





دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه  
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد  
آمار ریاضی

عنوان

نقش استنباط شواهدی در تحلیل جداول توافقی و  
استوار بودن توابع درستنمایی در الگوهای آماری

استاد راهنما  
دکتر مهدی عمادی

استاد مشاور  
دکتر آرزو حبیبی راد

نگارنده  
زهرة زمانی  
اسفندماه ۸۷

## هوالمحبوب

ای چراغ در راه ماندگان! مأمن پناهندگان! ماوای سالکان!

ای امید محرومان و رانده شدگان!

پرنده می کوچک و وجودم چگونه سکر و سعت آسمان تو کوید و پاهای خرد و خسته ام چگونه جاده می شنای تو پوید؟

چگونه سکر تو گویم که سرپای وجودم غرق در نعمت های توست و تویی که مراد خیمه می لطفت منزل داده ای.

اگر اطاعت امر تو نبوده هرگز با کوره می خاطر خویش بر ساعل دریای نعمت ها گذرنمی کردم چرا که می دانم ظرف وجود

من سایه می من است نه بایسته می تو.

باغبانی این باغ را به کس مسار که اگر بز شیره می مهر تو در این باغ برود، برک های پر مردگی خواهد نشست و اگر بز باران

رحمت تو بر این باغ ببارد، پرچم های باغ فرو خواهند افتاد و اگر بز نسیم لطف تو به این بوستان بوزد غنچه ها خواهند مرد.

تقدیم بہ

ساحت مقدس آقا امام رضا (ع)

وتقدیم بہ

محضر مبارک قطب عالم امکان

منظر شکوہ

معنی قرآن

حضرت مہدی صاحب الزمان (عج)

و تقدیم به

## دروماد

به آسمان های که باریدند تا برویم، خورشید های که تابیدند تا جان بگیرم

و ریشه های که قوت خود را به من دادند تا زنده بمانم.

آنان که سپید مو گشتند تا سپید رویم بیند و از پاسته گشتند تا پای گیرم.



باسمه تعالی .  
مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .  
دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: نقش استنباط شواهدی در تحلیل جداول توافقی و استوار بودن توابع درست‌نمایی در الگوهای آماری

نام نویسنده: زهره زمانی ده یعقوبی

نام استاد(ان) راهنما: آقای دکتر عمادی

نام استاد(ان) مشاور: خانم دکتر حبیبی راد

رشته تحصیلی: آمار ریاضی	گروه: آمار	دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۱۳۸۷/۱۲/۵		تاریخ تصویب: ۱۳۸۷/۳/۴
تعداد صفحات: ۱۹۵	دکتری <input type="radio"/>	کارشناسی ارشد <input checked="" type="radio"/>

چکیده رساله/پایان نامه:

علم آمار به عنوان اندازه‌ای از شواهد آماری به یک مجموعه خاص از مشاهدات نگاه می‌کند. این کلاس ویژه چگونگی و چرایی این که نسبت‌های درست‌نمایی قدرت شواهد آماری را اندازه‌گیری می‌کنند را توصیف می‌کند و در مورد این مسئله که چرا شواهد گمراه‌کننده است، بحث می‌کند. در حال حاضر دو روش کلی پذیرفته شده برای تفسیر داده‌ها وجود دارد که یکی روش فراوانی و دیگری روش بیز می‌باشد که هیچ‌یک از این دیدگاه‌ها به این سوال که "داده‌ها چه می‌گویند؟" جوابی نمی‌دهند. نظر دیگر این است که هر دو روش بیز و فراوانی اطلاعات بیشتری را نسبت به آن چه خود داده‌ها فراهم می‌کنند شامل می‌شوند. استنباط بیز اطلاعات پیشین و استنباط فراوانی اطلاعاتی در مورد حجم نمونه را شامل می‌شود. الگوی شواهدی یک چارچوب برای ارائه و ارزیابی نسبت‌های درست‌نمایی به عنوان اندازه‌ای از شواهد آماری برای یک فرضیه در مقابل فرضیه دیگر ایجاد می‌کند. جلودار این مکتب جدید پروفیسور ریچارد رویال است که کتاب وی تحت عنوان استنباط شواهدی اصول اولیه این شیوه جدید استنباط را در بردارد. محور اصلی این روش تابع درست‌نمایی است ولی علاوه بر اتکا بر اصل درست‌نمایی، این شیوه بر اصل مشابه دیگری بنام "قانون درست‌نمایی" متکی است. جداول توافقی در حالت حجم نمونه بزرگ با استفاده از خواص مجانبی و در حالت حجم نمونه کوچک با استفاده از شبیه‌سازی بررسی شده است. کران‌داری احتمالات پشتیبانی قوی گمراه‌کننده در مدل‌های استقلال، پیوند و همبستگی را بررسی می‌شوند. تابع درست‌نمایی ارزش شواهدی خود را حفظ می‌کند در صورتی که استوار باشد. معیارهای استواربودن تابع درست‌نمایی را معرفی کرده و روش تعدیل کردن تابع درست‌نمایی را هرگاه که استوار نباشد بیان می‌کنیم.

