دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مکانیک

آنالیز مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک و کاربرد آن بر روی یک تیر با جرم متحرک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

اسماعیل قربانی

استاد راهنما

دکتر مهدی کشمیری

۱۳۹۰

به نام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مکانیک

آنالیز مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک و کاربرد آن بر روی یک تیر با جرم متحرک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

اسماعیل قربانی

استاد راهنما

دکتر مهدی کشمیری

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مکانیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک آقای اسماعیل قربانی

تحت عنوان

آنالیز مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک و کاربرد آن بر روی یک تیر با جرم متحرک

در تاریخ ۹۰/۱۲/۱۶ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مهدی کشمیری
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر سعید ضیایی راد
۳- استاد داور	دکتر حمیدرضا میردامادی
۴- استاد داور	دکتر مهدی مقیمی زند
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر محمدرضا سلیم‌پور

تقدیر و تشکر

استاد راهنما نقش زیادی در پیشرفت یک پروژه کارشناسی ارشد ایفا می‌کند. ولی به نظر من، علاوه بر کمک علمی و تکنیکال برای حل مشکلات علمی، مهم‌ترین خصیصه یک استاد میزان تأثیر او بر روی دانشجو از نظر اخلاق است. بر خود واجب می‌دانم از استاد عزیزم جناب دکتر مهدی کشمیری تشکر کنم که همواره با حوصله فراوان برای پیشبرد پروژه راهنمای من بوده است. تشکر می‌کنم از ایشان نه فقط به خاطر آموزش و یادآوری نکات علمی، بلکه به دلیل نکات اخلاقی زیادی که از ایشان در طی این مدت کوتاه آموخته‌ام و بر خود می‌بالم که شاگرد ایشان بوده و هستم.

همچنین از راهنمایی‌ها و کمک جناب دکتر سعید ضیایی راد، استاد مشاور پروژه، کمال تشکر را دارم که همیشه با لبی خندان پذیرای بنده بوده‌اند و مشاوره و راهنمایی‌های ایشان نقش زیادی در پیشرفت پروژه داشته است.

از جناب دکتر مهران قمشی بزرگی به دلیل راهنمایی‌های ایشان برای تکمیل فصل پنجم (استفاده از روش اختلالی هموتوپی) تشکر می‌کنم و همچنین از جناب دکتر حسن مسجدیان نیز که در ابتدای پروژه اطلاعات زیادی در اختیار بنده قرار داده‌اند نیز، کمال تشکر را دارم.

در انتها نیز از همه عزیزانی که همواره همراه من بوده‌اند و دلگرمی آن‌ها کمک زیادی به من در طول انجام پروژه کرده است قدردانی می‌کنم و دستشان را به گرمی می فشارم.

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

... نهال را باران باید تا شود بر غبار نشسته مرهم تشنگی و سیرابش کند از آب حیات،
و آفتاب باید تا بتابد نیرو را و محکم کند شاخه های تازه روییده را برای به ثمر رسیدن،
به نام مادر، بوسه ای باید زد دست هایی را که می شویند غبار خستگی روزگار را و سیراب
می کنند روح تشنه را.
به نام پدر، بوسه ای باید زد دست هایی را که می تابانند نیرو را و محکم می کنند پایه های
زندگی را.

تقدیم به پدر همیشه حامی و مادر همیشه عزیزم...

اسماعیل قربانی

زمستان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب ..... هشت

چکیده ۱

فصل اول: مقدمه ۲

۱-۱ مقدمه‌ای بر آنالیز مودال ۳

۱-۱-۱ فرض‌های اولیه آنالیز مودال ۵

۱-۲ سیستم‌های خطی متغیر با زمان ۷

۱-۳ مروری بر کارهای انجام شده ۹

۱-۴ تعریف مسئله و اهداف آن ۱۴

۱-۵ ساختار نوشتاری پایان نامه ۱۵

فصل دوم: آنالیز مودال سی‌ستم‌های متغیر با زمان در حوزه زمان ۱۷

۲-۱ مقدمه ۱۸

۲-۲ معادلات حاکم بر مسئله برای شناسایی پارامترهای مودال سیستم‌های متغیر با زمان در حوزه زمان ۱۹

