهنده این است که مسئله ما دارای جواب می باشد و با استفاده از لم aubin-lion نشان می دهد که زیردنباله ای از پایه های در نظر گرفته شده وجود دارد که همگرای قوی می باشد و سپس با توجه به خواص توابع مفروض معادله به کمک قضیه lion نشان داده می شود که این دنباله همگرای ضعیف می باشد و در ادامه با توجه به تابع انرژی و کرانهای در نظر گرفته شده در نامساوی نشان می دهیم که انحطاط تابع انرژی نمایی و به صفر میل می کند که با توجه به این می توان به پایداری و رفتار مجانبی جوابها پی برد.

1-Energy method
2-James.K Knowles
3-elasticity

فصـــل دوم

مفاهیم و پیش نیازها

مفاهیم و پیش‌نیازها

۲-۱- آنالیز تابعی معادلات مشتقات جزئی

۲-۱-۱- مقدمه

در این فصل به معرفی برخی از نمادها و ارائه تعاریف، لم ها، قضایا و نامساوی ها و آنالیز تابعی و بطور کلی مفاهیمی که در فصل‌های آینده با آنها سر و کار خواهیم داشت می پردازیم. در بخش نمادگذاری، نمادهایی را معرفی می‌کنیم که در فصول بعدی به کرات از آنها استفاده خواهد شد. از آنجا که در این مقاله و بخصوص در فصل چهارم مسائل مقدار مرزی در فضاهای تابعی سوبولو مورد بررسی قرار می گیرند، در ادامه به معرفی فضاهای سوبولو می پردازیم و چند ویژگی از این فضا را بر می شمریم.

۲-۱-۲- نماد گذاری

همانطور که می دانیم در معادلات دیفرانسیل جزیی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}$ را می توان به صورت u_x، u_{xx}, u_{xy} نیز نمایش داد. ما نیز در این تحقیق برای پرهیز از زیاده نویسی از نمادگذاری های زیر استفاده میکنیم:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{و} \quad \partial_i^k = \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \qquad (۲-۱-۲-۱)$$

$$\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u) \quad \text{و} \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 \qquad (۲-۱-۲-۲)$$

$$|\nabla^2 u|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i \partial_j u)^2 \qquad (۲-۱-۲-۳)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \quad \text{و} \quad \Delta^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i^2 \partial_j^2 \qquad (۲-۱-۲-۴)$$

$$\|u\|_\Omega^2 = \int_\Omega u^2 dx \qquad (۲-۱-۲-۵)$$

۲-۱-۳- فضای سوبولو

تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی در فضاهای تابعی که توسط ویژگی های توابع آن فضا و مشتقات آنها تعریف می شود، صورت می گیرد. فضاهای سوبولو ابزارهای مهمی را در این تجزیه و تحلیل در اختیار ما قرار می دهند. از این رو در این بخش مفاهیم کلی از این فضا را ارائه می کنیم. اما از آنجا که ارتباط تنگاتنگی بین فضاهای L^P و فضای سوبولو وجود دارد، نخست به یاد آوری کوتاهی از فضاهای L^P می‌پردازیم.

فضاهای L^P

فرض کنیم P $(P \leq 1)$ عدد حقیقی و مثبتی باشد. تابع اندازه پذیر u [1] را که روی $\Omega \subseteq R^n$ تعریف شده است را متعلق به فضای $L^P(\Omega)$ می گویند، هرگاه

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx < \infty \qquad (۲-۱-۳-۱)$$

از آنجا که

$$|u+v|^p \leq 2^p(|u|^p + |v|^p) \qquad (۲-۱-۳-۲)$$

می بینیم که مجموع دو تابع متعلق به $L^P(\Omega)$ باز هم در $L^P(\Omega)$ است. همچنین بدلیل آنکه برای تابع u متعلق به $L^P(\Omega)$، αu نیز در $L^P(\Omega)$ است، $\alpha u + \beta v$ نیز در آن است. لذا فضاهای L^P خطی هستند. برای هر $u \in L^P$ تعریف می کنیم:

$$\|u\|_p = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (۲-۱-۳-۳)$$

با توجه به این تعریف می بینیم که $\|u\|_p = 0$ اگر و تنها اگر تقریبا همه جا روی Ω، $u=0$ و اگر a عدد حقیقی مثبتی باشد در این صورت

$$\|\alpha u\|_p = |\alpha| . \|u\|_p \qquad (۲-۱-۳-۴)$$

در بخش های بعدی این فصل نشان می دهیم که برای $P \geq 1$

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \qquad (۲-۱-۳-۵)$$

فضای همه توابع کراندار اندازه پذیر روی Ω [2] را با $L^\infty(\Omega)$ نشان می دهیم. در این صورت $L^\infty(\Omega)$ یک فضای خطی است که با

$$\|u\|_\infty = ess\sup|u(x)| \qquad (۲-۱-۳-۶)$$

یک فضای خطی نرم دار است که در آن

۱- منظور از اندازه پذیر بودن u، اندازه پذیری به معنای لبگ برای تابع u می باشد.