امضای استاد راهنما:	کلید واژه:
	۱. نسبت درست‌نمایی
	۲. قانون درست‌نمایی
	۳. الگوی پیوند
	۴. الگوی همبستگی
تاریخ:	۵. استوار بودن

# پیشگفتار

علم آمار به عنوان اندازه‌ای از شواهد آماری به یک مجموعه خاص از مشاهدات نگاه می‌کند. این کلاس ویژه چگونگی و چرایی این که نسبت‌های درست‌نمایی قدرت شواهد آماری را اندازه‌گیری می‌کنند، را توصیف می‌کند و در مورد این مسئله که چرا شواهد گمراه‌کننده است بحث می‌کند. در حال حاضر دو دیدگاه کلی پذیرفته شده برای تفسیر داده‌ها وجود دارد که یکی روش مبتنی بر فراوانی نسبی و دیگری روش بیز می‌باشد که هیچ‌یک از این دیدگاه‌ها پاسخی برای سؤالاتی نظیر

۱. داده‌ها چه می‌گویند؟

۲. میزان پشتیبانی داده‌ها از یک فرضیه در مقابل فرضیه دیگر چقدر است؟

را ارائه نمی‌کند. در این رساله از نسبت درست‌نمایی برای اندازه‌گیری پشتیبانی داده‌ها از یک فرضیه در مقابل فرضیه دیگر استفاده می‌کنیم. این کار ابتدا توسط رویال<sup>۱</sup> (۱۹۹۷) ارائه شد. وی مکتب جدید خود را با نام استنباط شواهدی به عنوان جایگزینی برای مکتب مبتنی بر فراوانی نسبی و مکتب بیز معرفی کرد. در بررسی فرضیه‌های آماری در مقوله استنباط کلاسیک (مبتنی بر فراوانی نسبی) از لم نیمن – پیرسون استفاده می‌کنیم. هر دو روش بیز و فراوانی، اطلاعات بیشتری را نسبت به آنچه خود داده‌ها فراهم می‌کنند شامل می‌شوند. استنباط بیز اطلاع پیشین و استنباط فراوانی اطلاعاتی در مورد حجم نمونه را شامل می‌شود و استنباط فراوانی متأثر از زیان نسبی انجام عمل نادرست نیز می‌باشد. در حالی که در استنباط شواهدی از قانون درست‌نمایی که فقط مبنی بر مشاهدات می‌باشد در بررسی فرضیه‌های آماری استفاده می‌شود.

در فصل اول، به بیان مقدمات استنباط شواهدی و جداول توافقی می‌پردازیم. تعاریف الگوهای پیوند و الگوهای همبستگی همراه با انواع این الگوها را نیز بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، به تحلیل جداول توافقی بر اساس استنباط شواهدی می‌پردازیم. در بخش سوم این فصل می‌بینیم که تابع درستنمایی به ازای آماره بسنده ماکسیمم می‌شود و تقریب احتمالات پشتیبانی قوی گمراه‌کننده را برای الگوهای استقلال، پیوند یکنواخت، پیوند  $RC$  و همبستگی  $CA$  تحت تغییر متغیرهای هم‌ارز (جانشین‌های مجاور) محاسبه کرده و کران بالایی برای این احتمالات معرفی می‌کنیم.

در فصل سوم، دو شرط لازم را برای استوار بودن تابع درستنمایی معرفی می‌کنیم و روش تعدیل کردن تابع درستنمایی را برای حالتی که تابع درستنمایی اولین شرط استوار بودن را دارا می‌باشد، بیان می‌نماییم. در این فصل ثابت می‌کنیم که اطلاعات موردانتظار در تابع درستنمایی تعدیل شده نمی‌تواند از اطلاعات موردانتظار در تابع درستنمایی مربوط به مدل صحیح فراتر رود. کارایی مجانبی توابع درستنمایی تعدیل شده نیز به همراه بازه‌های اطمینان مبتنی بر توابع درستنمایی استوار بیان می‌شود.

در فصل چهارم به تحلیل جداول توافقی بر اساس استنباط شواهدی در حالت حجم نمونه کوچک می‌پردازیم و احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده را برای مدل‌های استقلال، پیوند یکنواخت، پیوند  $RC$  و همبستگی  $CA$  در حالت حجم نمونه کوچک محاسبه می‌کنیم.

