دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

روش تفاضل متناهی فشرده در حل معادلات تحولی غیرخطی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

رحمان اکبری بنی

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی) آقای رحمان اکبری بنی

تحت عنوان

روش تفاضل متناهی فشرده در حل معادلات تحولی غیرخطی

در تاریخ ۲۵ بهمن ۱۳۸۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه — دکتر رضا مختاری

۲– استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر مهدی تاتاری

۳– استاد داور ۱ — دکتر فردین ساعدپناه (دانشگاه کردستان)

۴– استاد داور ۲ — دکتر حمیدرضا مرزبان

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر اعظم اعتماد

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از
تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

فصل اول مقدمه ۱

۱—۱ معادلات با مشتقات پاره‌ای ۱

۱—۲ معادلات تحولی ۲

فصل دوم روش تفاضل متناهی فشرده ٦

۲—۱ نمادگذاری‌های اولیه ٦

۲—۲ روش تفاضل متناهی ۷

۲—۲—۱ طرح تفاضلی صریح ۸

۲—۲—۲ طرح تفاضلی ضمنی ۹

۲—۲—۳ روش داگلاس ۹

۲—۲—۴ طرح تفاضل متناهی فشرده ۱۰

فصل سوم معادله‌ی شرودینگر ۱۴

۳—۱ معادله‌ی شرودینگر یک بعدی ۱۴

۳—۱—۱ حل معادله‌ی شرودینگر یک بعدی با استفاده از CFDM ۱۵

۳—۱—۲ پایداری ۱۷

۳—۱—۳ همگرایی ۲۱

۳—۱—۴ مثال‌ها و نتایج عددی ۲۴

۳—۲ معادله‌ی شرودینگر دو بعدی ۲۷

۳—۲—۱ حل معادله‌ی شرودینگر دو بعدی به کمک CFDM ۲۸

۳—۲—۲ پایداری ۳۲

۳—۲—۳ همگرایی ۳۴

۳–۲–۴ مثال‌ها و نتایج عددی ۳۶

فصل چهارم معادله‌ی برگرز ۴۴

۴–۱ معادله‌ی برگرز ۴۴

۴–۱–۱ روش کرانک–نیکلسون ۴۵

۴–۱–۲ روش شبه–ضمنی ۴۶

۴–۲ حل معادله‌ی برگرز با استفاده از CFDM و تبدیل هاپف–کُل ۴۶

۴–۲–۱ پایداری ۵۰

۴–۲–۲ همگرایی ۵۱

۴–۳ حل معادله‌ی برگرز به کمک CFDM و بدون استفاده از تبدیل هاپف–کُل ۵۳

۴–۳–۱ پایداری ۵۵

۴–۳–۲ همگرایی ۵۶

۴–۴ مثال‌ها و نتایج عددی ۵۸

فصل پنجم نمونه‌هایی دیگر از معادلات تحولی غیرخطی ۶۴

۵–۱ معادله‌ی GRLW ۶۴

۵–۱–۱ حل معادله‌ی GRLW با استفاده از CFDM ۶۵

۵–۱–۲ پایداری ۶۷

۵–۱–۳ همگرایی ۶۸

۵–۱–۴ مثال‌های عددی ۷۰

۵–۲ معادله‌ی KdV ۸۰

۵–۲–۱ حل معادله‌ی KdV با استفاده از CFDM ۸۰

۵–۲–۲ پایداری و همگرایی ۸۱

۵–۲–۳ مثال‌های عددی ۸۲

۵–۳ حل معادلاتی با مشتقات بالاتر از ۲ . . . . . ۸۵

۵–۴ ایده‌ی تحقیقاتی ۸۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۲

فهرست اسامی خاص ۹۵

مراجع ۹۷

چکیده:

چون از یک طرف بسیاری از پدیده‌های فیزیکی به صورت معادلات تحولی غیرخطی مدل می‌شوند و از طرف دیگر روش تفاضل متناهی فشرده دارای ویژگی‌های شاخص پایداری، کارایی و همگرایی مرتبه بالا است، در این پایان‌نامه قصد داریم به بررسی حل عددی برخی معادلات تحولی غیرخطی به کمک روش تفاضل متناهی فشرده بپردازیم. به همین منظور پس از بررسی کلیات و ویژگی‌های روش تفاضل متناهی فشرده به حل عددی برخی از معادلات تحولی غیر خطی مانند معادلات برگرز، شرودینگر یک و دو بعدی، GRLW و KdV می‌پردازیم.