۲-۲-۱ پارامترهای مودال یک سیستم نامتغیر با زمان ۱۹

۲-۲-۲ شبه پارامترهای مودال سیستم خطی متغیر با زمان ۲۰

۲-۲-۳ قانون تشابه برای سیستم‌های متغیر با زمان ۲۱

۲-۲-۴ الگوریتم شناسایی شبه پارامترهای مودال ۲۲

۲-۳ آنالیز مودال یک تیر با جرم متحرک ۲۷

۲-۴ جمع‌بندی ۳۵

فصل سوم: تبدیل هیلبرت هانگ و استفاده از آن برای شناسایی سیستم‌های خطی متغیر با زمان ۳۶

۳-۱ مقدمه ۳۷

۳-۲ تبدیل هیلبرت ۳۸

۳-۳ فاز و فرکانس لحظه‌ای ۴۱

۳-۴ روش تجزیه مود تجربی ۴۳

۳-۵ تحلیل مودال پاسخ آزاد یک سیستم متغیر با زمان ۴۸

۳-۶ تحلیل مودال پاسخ اجباری یک سیستم متغیر با زمان ۵۱

۳-۷ مدل‌سازی عددی ۵۴

۳-۷-۱ استخراج پارامترهای مودال یک سیستم چند درجه آزادی LTI ۵۴

۳-۷-۲ استخراج فرکانس طبیعی معادله ماتیو ۵۷

۳-۷-۳ استخراج فرکانس‌های طبیعی اول و دوم یک تیر تحت اثر جرم متحرک ۵۸

۳-۸ جمع‌بندی ۶۰

فصل چهارم: آنالیز مودال یک سیستم خطی متغیر با زمان پریودیک در حوزه فرکانس ۶۲

۴-۱ مقدمه ۶۳

۴-۲ معادلات حاکم بر مسئله برای شناسایی پارامترهای مودال سیستم‌های متغیر با زمان در حوزه فرکانس ۶۴
۴-۲-۱ پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان ۶۴
۴-۲-۲ پاسخ سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک به ورودی نمایی مختلط ۶۶
۴-۲-۳ تابع پاسخ فرکانسی یک سیستم متغیر با زمان پریودیک ۷۰
۴-۳ آنالیز مودال یک تیر با جرم متحرک ۷۴
۴-۴ جمع‌بندی ۸۰
فصل پنجم: شناسایی پارامترهای دینامیکی تیر با جرم متحرک با استفاده از نتایج تجربی و به‌کارگیری روش هموتوپی ۸۱
۵-۱ مقدمه ۸۲
۵-۲ معرفی روش هموتوپی ۸۲
۵-۳ استفاده از روش هموتوپی برای تیر با جرم متحرک ۸۳
۵-۳-۱ تیر تحت تأثیر یک جرم و یک مود برای تیر ۸۴
۵-۳-۲ تیر تحت تأثیر چند جرم و چند مود برای تیر ۸۵
۵-۴ جمع‌بندی ۸۸
فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهاد ۹۰
پیوست الف: تخمین ماتریس مشاهده پذیری به کمک تجزیه SVD ۹۴
پیوست ب تقریبی برای محاسبه ماتریس $F_1^+(k)F_2(k+1)$ وقتی $n_0 \le 2n$ ۹۷
مراجع ۹۹