۲- تابع های اندازه پذیر که بجز شاید روی یک زیر مجموعه با اندازه صفر از Ω کرندارند.

$$ess\sup f(x) = \inf\{M : mes\{x \in \Omega : u(x) > M\} = 0\ \} \qquad (۲-۱-۳-۷)$$

تعریف ۲-۱-۳-۱:

یک فضای خطی نرم دار، کامل گفته می شود هر گاه هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد، یعنی برای هر دنباله کوشی $\{u_n\}$ در این فضا یک عنصر u متعلق به این فضا وجود داشته باشد بطوری که $u_n \to u$. هر فضای خطی نرم دار کامل **فضای باناخ** نامیده می شود.اکنون قضیه مهم زیر را که به قضیه ریس- فیشر[1] مشهور است بدون اثبات بیان می کنیم:

قضیه ۲-۱-۳-۱

فضاهای L^Pفضاهای کامل هستند.

بنابر قضیه (۲-۱-۳-۱) و تعریف (۲-۱-۳-۱) از آنجا که فضاهای L^P، فضاهای نرم دار خطی هستند لذا می توان گفت که فضاهای L^P، باناخ می باشند.

تعریف فضای سوبولو

تعریف ۲-۱-۳-۲ فرض کنیم که Ω زیر مجموعه بازی در R^n باشد. برای $1 \le p < \infty$ فضای سوبولو به نمایش $W_{k.p}(\Omega)$ عبارتست از فضای همه توابعی مانند u که $u \in L^P(\Omega)$ بطوری که به ازای هر چند تایی مرتب

$$\alpha = (\alpha_1, ... \alpha_n) \in Z_+^n \qquad (۲-۱-۳-۸)$$

که در آن $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ و برای $|\alpha| \le k$ داشته باشیم

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega) \qquad (۲-۱-۳-۹)$$

در تعریف فوق از نماد

$$D^\alpha = D_1^\alpha D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n} \qquad (۲-۱-۳-۱۰)$$

که $\alpha = (\alpha_1, .. \alpha_n)$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$استفاده کرده ایم. صورت نمادین تعریف فوق عبارتست از:

$$W^{k.p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha; |\alpha| \le k\} \qquad (۲-۱-۳-۱۱)$$

فضای سوبولو $W^{k.p}(\Omega)$ با نرم

$$\|u\|_{W^{k.p}(\Omega\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega\Omega} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (۲-۱-۳-۱۲)$$

فضای خطی نرم دار می باشد. برای $p = 2$ فضای سوبولو را بصورت $H^k(\Omega)$ نمایش می دهیم:

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \qquad (۲-۱-۳-۱۳)$$

و برای $u \in H^k(\Omega)$ نرم u را با

$$\|u\|_{H(\Omega)} \qquad (۲-۱-۳-۱۴)$$

1-Riesez-Fischer

نمایش می دهیم.

روی $H^k(\Omega)$ ضرب داخلی زیر را تعریف می کنیم:

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha(u(x)).\overline{D^\alpha(v(x))}dx \qquad (۲-۱-۳-۱۵)$$

با این ضرب داخلی می توان نشان داد که فضای $H^k(\Omega)$ یک فضای هیلبرت است.

می دانیم که $C_\circ^\infty(\Omega)$ مجموعه توابع بی نهایت بار مشتق پذیری است که خارج از یک زیر مجموعه بسته از Ω (بخصوص روی مرز Ω) صفر می باشد. در اینجا ما با استفاده از نماد $W_\circ^{k,p}(\Omega)$ بستار $C_\circ^\infty(\Omega)$ در $W_\circ^{k,p}(\Omega)$ را نشان می دهیم. در حالت $p=۲$، این نمایش بصورت $H_\circ^k(\Omega)$ خواهد بود. اکنون قضیه زیر در مورد فضاهای سوبولو را بدون اثبات بیان می کنیم:

قضیه ۲-۱-۳-۲ $W_\circ^{k,p}(\Omega)$ یک فضای باناخ است. در حالت $p=۲$، $W^{k,p}(\Omega)$ با ضرب داخلی تعریف شده (۲-۱-۳-۱۵) یک فضای هیلبرت است.