رده بندی موضوعی: ۳۵Q۵۵، ۶۵M۰۶

کلمات کلیدی: روش تفاضل متناهی فشرده، معادلات تحولی غیرخطی.

فصل ۱

مقدمه

شاید تاکنون از خود پرسیده باشید که 'آیا می‌توان برای هر و یا دست کم بیشتر پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی و یا هر حرکتی در طبیعت معادله‌ای تعریف کرد؟' پاسخ این پرسش در ابتدا شاید کمی غیرممکن و یا دشوار به نظر برسد و نتوان به یقین گفت که این کار عملی است. اما به احتمال زیاد پس از پیدایش معادلات دیفرانسیل به خصوص معادلات با مشتقات پاره‌ای (PDEs) و به ویژه نوع معادلات تحولی پاسخ دادن به این سوال امکان‌پذیرتر شده است به طوری که دانشمندان توانسته‌اند برای بیشتر پدیده‌های فیزیکی مانند امواج روی آب، ترافیک خیابان‌ها و بسیاری از حرکت‌های موجود در طبیعت معادله‌ای تعریف کنند. امروزه معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای به قدری در ریاضیات، علوم طبیعی و مهندسی پرکاربرد شده‌اند که بعضی از آن به عنوان زبان بین رشته‌ای یاد می‌کنند.

۱ — ۱ معادلات با مشتقات پاره‌ای

چون معادلات تحولی حالت خاصی از PDEها می‌باشند پس بهتر است در مورد این معادلات بیشتر بدانیم. معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای را می‌توان به عنوان معادلاتی تفسیر نمود که در آن‌ها قاعده‌ی دیفرانسیل‌گیری نسبت به چند متغیر انجام می‌شود به عبارت دیگر یک PDE به زبان ساده یک معادله

است که در آن یک تابع چندمتغیره و مشتقات پاره‌ای آن ظاهر می‌گردند و این به زبان ریاضی یعنی

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\ldots\right)=0$$

که در آن $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ تابعی نامعلوم است. اگرچه متغیرهای x_1،...،x_n عمومی هستند ولی به طور معمول از نماد x برای نمایش متغیر مکان و از نماد t برای نمایش متغیر زمان استفاده می‌شود.
مرتبه‌ی یک PDE عبارت است از بالاترین مرتبه‌ی مشتقی که در آن ظاهر می‌شود. یک PDE خطی نامیده می‌شود هرگاه تابع u و مشتقات پاره‌ای آن به صورت خطی ظاهر شده باشند. به عنوان مثال معادله‌ی

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

یک PDE غیرخطی مرتبه اول معروف به معادله‌ی ناچسبنده‌ی برگرز است در حالی که معادله‌ی هلمهولتز یعنی

$$\Delta u+k^2u=f$$

یک معادله‌ی خطی مرتبه دو از نوع معادلات بیضوی است. عملگر Δ که با ∇^2 نیز نمایش داده می‌شود به عملگر لاپلاس معروف بوده و برای تابع $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ متغیره‌ی n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta u=\nabla^2u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}.$$

معادلات

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\Delta u=0$$

و

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\Delta u=0$$

که به ترتیب به معادلات گرما و موج معروف هستند نمونه‌هایی از معادلات سهموی و هذلولوی می‌باشند. مباحث تکمیلی در خصوص معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی را به مراجع نظری معادلات با مشتقات پاره‌ای ارجاع می‌دهیم [۲۴].

۱ — ۲ معادلات تحولی

در گذشته معادلات با مشتقات پاره‌ای به دو دسته‌ی مستقل از زمان و وابسته به زمان تقسیم می‌شدند و به این صورت تفاوتی بین مسایلی که در آن‌ها زمان نقش دارد و آن مسایلی که در آن‌ها زمان هیچ نقشی

ندارد قایل می‌شدند. امروزه مسایلی مانند معادله‌ی هلمهولتز که در آن‌ها زمان به صراحت وجود ندارد به مسایل حالت مانا یا مسایل موازنه معروف هستند حال آن که اگر جواب یک PDE به طور صریح شامل زمان باشد با یک مساله‌ی تحولی مواجه هستیم.
تعریف دیگری از معادلات تحولی که امروزه در برخی مراجع یافت می‌شود و نه تنها به معادله بلکه به مدل مساله نیز بستگی دارد به صورت زیر ارایه می‌شود.

تعریف ۱.۱ معادله‌ی تحولی را می‌توان به عنوان قاعده‌ی دیفرانسیل‌گیری از یک مساله، در یک گستره از زمان تفسیر کرد.