فهرست اشکال

عنوان **صفحه**

شکل ۱-۱ - سخت‌افزارهای مربوط به تست مودال ۴
شکل ۱-۲ - نرم‌افزارهای آنالیز مودال ۵
شکل ۲-۱ - شکل شماتیکی از یک تیر با تحت اثر یک جرم متحرک ۲۷
شکل ۲-۲ - فرکانس طبیعی اول سیستم به ازای داده‌هایی با طول متفاوت ۳۰
شکل ۲-۳ - مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با داده‌هایی با طول متفاوت ۳۱
شکل ۲-۴ - فرکانس طبیعی اول تیر با جرم متحرک با تغییر تعداد آزمایش‌ها ۳۱
شکل ۲-۵ - مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با تغییر تعداد آزمایش‌ها ۳۲
شکل ۲-۶ - فرکانس طبیعی اول تیر با جرم متحرک با تغییر تعداد داده‌های هر آزمایش ۳۲
شکل ۲-۷ - مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با تغییر تعداد داده‌های هر آزمایش ۳۳
شکل ۲-۸ - فرکانس طبیعی اول تیر با جرم متحرک با تغییر تعداد آزمایش‌ها ۳۳
شکل ۲-۹ - مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با تغییر تعداد آزمایش‌ها ۳۳
شکل ۲-۱۰ - فرکانس دوم تیر تحت تأثیر جرم متحرک ۳۴
شکل ۳-۱ ۱-سیگنال تبدیل یافته از HT، ۲-سیگنال اولیه، ۳-سیگنال تحلیلی و ۴- تصویر سیگنال در فضای مختلط [۳۵] ۴۰
شکل ۳-۲ تصویر سیگنال اولیه در فضای مختلط [۳۵] ۴۰
شکل ۳-۳ فاز لحظه‌ای ۱-بدون برش ۲- برش خورده ۴۲
شکل ۳-۴ - خروجی یک سیستم ارتعاشی ۴۳
شکل ۳-۵ - طیف حداکثر، حداقل و متوسط یک سیگنال دلخواه ۴۴
شکل ۳-۶ - سیگنال h_1 حاصل از تفاضل متوسط طیفی و سیگنال اصلی ۴۴
شکل ۳-۷ - سیگنال h_1 و طیف حداکثر، حداقل و متوسط مربوط به آن ۴۵
شکل ۳-۸ - سیگنال h_2 حاصل از تفاضل متوسط طیفی h_1 و سیگنال h_1 ..... ۴۵
شکل ۳-۹ - اولین IMF سیگنال اصلی ۴۶
شکل ۳-۱۰ - یک سیگنال دلخواه ۴۷
شکل ۳-۱۱ - IMFهای یک سیگنال دلخواه ۴۸
شکل ۳-۱۲ - یک سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی ۵۵
شکل ۳-۱۳ - مودهای ذاتی حاصل از پاسخ جرم اول سیستم جرم و فنر مدنظر ۵۵
شکل ۳-۱۴ - مودهای ذاتی حاصل از پاسخ جرم دوم سیستم جرم و فنر مدنظر ۵۶
شکل ۳-۱۵ - فرکانس طبیعی اول سیستم جرم و فنر مدنظر ۵۶
شکل ۳-۱۶ - فرکانس طبیعی دوم سیستم جرم و فنر مدنظر ۵۷
شکل ۳-۱۷ - شکل شماتیکی از سیستم ارتعاشی ماتیو ۵۷
شکل ۳-۱۸ - فرکانس طبیعی معادله ماتیو با مشخصات فوق ۵۸

شکل ۳-۱۹ - IMFها و باقیمانده‌ی پاسخ تیر ۵۹
شکل ۳-۲۰ - فرکانس طبیعی اول تیر تحت اثر جرم متحرک ۶۰
شکل ۳-۲۱ - فرکانس طبیعی دوم تیر تحت اثر جرم متحرک ۶۰
شکل ۴-۱ - پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI ۶۵
شکل ۴-۲ - فرکانس طبیعی اول تیر تنها بدون تأثیر جرم متحرک ۷۵
شکل ۴-۳ - فرکانس طبیعی اول تیر تحت تأثیر یک جرم متحرک ۷۷
شکل ۴-۴ - نمودار انتقال یافته فرکانس طبیعی اول تیر تحت تأثیر یک جرم متحرک ۷۸
شکل ۴-۵ - نمودار پاسخ فرکانسی خروجی اول و دوم تیر تحت تأثیر یک جرم متحرک با در نظر گرفتن دو شکل مود از تیر ۷۹
شکل ۴-۶ - نمودار پاسخ فرکانسی انتقال یافته خروجی اول و دوم تیر تحت تأثیر یک جرم متحرک با در نظر گرفتن دو شکل مود از تیر ۷۹

فهرست جداول

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱- مقادیر ثابت شبیه‌سازی مسئله تیر با جرم متحرک ۲۹

جدول ۳-۱- مقایسه تبدیل هیلبرت-هانگ با تبدیل فوریه و موجک [۴۳]..... ۳۹

جدول ۳-۲- پارامترهای مودال حاصل از ارتعاشات آزاد یک سیستم خطی متغیر با زمان ۵۱

جدول ۳-۳- پارامترهای مودال حاصل از ارتعاشات اجباری یک سیستم خطی متغیر با زمان..... ۵۴