نماد \* را برای اثبات‌هایی که در مقاله اشاره مختصری شده بود استفاده کرده‌ام. اثبات‌هایی که کاملاً توسط اینجانب صورت گرفته با \*\* نشان داده شده است. اثبات‌هایی که مطالب آن نیز کاملاً مربوط به خودم است نیز با \*\*\* نشان داده‌ام.

بی‌نهایت مسرور و شادمانم که به یاری خداوند بزرگ و لطف و عنایت بزرگ مردانی که نام و یادشان همواره در خاطر من جاودانه است یکبار دیگر اندیشه نارسایم پرگرفت تا در فضای مملو از صفا و صمیمیت حقایق را تجربه نموده و تلاش من را سامان دهد.



بی‌تردید نگارش این مجموعه مرهون زحمات بی‌شائبه و بی‌دریغ اساتید ارجمندی است که همواره در همه حال در نهایت صبر و شکیبایی به یاریم شتافته، مورد لطف و محبتم قرار داده‌اند. به همین لحاظ بر خویش فرض می‌دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را نسبت به این اساتید بالاخص استاد ارجمند جناب آقای دکتر عمادی که همواره چون مشعلی فروزان روشنی‌بخش راهم بودند، سرکار خانم دکتر حبیبی که زحمت مطالعه و مشاوره پایان‌نامه‌ام را تقبل نمودند ابراز نمایم. همچنین از اساتید محترم داور جناب آقای دکتر دوستی و جناب آقای دکتر دوست‌پرست که زحمت مطالعه‌ی این رساله را بر خود هموار کردند و نکات لازم را یادآور شدند تشکر می‌کنم. همچنین از جناب آقای دکتر طباطبایی و جناب آقای دکتر امینی و جناب آقای مددی و آقای دکتر آرشی که همواره از راهنمایی‌هایشان بهره‌بردم کمال تشکر را دارم. همچنین از مسئولین محترم کتابخانه دکتر فاطمی خصوصاً سرکار خانم صادقی، آقای داوودنژاد، آقای مسئله‌گو و آقای افضل‌ی و سرکار خانم سلیمانی منشی محترم گروه آمارنهایت تشکر را ابراز می‌دارم. قدردانی خودم را نسبت به آقای محمودی که در مراحل مختلف تایپ پایان‌نامه راهنمایم بودند ابراز می‌کنم. و در انتها از خانواده‌ام نهایت تشکر و قدردانی را دارم. امیدوارم که بتوانم روزی زحمات بی‌دریغ آن‌ها را پاسخگو باشم.

# نمادها

$\mathcal{J}$	مدل استقلال
$CA$	مدل همبستگی $CA$
$RC$	مدل پیوند $RC$
$U$	مدل پیوند یکنواخت
$\underline{\mu}$	بردار امتیازات سطر
$\underline{\nu}$	بردار امتیازات ستون
$w_{\setminus i}$	وزن های سطر
$w_{\setminus j}$	وزن های ستون
$\pi_{ij}$	احتمالات جدول توافقی
$\pi_{i.}$	احتمالات حاشیه ای سطر
$\pi_{.j}$	احتمالات حاشیه ای ستون
$q$	مدل احتمال درست
$\log$	تابع لگاریتم
$\underline{\theta}_U$	بردار پارامتر تحت مدل یکنواخت
$\underline{\theta}_{RC}$	بردار پارامتر تحت مدل پیوند $RC$
$\underline{\theta}_{CA}$	بردار پارامتر تحت مدل همبستگی $CA$
$M_{\setminus}$	احتمال پشتیبانی قوی گمراه کننده تحت $H_{\setminus}$

$M_2$ .....	احتمال پشتیبانی قوی گمراه کننده تحت $H_2$
$W_1$ .....	احتمال پشتیبانی ضعیف تحت $H_1$
$W_2$ .....	احتمال پشتیبانی ضعیف تحت $H_2$
$L(\theta, \underline{x})$ .....	تابع درست‌نمایی
$l(\theta)$ .....	لگاریتم تابع درست‌نمایی
$L_r(\theta)$ .....	تابع درست‌نمایی تعدیل شده
$L_p(\theta)$ .....	تابع درست‌نمایی نیمرخ
$L_{rp}(\theta)$ .....	تابع درست‌نمایی نیمرخ تعدیل شده
$\bar{x}$ .....	میانگین نمونه تصادفی
$\hat{\theta}$ .....	برآورد درست‌نمایی ماکزیمم $\theta$