معادلات تحولی را می‌توان به دو دسته‌ی کلی زیر تقسیم‌بندی کرد

۱) معادلات تحولی خطی،

۲) معادلات تحولی غیرخطی.

معادلات گرما و موج نمونه‌هایی از مهم‌ترین معادلات تحولی خطی هستند و معادله‌ی برگرز

$$u_t + uu_x = \epsilon u_{xx},$$

معادله‌ی شرودینگر

$$iu_t + \eta u_{xx} + q|u|^p u = ۰,$$

معادله‌ی RLW (Regularized long wave)

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{txx} = ۰,$$

معادله‌ی KdV (Korteweg-de Vries)

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = ۰,$$

معادله‌ی KdV مرتبه‌ی ۵

$$u_t + au^m u_x + bu^m u_{xxx} + u_{۵x} = ۰,$$

معادله‌ی KS (Kuramoto-Sirashinsky)

$$u_t + uu_x + au_{xx} + \nu u_{۴x} = ۰,$$

معادله‌ی CH (Camassa-Holm)

$$u_t + ۲\beta u_x + \alpha uu_x - u_{txx} = ۲u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

و معادله‌ی KG (Klein-Gordon)

$$u_{tt} + \lambda u_{xx} + g(u) = f(x,t)$$

از معروف‌ترین معادلات تحولی غیرخطی به شمار می‌آیند.
معادلات تحولی از مهم‌ترین و پرکابردترین معادلاتی می‌باشند که در بیشتر زمینه‌ها مانند مکانیک سیالات، ترافیک، فیزیک هسته‌ای، دینامیک ذره‌ای، موج‌های شوک، یون‌های صوتی امواج پلاسما و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه نقش معادلات تحولی در مدل‌سازی مسایل متنوع به قدری اساسی و کلیدی است که کتاب‌های متعدد و مجلات بسیاری درباره آن‌ها منتشر می‌شود [۵۶، ۵۰، ۴۴]. شایان ذکر است که در این پایان‌نامه به طور ویژه به بررسی معادلات تحولی غیرخطی می‌پردازیم.
سعی در حل عددی معادلات تحولی نیز در راستای پیدایش آن‌ها شروع شد به طوری که روش‌های عددی متنوعی برای حل این نوع معادلات مورد استفاده قرار گرفته است [۵۲، ۲۸، ۶، ۲]. اما روشی نسبت به بقیه برتری دارد که دست کم دارای ویژگی‌های زیر باشد

۱) با شرایط اولیه و مرزی متنوع سازگار باشد،

۲) دارای دقت بالا، هم در زمان و هم در مکان باشد،

۳) از تعداد کمتری از نقاط شبکه استفاده کند تا بتوان با صرف هزینه و وقت کمتری مساله را حل کرد،

۴) قابل تعمیم برای معادلات دیگر باشد.

در آغاز روش تفاضل متناهی (FDM) را گزینه‌ی مناسبی برای حل PDEها می‌دانستند. FDM یک روش سنتی و کلاسیک به حساب می‌آید که اساس کار آن استفاده‌ی هنرمندانه از بسط تیلور است. اما یکی از مشکلات اساسی این روش، دقت پایین آن است که برای رفع این عیب باید از تعداد بیشتری از نقاط شبکه در طرح تفاضلی استفاده کرد که نه تنها باعث افزایش پهنای نوار ماتریس نهایی شده و هزینه‌ی محاسبات را افزایش می‌دهد بلکه در کرانه‌ها مشکلات محاسباتی بیشتری خواهیم داشت. با معرفی روش تفاضل متناهی فشرده (CFDM) این مشکل برطرف شد. همان‌طور که در فصل بعد مشاهده می‌شود CFDM مرتبه‌ی همگرایی بالایی دارد و نه تنها پهنای نوار ماتریس نهایی افزایش نمی‌یابد بلکه در کرانه‌ها با مشکلات محاسباتی کمتری مواجه می‌شویم.
شاید به جرات بتوان گفت که داگلاس نخستین روش تفاضل متناهی فشرده را با ترکیب تقریب پاده و FDM برای ارتقای مرتبه‌ی همگرایی روش کرانک–نیکلسون در حل معادله‌ی گرما ابداع کرده است [۲۱]. ولی کسی که به طور جدی به بررسی حل معادلات دیفرانسیل به کمک CFDM پرداخت