جدول ۳-۴- مقادیر ثابت شبیه‌سازی معادله ماتیو ۵۸

جدول ۴-۱- خلاصه‌ای از پاسخ یک سیستم LTI به ورودی نمایی..... ۶۶

جدول ۴-۲- مقادیر ثابت شبیه‌سازی مسئله تیر با جرم متحرک ۷۴

جدول ۵-۱- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از روش‌های مختلف ۸۸

چکیده

روش‌های آنالیز مودال برای سیستم‌های متغیر با زمان، همانند سیستم‌های LTI، هم در حوزه فرکانس و هم در حوزه زمان توسعه یافته‌اند، ولی به دلیل ماهیت متغیر با زمان بودن این سیستم‌ها، استفاده از روش‌های زمان-فرکانسی برای شناسایی این سیستم‌ها نیز در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در این پایان‌نامه ابتدا، با توجه به روش‌های آنالیز مودال برای سیستم‌های LTI، روشی در حوزه زمان برای استخراج پارامترهای مودال سیستم‌های LTV ارائه می‌گردد و پس از شناخت مراحل روش، پارامترهای مودال یک تیر با جرم متحرک با استفاده از این روش استخراج می‌شوند و نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرند. عموماً روش‌های آنالیز مودال در حوزه زمان از ریاضی پیچیده‌ای برخوردار بوده و پیاده‌سازی آن‌ها نیز مشکل است (روش معرفی‌شده در این پایان‌نامه نیز از این قاعده مستثنی نیست).

در ادامه برای جایگزین کردن روشی ساده‌تر و همچنین با همگرایی بالاتر، سراغ روش‌ها زمان-فرکانسی رفته و تبدیل هیلبرت-هانگ معرفی می‌گردد. تبدیل هیلبرت-هانگ روشی تطبیقی بوده که نسبت به دیگر روش‌های زمان-فرکانسی مانند تبدیل موجک، روشی ساده‌تر بوده و همچنین از توانمندی‌های بیشتری برخوردار است. پس از معرفی کامل روش مدنظر، روش استخراج پارامترهای مودال با استفاده از پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری یک سیستم ارتعاشی به کمک این تبدیل تشریح می‌گردد و روش‌های معرفی شده بر روی سیستم‌های مختلف پیاده سازی شده و پارامترهای مودال استخراج می‌شوند. نکته کلیدی تبدیل هیلبرت-هانگ استفاده از روش تجربی تجزیه مودی می‌باشد، که با تجزیه یک سیگنال ارتعاشی به چندین تابع ذاتی، برای استخراج اطلاعات هر مود، از این توابع استفاده می‌کند.

همانند روش‌های آنالیز مودال برای سیستم‌های LTI، که هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس توسعه یافته‌اند، در ادامه روشی برای استخراج پارامترهای مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک در حوزه فرکانس معرفی می‌شود. در همین راستا ابتدا با اثبات عدم کارایی فرض‌های در نظر گرفته شده برای تعیین تابع پاسخ فرکانسی سیستم‌های LTI، به منظور تعیین تابع پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک، با تعریف فضای فرکانسی جدید، تابع پاسخ فرکانسی برای یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت پریودیک محاسبه می‌گردد و در ادامه نشان داده می‌شود که با تلفیقی از این تابع و روش‌های آنالیز مودال در حوزه فرکانس برای سیستم‌های LTI، می‌توان پارامترهای مودال یک سیستم متغیر با زمان پریودیک را استخراج کرد. نکته کلیدی در این فصل، تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر مود برای یک سیستم متغیر با زمان است.

در انتها نیز با طرح این سؤال که آیا برای یک پل در حال استفاده، با فرض رفتار خطی پل و استفاده از پاسخ پل به حرکت ماشین‌ها بر روی آن، می‌توان فرکانس‌های طبیعی پل تنها را محاسبه کرد؟ روش اختلالی هموتوپی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطالعات و تحقیقات انجام گرفته در زمینه هموتوپی، یا به بهبود روش هموتوپی پرداخته‌اند و یا از این روش برای حل معادلات غیرخطی استفاده کرده‌اند. البته اخیراً از این روش برای تحلیل پایداری سیستم‌هایی مانند سیستم مورد مطالعه نیز استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه ابتدا با تعمیم این روش برای سیستم‌های چند درجه آزادی، روش حل بهبود داده شده و در ادامه با استفاده از این ایده و استفاده از جملات سکولار در فرآیند حل، فرکانس‌های طبیعی تیر نیز استخراج می‌شوند.