تذکر: برای دیدن اثباتی از قضیه فوق مرجع [۱] در دسترس می باشد.

۲-۱-۴-چند نابرابری مهم

در این بخش چند نامساوی مهم را که در فصل های بعدی با آنها سروکارخواهیم داشت بیان و اثبات می کنیم و اما بیش از هر چیز به اثبات لم زیر می پردازیم:

لم ۲-۱-۴-۱:

فرض کنیم a و β دو عدد حقیقی نامنفی باشند و $0<\lambda<۱$ در این صورت

$$a^\lambda \beta^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda)\beta \qquad (۲-۱-۴-۱)$$

اثبات:

تابع ψ را بصورت زیر برای اعداد حقیقی و نامنفی t تعریف می کنیم

$$\psi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda \qquad (۲-۱-۴-۲)$$

در این صورت مشتق ψ عبارتست از

$$\psi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-۱} = \lambda(۱ - t^{\lambda-۱}) \qquad (۲-۱-۴-۳)$$

می دانیم که $\lambda-۱<0$. بنابراین برای $\psi'(t)<0, t<1$ و برای $\psi'(t)>0, t>۱$. بنابراین نقطه $t=1$ نقطه می نیمم ψ است. پس برای هر $t \ne ۱$

$$\psi(t) > \psi(۱) = 0 \qquad (۲-۱-۴-۵)$$

بنابراین با توجه به (۲-۱-۴-۲)

$$(۱-\lambda) + \lambda t \ge t^\lambda \qquad (۲-۱-۴-۵)$$

در (۲-۱-۴-۵) تساوی تنها در حالت $t=1$ برقرار است. حال برای $\beta \ne 0$ با قرار دادن $t = \dfrac{a}{\beta}$ در نامساوی اخیر بدست می آوریم:

$$(1-\lambda)+\lambda\frac{a}{\beta}\geq\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\lambda} \qquad (۲-۱-۴-۶)$$

در نتیجه

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda}\leq\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta \qquad (۲-۱-۴-۷)$$

که همان نتیجه مورد نظر است.

ما این لم را در اثبات نابرابری هولدر در قسمت بعد بکار می بریم و با استفاده از نامساوی هولدر نابرابری مینکوفسکی را ثابت می کنیم.

نابرابری هولدر[1]

اگـر p و q دو عـدد حقیقـی و نـا منفـی باشـند بطـوری کـه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $\Omega\subseteq R^n$ و $u\in L^p(\Omega)$ و $v\in L^q(\Omega)$.

$$\int_{\Omega}|uv|dx\left(\int_{\Omega}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|v|^q dx\right)=\frac{1}{q} \qquad (۲-۱-۴-۸)$$

اثبات: در حالت $q=\infty, p=1$ اثبات واضح است زیرا در این حالت اگر فرض کنیم که

$$\|v\|_{\infty}=M \qquad (۲-۱-۴-۹)$$

داریم (۲-۱-۴-۱۰)

$$\left\{\int_{\Omega}|uv|dx\leq\left(\int_{\Omega}|u|Mdx\right)=M\left(\int_{\Omega}|u|dx\right)=\|u\|_1\|v\|_{\infty}\right\}$$

حال فرض کنیم که $1<p<\infty$ و در نتیجه $1<q<\infty$. نخست فرض می کنیم که

$$\|u\|_p=\|v\|_q=1 \qquad (۲-۱-۴-۱۱)$$

با استفاده از لم (۲-۱-۴-۱) برای

$$a=|u|^p,\beta=|v|^q,\lambda=\frac{1}{p},1-\lambda=\frac{1}{q} \qquad (۲-۱-۴-۱۲)$$

داریم (۲-۱-۴-۱۳)

$$|u(x)v(x)|\leq\lambda|u(x)|^p+(1-\lambda)|v(x)|^q$$

با انتگرال گیری روی Ω از طرفین (۲-۱-۴-۱۳) داریم

$$\int_{\Omega}|uv|dx\leq\lambda\int_{\Omega}|u(x)|^p dx+(1-\lambda)\int_{\Omega}|v(x)|^q dx=1 \qquad (۲-۱-۴-۱۴)$$

برای $\|u\|_p=0$ و $\|v\|_q=0$ حکم ثابت است. فرض کنیم که

$$\|u\|_p\neq 0\ ,\ \|v\|_q\neq 0 \qquad (۲-۱-۴-۱۵)$$

در این صورت $\frac{u}{\|u\|_p}$, $\frac{v}{\|v\|_q}$ هر دو دارای نرم یک می باشند. با جایگذاری این دو تـابع در (۲-۱-۴-۱۴) خواهیم داشت

1-Holders inequality