کُلاتز در سال ۱۹۶۰ با روشی به نام تفاضل متناهی هرمیتی بود [۱۵]. روش وی امروزه به دلیل استفاده از نقاط کمتر شبکه به روش تفاضل متناهی فشرده معروف است. کولن نیز در سال ۱۹۷۴ و در حین کار با روش گالرکین، طرحی برای محاسبه‌ی عبارت $\frac{\partial u}{\partial x}$ ابداع نمود [۱۶]. بعد از آن‌ها، هیرش نیز در سال ۱۹۷۵ معادلاتی را در زمینه‌ی مکانیک سیالات با استفاده از CFDM با بالاترین درجه‌ی دقت در آن زمان حل نمود[۳۰]. سیمنت طرح تفاضلی ضمنی فشرده را با مرتبه‌ی بالا در سال ۱۹۷۵ برای محاسبه‌ی معادله‌ی موج به کار برد [۱۳] و در سال ۱۹۷۸ این طرح را برای حل معادلات سهموی مورد استفاده قرار داد [۱۲]. در سال ۱۹۹۲ لِلِ مقاله‌ای منتشر کرد که در آن حالت‌های کلی طرح ساخت این گونه روش‌ها را مورد بررسی قرار داد [۴۱]. به تازگی نیز ژیه و همکاران با به کار بردن CFDM، روش‌هایی برای حل معادله‌های برگرز و شرودینگر معرفی کرده‌اند که از دقت بیشتری نسبت به دیگر روش‌ها برخوردار هستند [۵۷، ۵۸].

در فصل دوم این پایان‌نامه، به تشریح روش تفاضل متناهی فشرده می‌پردازیم. فصل‌های سوم و چهارم را به ترتیب به CFDM ژیه در حل معادلات شرودینگر یک و دو بعدی و برگرز اختصاص داده‌ایم. در فصل پایانی به چگونگی پیاده‌سازی طرح تفاضلی فشرده در حل برخی معادلات تحولی غیرخطی خواهیم پرداخت.

فصل ۲

روش تفاضل متناهی فشرده

در فصل پیش اشاره کردیم که معادلات با مشتقات پاره‌ای و معادلات تحولی را کمتر با روش تفاضل متناهی سنتی محاسبه می‌کنند، چون اگر بخواهیم دقت را افزایش دهیم باید از تعداد بیشتری از نقاط شبکه استفاده کنیم که باعث افزایش پهنای نوار ماتریس نهایی شده و به علاوه در کرانه‌ها مشکلات محاسباتی بیشتری خواهیم داشت. اما در روش تفاضل متناهی فشرده نه تنها پهنای نوار ماتریس نهایی افزایش نمی‌یابد بلکه در کرانه‌ها با مشکلات کمتری مواجه می‌شویم. در این فصل با پیاده‌سازی روش تفاضل متناهی فشرده بر روی چند مثال ساده، به تشریح این روش می‌پردازیم.

۲—۱ نمادگذاری‌های اولیه

بازه‌ی $[a,b]$ را در نظر گرفته و فرض کنید برای اعداد طبیعی M و N قرار دهیم $h=(b-a)/M$ و $k=T/N$ که در آن T اشاره به زمان پایانی دارد. به علاوه فرض کنید $x_i=a+ih$ برای $i=۰,۱,...,M$ و $t_n=nk$ برای $n=۰,۱,...,N$. h و k به ترتیب بر اندازه گام مکان و زمان دلالت دارند.
با فرض $u_i^n=u(x_i,t_n)$ نمادهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$\delta_x u_i^n = u_{i+۱/۲}^n - u_{i-۱/۲}^n, \qquad \partial_t u_i^n = \frac{u_i^{n+۱}-u_i^n}{k}, \qquad \triangle_t u_i^n = \frac{u_i^{n+۱}-u_i^{n-۱}}{۲k},$$

$$\delta_x^۲ u_i^n = (u_{i+۱}^n - ۲u_i^n + u_{i-۱}^n), \qquad \triangle_x u_i^n = \frac{u_{i+۱}^n - u_{i-۱}^n}{۲h}, \qquad D_x u_i^n = \frac{۱}{h}(u_{i+۱}^n - u_i^n),$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{۲}{h}\sinh^{-۱}\frac{\delta_x}{۲} = \frac{۱}{h}\left(\delta_x - \frac{۱^۲}{۲^۲.۳!}\delta_x^۳ + \frac{۱^۲.۳^۲}{۲^۴.۵!}\delta_x^۵ - + \cdots\right),$$
$$D^۲ = \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} = \frac{۱}{h^۲}\left(\delta_x^۲ - \frac{۱}{۱۲}\delta_x^۴ + \frac{۱}{۹۰}\delta_x^۶ - + \cdots\right).$$