کلمات کلیدی: ۱- تیر با جرم متحرک ۲- آنالیز مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان ۳- ماتریس هنکل ۴- تبدیل هیلبرت-هانگ ۵- روش اختلالی هموتوپی

فصل اول
مقدمه

روش‌های آنالیز مودال در حالت کلی برای شناسایی خواص دینامیکی یک سیستم دینامیکی استفاده می‌شوند. امروزه این روش‌ها برای شناسایی سیستم‌های بزرگ و پیچیده با تحریک شناخته شده و تحریک‌های محیطی تعمیم یافته‌اند و با استفاده از این تکنیک‌ها می‌توان پارامترهای مودال یک سیستم مکانیکی را محاسبه کرد. یکی از مسائل پیش‌رو برای آنالیز مودال سیستم‌های مکانیکی، محاسبه پارامترهای مودال سیستم‌های مکانیکی متغیر با زمان، سیستم‌های دوار و سیستم‌های غیر خطی می‌باشد. در این سیستم‌ها به دلیل وجود رزونانس‌های موضعی، امکان ایجاد خرابی ناگهانی وجود دارد که صدمات غیر قابل جبرانی را ایجاد می‌کنند. برای نمونه می‌توان به رزونانس‌های موضعی در پره‌های توربین‌های بادی اشاره کرد که به دلیل چرخش پره‌ها و وجود باد شدید، نیروهای آیرودینامیکی زیادی ایجاد می‌شود که این نیروهای آیرودینامیکی، به دلیل ایجاد میرایی آیرودینامیکی در سیستم، باعث کاهش میرایی سیستم شده که به تبع آن دامنه ارتعاشات پره افزایش یافته و خرابی شدید به وجود می‌آید. در این فصل ابتدا مفاهیم بنیادی آنالیز مودال معرفی شده و پس از آن به تعریف مسئله مدنظر این پروژه پرداخته و در همین راستا مبانی ریاضی اولیه مسئله مدنظر، کارهای قبلی و ساختار پایان‌نامه نیز بیان می‌گردد.

۱-۱ مقدمه‌ای بر آنالیز مودال

آنالیز مودال، فرآیند تعیین خواص ذاتی دینامیکی یک سیستم در قالب فرکانس‌های طبیعی، ضرایب میرایی و شکل مودها و به‌کارگیری آن‌ها به منظور ایجاد مدلی ریاضی از رفتار دینامیکی سیستم است. این مدل ریاضی مدل مودال سیستم و اطلاعات مربوط به مشخصات آن، داده‌های مودال نامیده می‌شوند. فرایند استخراج داده‌ها یا پارامترهای مودال یک سیستم با استفاده از نتایج حاصل از تست را شناسایی مودال سیستم[1] می‌نامند. روش‌های آنالیز مودال به سه دسته کلی آنالیز مودال عددی، تحلیلی و تست مودال تقسیم‌بندی می‌شوند. در آنالیز مودال عددی از روش‌های عددی و به دلیل محاسبات بالا از نرم‌افزارهای مختلف المان محدود برای شناسایی پارامترهای مودال سازه استفاده می‌شود. برای نمونه می‌توان به نرم افزار المان محدود *ANSYS* اشاره کرد. منظور از آنالیز مودال تحلیلی نیز استفاده از روش‌های ریاضی برای محاسبه پارامترهای مودال سیستم می‌باشد که برای سیستم‌های پیچیده استفاده از این روش امکان‌پذیر نیست و اکثراً برای آموزش و آشنایی با مفاهیم آنالیز مودال مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تست مودال، یک تکنیک تجربی برای به دست آوردن مدل مودال غالباً یک سیستم خطی نامتغیر با زمان است. در مجموع آنالیز مودال تجربی شامل سه مرحله; آماده‌سازی برای تست، اندازه‌گیری پاسخ فرکانسی و استخراج پارامترهای مودال است. آماده‌سازی تست شامل انتخاب تکیه‌گاه سازه، نوع تحریک، نقاط تحریک، سخت‌افزارهای اندازه‌گیری نیرو و پاسخ، تعیین هندسه مدل که در آن نقاط اندازه‌گیری مشخص شده است و تعیین عواملی که باعث عدم دقت در اندازه‌گیری می‌شوند، است. در طول تست یک مجموعه، تابع پاسخ فرکانسی *(FRF)* اندازه‌گیری و ذخیره می‌شود تا در مرحله بعد به منظور تعیین پارامترهای مودال، آنالیز شوند. در شکل ۱-۱ تصویری از سخت‌افزارهای مربوط به تست مودال نشان داده شده است.

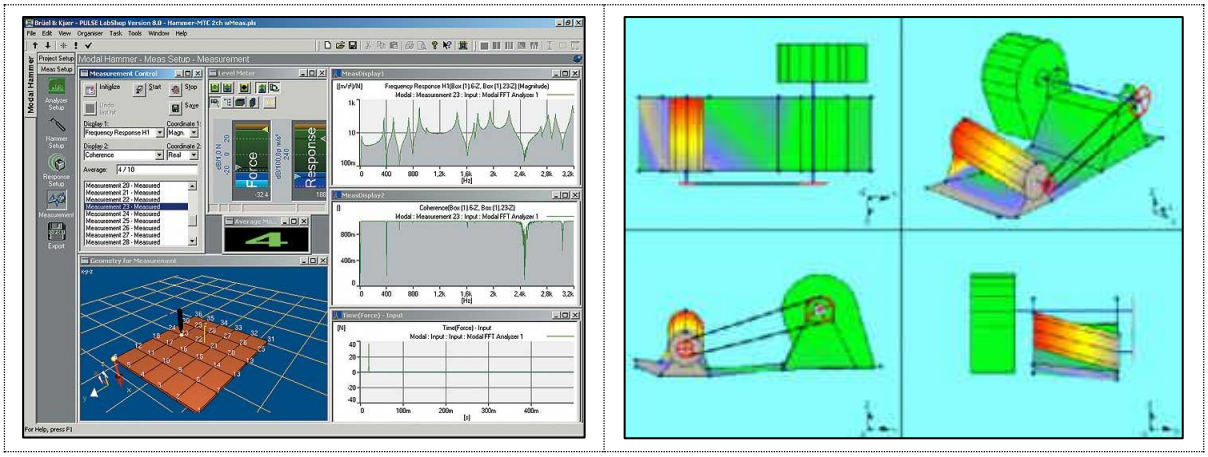
---

[1] - Modal Identification

شکل ۱-۱- سخت‌افزارهای مربوط به تست مودال

آنالیز مودال که در سه دهه اخیر توسعه زیادی پیدا کرده، امروزه کاربردهای گسترده‌ای در تصحیح دینامیک سازه‌ها، بهبود مدل‌های تحلیلی، طراحی بهینه دینامیکی، کنترل ارتعاشات، عیب یابی و همچنین پایش ارتعاشی سلامت سازه‌ها در مهندسی هوا فضا، مکانیک و عمران پیدا کرده است. در حال حاضر روش‌های مختلفی برای انجام تست مودال و همچنین تکنیک‌های متنوعی برای استخراج پارامترهای مودال توسعه یافته‌اند. این تکنیک‌ها برای حالات یک ورودی- یک خروجی(*SISO*)، یک ورودی- چند خروجی(*SIMO*) و چند ورودی- چند خروجی(*MIMO*) در بازه زمان[1] و در بازه فرکانس[2] تعریف شده‌اند. امروزه روش‌های مختلف آنالیز مودال در قالب نرم‌افزارهای تجاری به بازار عرضه شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند. نمونه ای از این نرم‌افزارها در شکل ۱-۲ نشان داده شده است

[1] - Time Domain
[2] - Frequency Domain



شکل ۱-۲- نرم‌افزارهای آنالیز مودال

البته علاوه بر تقسیم‌بندی روش‌های آنالیز مودال بسته به فضای حل، امروزه روش‌های آنالیز مودال به دو دسته روش‌های آنالیز مودال آزمایشگاهی و آنالیز مودال عملیاتی نیز تقسیم‌بندی می‌شوند. در آنالیز مودال آزمایشگاهی از ورودی و خروجی سیستم برای شناسایی پارامترهای مودال استفاده می‌شود، در حالی که برای آنالیز مودال عملیاتی تنها از خروجی سیستم برای شناسایی پارامترهای مودال استفاده می‌گردد. یکی از بزرگ‌ترین مزایای آنالیز مودال عملیاتی کاربرد آن برای سیستم‌های بزرگ، که نیروی تحریک ناشناخته‌ای دارند، می‌باشد.