برای اطلاعات بیشتر به [۳۷] مراجعه کنید. در بیشتر مواقع عملگر $D^۲$ را تا مرتبه‌ی دو تقریب می‌زنیم مگر آن که خلاف آن بیان شود، بنابراین داریم

$$D^۲u_i^n \simeq \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲u_i^n = \frac{u_{i+۱}^n - ۲u_i^n + u_{i-۱}^n}{h^۲}.$$

در ادامه برای راحتی، بردارها و ماتریس‌های زیر را معرفی می‌کنیم

$$U^n = (U_۱^n, U_۲^n, ..., U_{M-۱}^n)^T,$$

$$T_۱ = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۱۰ & ۱ & \ddots & \vdots \\ ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & ۱ & ۱۰ & ۱ \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۱۰ \end{bmatrix}, \quad T_۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ & \ddots & \vdots \\ ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & -۲ \end{bmatrix},$$

$$T_۳ = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۱ & \ddots & \vdots \\ ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & ۱ & ۴ & ۱ \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}, \quad T_۴ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & \ddots & \vdots \\ ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & \cdots & ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$A_p = \mathsf{diag}((U_۱^n)^p, (U_۲^n)^p, ..., (U_{M-۱}^n)^p), \qquad B_p = A_p\mathsf{diag}(T_۳^{-۱}T_۴U^n).$$

U^n بر بردار مرتبه‌ی $M-۱$ و سایر نمادها بر ماتریس مربعی مرتبه‌ی $M-۱$ دلالت دارند. توجه داشته باشید که p یک عدد طبیعی می‌باشد که برای هر معادله‌ی تحولی مقدار آن متفاوت است و معنی خاصی دارد.

۲–۲ روش تفاضل متناهی

در این بخش طرح‌های تفاضلی صریح و ضمنی و همچنین روش‌های کرانک–نیکلسون و داگلاس را در حل معادله‌ی یک بعدی گرما بررسی می‌کنیم. سپس با ارایه‌ی دو مثال، آن چه در CFDM می‌گذرد را

تشریح کرده و از تبدیل طرح صریح به ضمنی، یک طرح تفاضلی فشرده برای معادله‌ی گرما می‌سازیم. خواهیم دید که تقریب پاده در روش داگلاس در حل معادله‌ی گرما یک روش تفاضل متناهی فشرده به شمار می‌آید. در پایان، با ارایه‌ی مثالی نشان می‌دهیم که روش داگلاس با طرح ساخته شده برابری می‌کند.

به کمک بسط تیلور، $u_i^{n+1} = u(x_i, t_n + k)$ را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = u(x_i, t_n + k) &= (1 + k\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots)u(x_i, t_n) \\ &= \exp(k\frac{\partial}{\partial t})u(x_i, t_n) = \exp(k\frac{\partial}{\partial t})u_i^n, \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به صورت ساده‌تر زیر نوشت

$$u_i^{n+1} = \exp(k\frac{\partial}{\partial t})u_i^n. \qquad (1.2)$$

۲–۲–۱ طرح تفاضلی صریح

در طرح تفاضلی صریح، u در زمان $n+1$ به طور صریح بر حسب u در زمان‌های قبلی بیان می‌شود. به عنوان مثال یک طرح صریح برای معادله‌ی گرمای یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.2)$$

با بسط دو جمله‌ی اول تابع نمایی در رابطه‌ی (۱.۲) و در نظر گرفتن $\frac{\partial}{\partial t} = D^2$، به صورت زیر ساخته می‌شود

$$U_i^{n+1} = (1 + r\delta_x^2)U_i^n$$

که در آن $r = k/h^2$ و U_i^n تقریبی برای $u(x_i, t_n)$ است. با استفاده از تعریف δ_x^2، می‌توان طرح صریح را به صورت گسترده‌ی زیر بازنویسی کرد

$$U_i^{n+1} = (1 - 2r)U_i^n + r(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n). \qquad (3.2)$$

(۳.۲) یک طرح ۴ نقطه‌ای صریح با مرتبه همگرایی $O(k + h^2)$ بوده و به ازای هر $0 < r \leq 1/2$ پایدار است [۴۲].

۲–۲–۲ طرح تفاضلی ضمنی

در یک طرح تفاضلی ضمنی، u در زمان $n+۱$ به طور ضمنی بر حسب u در زمان‌های قبلی بیان می‌شود. اگر رابطه‌ی (۱.۲) را به صورت

$$u_i^{n+۱} = \exp(\frac{۱}{۲}k\frac{\partial}{\partial t})\exp(\frac{۱}{۲}k\frac{\partial}{\partial t})u_i^n \qquad (۴.۲)$$

نوشته و $\exp(-\frac{۱}{۲}k\frac{\partial}{\partial t})$ را به دو طرف رابطه‌ی (۴.۲) اعمال کرده، در نتیجه داریم

$$\exp(-\frac{۱}{۲}k\frac{\partial}{\partial t})u_i^{n+۱} = \exp(\frac{۱}{۲}k\frac{\partial}{\partial t})u_i^n. \qquad (۵.۲)$$

اینک یک طرح ضمنی برای معادله‌ی گرما را با توجه به (۵.۲)، می‌توان به صورت زیر ساخت

$$\exp(-\frac{۱}{۲}kD^۲)u_i^{n+۱} = \exp(\frac{۱}{۲}kD^۲)u_i^n. \qquad (۶.۲)$$

حال اگر از تقریب $D^۲ \simeq \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲$ استفاده کرده و فقط دو جمله از بسط تیلور تابع نمایی را در نظر بگیریم، روش کرانک–نیکلسون که یک طرح ضمنی می‌باشد به صورت زیر به دست می‌آید

$$(۱ - \frac{۱}{۲}r\delta_x^۲)U_i^{n+۱} = (۱ + \frac{۱}{۲}r\delta_x^۲)U_i^n$$

که با توجه به تعریف $\delta_x^۲$ می‌توان آن را به صورت گسترده‌ی زیر بازنویسی کرد

$$(۱ + r)U_i^{n+۱} - \frac{۱}{۲}r(U_{i+۱}^{n+۱} + U_{i-۱}^{n+۱}) = (۱ - r)U_i^n + \frac{۱}{۲}r(U_{i+۱}^n + U_{i-۱}^n).$$

روش کرانک–نیکلسون، یک طرح ۶ نقطه‌ای ضمنی با ماتریس ضرایب سه قطری و مرتبه‌ی همگرایی $O(k^۲ + h^۲)$ می‌باشد که پایداری و همگرایی آن به ازای هر $r > ۰$ تضمین شده است [۴۲].

۲–۲–۳ روش داگلاس

داگلاس برای این که مرتبه‌ی همگرایی روش کرانک–نیکلسون را بدون اضافه شدن نقاط شبکه ارتقا دهد عملگر $D^۲$ را تا جمله‌ی دوم در نظر گرفت، یعنی

$$D^۲ \simeq \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲(۱ - \frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲)$$

و با توجه به بسط تیلور

$$\frac{۱}{۱ + x} = ۱ - x + \cdots \simeq ۱ - x,$$

$D^۲$ را به صورت زیر تقریب زد

$$\frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲(۱-\frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲)\simeq\frac{۱}{h^۲}\frac{\delta_x^۲}{۱+\frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲}.$$

اینک با توجه به $D^۲\simeq\frac{۱}{h^۲}\frac{\delta_x^۲}{۱+\frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲}$ و $\exp(x)\simeq۱+x$، (۶.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{k}{h^۲}\delta_x^۲(۱+\frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲)^{-۱}\right)U_i^{n+۱}=\left(۱+\frac{۱}{۲}\frac{k}{h^۲}\delta_x^۲(۱+\frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲)^{-۱}\right)U_i^n \qquad (۷.۲)$$

و با اعمال عملگر $۱+\frac{۱}{۱۲}\delta_x^۲$ به دو طرف (۷.۲)، طرح تفاضلی زیر به دست می‌آید

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}(r-\frac{۱}{۶})\delta_x^۲\right)U_i^{n+۱}=\left(۱+\frac{۱}{۲}(r+\frac{۱}{۶})\delta_x^۲\right)U_i^n.$$

روش داگلاس یک طرح ۶ نقطه‌ای ضمنی با مرتبه‌ی همگرایی $O(k^۲+h^۴)$ و ماتریس ضرایب سه قطری بوده و به ازای هر $r>۰$ پایدار و همگرا است [۴۲].

تذکر **۱.۲** با توجه به سه طرح بیان شده، چنین برداشت می‌شود که روش داگلاس از دو طرح دیگر بهتر است، چون دارای مرتبه‌ی همگرایی بالاتری است.

۲–۲–۴ طرح تفاضل متناهی فشرده

در این بخش قصد داریم با ارایه‌ی مثال‌های ۲.۲ و ۳.۲ به تشریح CFDM بپردازیم.