۱-۱-۱ فرض‌های اولیه آنالیز مودال

عموماً برای اعمال و پیاده‌سازی هر روش یک سری فرض‌های اولیه وجود دارد که عدم رعایت آن‌ها در فرآیند پیاده‌سازی روش، سبب دقت پایین جواب و یا غلط بودن نتایج می‌گردد. روش‌های آنالیز مودال در حالت کلی از این قاعده مستثنی نبوده و برای پیاده‌سازی این روش‌ها یک سری فرض‌های اولیه وجود دارد، که این فرض‌ها محدودیت‌هایی برای شناسایی سیستم‌های مکانیکی گوناگون ایجاد می‌کنند. برای نمونه روش‌های معمول آنالیز مودال برای شناسایی سیستم‌های دوار قابل استفاده نیستند. در ادامه چهار شرط اساسی آنالیز مودال معرفی می‌شود.

- **خطی بودن سازه**

خطی بودن سازه بدین معنی است که پاسخ سازه به ترکیب نیروها با مجموع پاسخ تک‌تک نیروها برابر باشد (قاعده جمع آثار برقرار باشد). این فرض، فرض مناسب و معقولی برای بسیاری از سازه‌ها می‌باشد. برای سازه‌های خطی می‌توان با اعمال تحریک‌های کنترل‌شده به سیستم، پارامترهای مودال سیستم را استخراج کرد، که این پارامترها با پارامترهای سیستم در حالت کار تطابق زیادی دارند، زیرا تابع پاسخ فرکانسی برای سیستم‌های خطی مستقل از ورودی است.

- **نامتغیر بودن با زمان**

بدین معنی است که پارامترهای فیزیکی سیستم با گذشت زمان ثابت باشند و تغییر نکنند. معمولاً در روش‌های سنتی اگر ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی سیستم با زمان تغییر کنند از این تغییرات در حل چشم‌پوشی می‌شود. برای سیستم‌های متغیر با زمان پارامترهای مودال در هر لحظه متغیر است و برای بدست آوردن این پارامترها در هر لحظه به اندازه‌گیری جدیدی نیاز است.

- **برقراری رابطه ماکسول**

بدین معنی است که با اعمال یک بار ثابت به درجه آزادی p مقدار جابه‌جایی اندازه‌گیری‌شده در درجه آزادی q با مقدار جابه‌جایی نقطه p در حالتی که همان بار ثابت به نقطه q اعمال می‌شود برابر باشد. با برقراری این خاصیت ماتریس پاسخ فرکانسی سیستم، ماتریسی متقارن خواهد بود.

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} \qquad ۱-۱$$

- **مشاهده پذیر بودن سازه**

منظور از مشاهده‌پذیری، امکان شناسایی کامل رفتار دینامیکی سیستم با استفاده از اطلاعات از سیستم می‌باشد. سیستم‌هایی که برخی از درجات آزادی آن‌ها قابل اندازه‌گیری نباشد، سیستم‌های مشاهده‌پذیر نیستند و پارامترهای مودال آن‌ها از کیفیت کافی برخوردار نیست. عموماً دو دلیل محدودیت در رنج فرکانسی و کم بودن امکانات برای اندازه‌گیری ورودی یا خروجی این نوع ناکاملی را به وجود می‌آورد.

با توجه به مطالب فوق اگر یکی از این شرط‌ها در یک سازه برقرار نباشد (و یا انحراف زیادی از پیش فرض وجود داشته باشد، مثل غیر خطی بودن سیستم)، نمی‌توان از روش‌های مودال معمول برای شناسایی پارامترهای مودال سیستم استفاده کرد و باید روش‌های آنالیز مودال را برای آن‌ها توسعه داد. در ادامه برخی از کارهای انجام شده در این راستا معرفی می‌گردد. البته لازم به یادآوری است که فرض‌های اولیه آنالیز مودال به طور کامل برای سازه‌های واقعی برقرار نیستند و عموماً این شرط‌ها به صورت تقریبی برقرارند و مقدار تقریب در نظر گرفته شده برای صحت این فرض‌ها هم در طول آزمایش و هم پس از پایان آزمایش قابل اندازه‌گیری می‌باشد.

برای سیستم‌های با جابه‌جایی زیاد و سیستم‌های غیر خطی که پارامترهای مودال آن‌ها از اهمیت زیادی برقرارند فرض خطی بودن باعث کاهش دقت نتایج می‌گردد. سیلر [۱]، با استفاده از دو روش، پارامترهای مودال سیستم‌های غیرخطی را محاسبه کرده است. روش اول که روش صریح[1] نامیده می‌شود، با استفاده از تابع توصیفی مرتبه اول[2] سیستم، ضرایب تابع پاسخ فرکانسی را وابسته به ورودی در نظر گرفته و این ضرایب را محاسبه می‌کند. روش دوم که

[1] Explicit Method
[2] First-order Describing Function

تکنیک مودال هیبریدی[1] نامیده می‌شود، بر اساس تکنیک جمع آثار غیرخطی استوار است بدین معنی که از یک محور مختصات تعمیم‌یافته‌ای برای انتقال سیستم از فضای غیرخطی به فضای خطی استفاده کرده و به بررسی سیستم خطی تعمیم یافته در فضای ریاضی می‌پردازد.

یکی دیگر از فرض‌های اولیه آنالیز مودال برقراری قاعده ماکسول می‌باشد. در سیستم‌های چرخشی به علت به وجود آمدن اثرات ژیروسکوپیک و افزایش سختی سازه، ناشی از نیروی جانب مرکز، ماتریس میرایی و سختی سیستم نامتقارن شده و به تبع آن قاعده ماکسول، یکی از شرط‌های آنالیز مودال، نقض می‌گردد. گوتیرز[2]، با جدا کردن قسمت متقارن و نامتقارن ماتریس میرایی و سختی، پارامترهای مودال سیستم را محاسبه کرد. او همچنین نشان داد که با استفاده از داده‌های یک ردیف ماتریس تابع پاسخ فرکانسی می‌توان پارامترهای مودال سیستم را محاسبه کرد. بدین ترتیب مشکل اعمال تحریک‌های کنترل‌شده به قسمت‌های مختلف یک ماشین چرخان حل شده و با داده‌های کمتری می‌توان پارامترهای مودال را محاسبه کرد.

پس از معرفی مفاهیم آنالیز مودال و شناسایی فرض‌های اولیه آن، در قسمت بعدی مسئله مورد بررسی معرفی شده و معادلات ریاضی آن بیان می‌گردد. در ادامه نشان داده می‌شود که با توجه معادلات بدست آمده، یک تیر با جرم متحرک سیستمی متغیر با زمان بوده و با کمک روش‌های معمول آنالیز مودال، که برای سیستم‌های خطی و نامتغیر با زمان تعریف شده‌اند، پارامترهای مودال آن قابل محاسبه نیست.

۱-۲ سیستم‌های خطی متغیر با زمان

معادله دینامیکی یک سیستم n درجه آزادی خطی متغیر با زمان در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M(t)\ddot{x}(t)+C(t)\dot{x}(t)+K(t)x(t)=B(t)u(t), \qquad ۲\text{-}۱$$

که در معادله فوق $M(t)$، $C(t)$ و $K(t)\in\mathbb{R}^{n*n}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی متغیر با زمان سیستم هستند. $x(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار جابه‌جایی سیستم، $B(t)\in\mathbb{R}^{n*n}$ ماتریس ضرایب ورودی و $u(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار ورودی‌های سیستم است. در ادامه برای حل معادله فوق فرض‌های زیر در نظر گرفته شده است.

- درایه‌های ماتریس جرم، میرایی و سختی کران دار بوده و تعداد محدودی ناپیوستگی در محدوده مورد بررسی وجود دارد.
- ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی سیستم در محدوده مورد بررسی غیر منفرد می‌باشند.
- درجه آزادی سیستم ثابت بوده و در طول بررسی تغییر نمی‌کند.

معادله ۱-۲ در فضای حالت به صورت زیر بیان می‌شود [24] :

6-Hybrid Modal Analysis