مثال **۲.۲** معادله‌ی

$$w=u_x$$

را در نظر بگیرید که در آن $w=u_t$. اگر بخواهیم روند FDM را در نقطه‌ی (x_i,t) دنبال کنیم، داریم

$$w_i=(u_x)_i=Du_i\simeq\triangle_x u_i+O(h^۲)=\frac{u_{i+۱}-u_{i-۱}}{۲h}+O(h^۲). \qquad (۸.۲)$$

برای تشریح طرح تفاضلی فشرده، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم.
با توجه به بسط خطای برشی (۸.۲)، یعنی

$$w_i=(u_x)_i\simeq\triangle_x u_i-\frac{h^۲}{۶}(u_{xxx})_i-\frac{h^۴}{۵!}(u_{۵x})_i-\cdots,$$

می‌توان یک رابطه‌ی تقریبی با مرتبه‌ی بالاتر به صورت زیر ساخت

$$w_i=(u_x)_i\simeq\triangle_x u_i-\frac{h^۲}{۶}D^۲(Du_i)+O(h^۴)=\triangle_x u_i-\frac{h^۲}{۶}D^۲w_i+O(h^۴). \qquad (۹.۲)$$

حال با استفاده از $D^۲ \simeq \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲$، (۹.۲) به صورت زیر در می آید

$$\frac{۱}{۶}(w_{i+۱} + ۴w_i + w_{i-۱}) = \frac{۱}{۲h}(u_{i+۱} - u_{i-۱}). \qquad (۱۰.۲)$$

(۱۰.۲) را می‌توان به گونه‌ای دیگر نیز محاسبه نمود. با استفاده از تقریب $Du_i \simeq \triangle_x u_i$، داریم

$$w_i = (u_x)_i \simeq \triangle_x u_i - \frac{h^۲}{۶}D^۲(\triangle_x u_i) + O(h^۴) = \triangle_x(۱ - \frac{h^۲}{۶}D^۲)u_i + O(h^۴). \qquad (۱۱.۲)$$

$\frac{۱}{۱-\frac{h^۲}{۶}D^۲}$ را بر دو طرف (۱۱.۲) اعمال کرده و با استفاده از رابطه‌ی تقریبی

$$(۱ - \frac{h^۲}{۶}D^۲)^{-۱} \simeq ۱ + \frac{h^۲}{۶}D^۲,$$

(۱۰.۲) به دست می آید. △

مثال ۳.۲ معادله‌ی گرمای یک بعدی را در نظر بگیرید

$$w = u_{xx}$$

که در آن $w = u_t$. مانند مثال قبل اگر روند FDM را دنبال کنیم، در نقطه‌ی (x_i, t) داریم

$$w_i = (u_{xx})_i = D^۲u_i = \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲ u_i + O(h^۲) = \frac{u_{i+۱} - ۲u_i + u_{i-۱}}{h^۲} + O(h^۲) \qquad (۱۲.۲)$$

در حالی که روند طرح تفاضلی فشرده به صورت زیر است.
معادله‌ی (۱۲.۲) دارای خطای برشی $\frac{h^۲}{۱۲}(u_{۴x})_i$ می‌باشد. بنابراین (۱۲.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$w_i = (u_{xx})_i = D^۲u_i \simeq \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲ u_i - \frac{h^۲}{۱۲}(u_{۴x})_i - \frac{h^۴}{۳۶۰}(u_{۶x})_i - \cdots.$$

اگر (۱۲.۲) را از اولین جمله‌ی خطای برشی کم کنیم، خواهیم داشت

$$w_i = (u_{xx})_i \simeq \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲ u_i - \frac{h^۲}{۱۲}D^۴u_i + O(h^۴) = \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲ u_i - \frac{h^۲}{۱۲}D^۲w_i + O(h^۴). \qquad (۱۳.۲)$$

حال با ساده‌سازی (۱۳.۲) داریم

$$\frac{۱}{۱۲}(w_{i+۱} + ۱۰w_i + w_{i-۱}) = \frac{۱}{h^۲}(u_{i+۱} - ۲u_i + u_{i-۱}). \qquad (۱۴.۲)$$

(۱۴.۲) را می‌توان به گونه‌ای دیگر نیز محاسبه نمود. معادله‌ی (۱۳.۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$w_i = (u_{xx})_i = \frac{۱}{h^۲}\delta_x^۲(۱ - \frac{h^۲}{۱۲}D^۲)u_i + O(h^۴) \qquad (۱۵.۲)$$

سپس $\frac{۱}{۱-\frac{h^۲}{۱۲}D^۲}$ را بر دو طرف (۱۵.۲) اعمال کرده و با استفاده از تقریب

$$(۱ - \frac{h^۲}{۱۲}D^۲)^{-۱} \simeq ۱ + \frac{h^۲}{۱۲}D^۲,$$

(۱۴.۲) به دست می‌آید. △

همان طور که در دو مثال اخیر ملاحظه می‌شود، CFDM از خطای برشی FDM استفاده کرده و مرتبه‌ی روش را ارتقا می‌دهد. همچنین مشاهده نمودیم که روش داگلاس یک CFDM به حساب می‌آید. بنابراین همان ویژگی‌های روش داگلاس نیز برای CFDM صادق است که عبارتند از بالا بردن مرتبه‌ی همگرایی بدون اضافه شدن نقاط شبکه و پهنای کم نوار ماتریس نهایی. با توجه به مثال‌های ۲.۲ و ۳.۲ می‌توان یک تعریف ساده برای CFDM به صورت زیر بیان نمود.

تعریف **۴.۲** CFDM همان روش سنتی تفاضل متناهی می‌باشد که در آن معادله‌ی تفاضلی را از اولین جمله‌ی (جملات) خطای برشی کم کرده تا مرتبه‌ی روش بالاتر رود بدون آن که تعداد نقاط طرح افزایش یابند.

تذکر **۵.۲** توجه کنید که می‌توانیم با استفاده از جملات بیشترِ خطای برشی، دقت روش را بالاتر ببریم. همچنین برای مشتقات بالاتر از ۲ نیز می‌توان از این روش استفاده کرد که در فصل پنجم بیشتر به این موضوع خواهیم پرداخت.

در ادامه مثالی را بیان می‌کنیم و در آن به بررسی دقت روش‌های کرانک–نیکلسون، داگلاس و CFDM در حل معادله‌ی گرما می‌پردازیم.

مثال **۶.۲** معادله‌ی گرما را با شرایط اولیه و مرزی زیر در نظر بگیرید

$$u_t = u_{xx}, \qquad ۰ < x < \pi, \qquad t > ۰$$

$$u(x, ۰) = \sin(x), \qquad ۰ \le x \le \pi$$

$$u(۰, t) = u(\pi, t) = ۰, \qquad t \ge ۰$$

جدول ۲—۱: مقایسه‌ی دقت روش‌های کرانک—نیکلسون، داگلاس و CFDM.

گام زمانی	$T.S$	E_{CN}	E_D	E_C
۱	۰/۹۹۴۴۹۷	$۱/۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۱۱}$
۱۶	۰/۹۱۵۵۰۷	$۱/۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۱۰}$
۸۰	۰/۶۴۳۱۴۶	$۵/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۰ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۷/۰ \times ۱۰^{-۱۰}$
۱۶۰	۰/۴۱۳۶۳۷	$۶/۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۰ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۹/۰ \times ۱۰^{-۱۰}$
۳۲۰	۰/۱۷۱۰۹۶	$۵/۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۵ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۷/۵ \times ۱۰^{-۱۰}$

تابع $u(x,t) = \exp(-t)\sin x$ جواب دقیق این مساله می‌باشد. در جدول ۲—۱ مقدار دقیق (T.S) و نیز مقدار خطای عددی تابع را به کمک ۳ روش کرانک—نیکلسون (E_{CN})، داگلاس (E_D) و CFDM (E_C) در نقطه‌ی $\pi/۲$ مشاهده می‌نمایید. این جواب‌ها به ازای مقادیر $h = \frac{\pi}{۳۰}$ و $r = \frac{۱}{\sqrt{۲۰}}$ و گام‌های زمانی مختلف به دست آمده‌اند. همان گونه که در این جدول ملاحظه می‌کنید، روش‌های داگلاس و CFDM دارای خطاهایی مشابه هم بوده و از روش کرانک—نیکلسون به مراتب دقیق‌تر می‌باشند. ∆

با توجه به مباحث مطرح شده در این فصل، در می‌یابیم که CFDM دارای ویژگی‌های بارزی می‌باشد که آن را از دیگر طرح‌های عددی متمایز کرده است. این ویژگی‌ها عبارتند از

۱) بالا بردن مرتبه‌ی همگرایی بدون اضافه شدن نقاط شبکه،

۲) ماتریس ضرایب نواری که در بهترین حالت سه قطری می‌باشد.