# واژه‌نامه

<i>Probability of misleading evidence</i> .....	احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده
<i>Probability of weak evidence</i> .....	احتمال پشتیبانی ضعیف
<i>Likelihood function</i> .....	تابع درست‌نمایی
<i>Robust likelihood function</i> .....	تابع درست‌نمایی استوار
$\mu$ .....	تابع درست‌نمایی نیم‌رخ
<i>Adjusted likelihood function</i> .....	تابع درست‌نمایی تعدیل شده
<i>Bump function</i> .....	تابع دست‌انداز
<i>Independence model</i> .....	الگوی استقلال
<i>Association model</i> .....	الگوی پیوند
<i>Uniform association model</i> .....	الگوی پیوند یکنواخت
<i>Correlation model</i> .....	الگوی همبستگی
<i>Law of likelihood</i> .....	قانون درست‌نمایی
<i>Likelihood ratio</i> .....	نسبت درست‌نمایی
<i>Contingency table</i> .....	جدول توافقی
<i>Statistical evidence</i> .....	شواهد آماری
<i>Contiguous alternatives</i> .....	جانشین‌های مجاور
<i>Taylor expansion</i> .....	بسط تیلور

*Working model* ..... مدل کاری  
*Asymptotic efficiency* ..... کارایی مجانبی  
*Inferential evidence* ..... استنباط شواهدی

# فهرست عناوین

۱	مقدمات	۱
۲	۱-۱ مقدمه	۲
۲	۲-۱ آزمون فرضیه‌های آماری	۲
۵	۱-۲-۱ ویژگی‌های نسبت درستنمایی و استنباط شواهدی:	۵
۱۰	۲-۲-۱ مثال: مسأله آزمایش طبی	۱۰
۱۳	۳-۱ استنباط آماری به روش شواهدی	۱۳
۱۷	۴-۱ تابع درستنمایی در قبال وجود پارامتر مزاحم	۱۷
۱۸	۵-۱ جداول توافقی	۱۸
۱۸	۱-۵-۱ مقدمه	۱۸
۲۰	۶-۱ تعریف اندازه‌های پیوند و اندازه‌های همبستگی	۲۰

۲۱	.....	انواع الگوها	۷-۱
۲۱	.....	الگوهای پیوند	۱-۷-۱
۲۴	.....	انواع الگوهای همبستگی	۲-۷-۱
۲۴	.....	الگوهای همبستگی	۳-۷-۱
۲۷		تحلیل جداول توافقی بر اساس استنباط شواهدی	۲
۲۸	.....	مقدمه	۱-۲
۲۹	.....	مفاهیم ابتدایی	۲-۲
۲۹	.....	مبانی استنباط شواهدی	۱-۲-۲
۳۴	.....	الگوهای پیوند و همبستگی برای جداول توافقی دوبعدی	۲-۲-۲
۳۶	.....	تشخیص نادرست بودن مدل	۳-۲
۳۸	.....	احتمالات پشتیبانی قوی گمراه کننده	۴-۲
۳۸	.....	الگوی استقلال	۱-۴-۲
۴۸	.....	الگوی پیوند یکنواخت	۲-۴-۲
۵۶	.....	الگوی پیوند سطر و ستون	۳-۴-۲
۶۲	.....	الگوی همبستگی سطر و ستون	۴-۴-۲
۷۱	.....	کران‌هایی برای احتمالات پشتیبانی قوی گمراه کننده	۵-۲
۷۵	.....	جانشین‌های مجاور	۶-۲

۷۷	نتیجه‌گیری	۷-۲
۷۸	تفسیر شواهد آماری با استفاده از مدل‌های ناقص: نظیر توابع درست‌نمایی تعدیل شده استوار	۳
۷۹	مقدمه	۱-۳
۸۱	نقص مدل	۲-۳
۹۱	تشکیل یک تابع درست‌نمایی استوار	۳-۳
۱۰۱	توابع درست‌نمایی نیمرخ	۴-۳
۱۰۸	روش ساخت تابع درست‌نمایی نیمرخ استوار	۵-۳
۱۰۹	کارایی مجانبی درست‌نمایی‌های تعدیل شده استوار	۶-۳
۱۱۵	توابع درست‌نمایی تعدیل شده استوار کاملاً کارا	۷-۳
۱۲۰	توابع درست‌نمایی تعدیل شده و توزیع‌های احتمال پسین بیز	۸-۳
۱۲۲	تابع درست‌نمایی تعدیل شده و بازه‌های اطمینان استوار	۹-۳
۱۲۳	الگوهای کاری کلی‌تر	۱۰-۳
۱۲۳	نسبت دو میانگین پواسن	۱-۱۰-۳



۲-۱۰-۳ بررسی شواهد آماری در مورد ضریب رگرسیون تحت الگوی

۱۲۵ . . . . . نرمال

۴ تحلیل جداول توافقی بر اساس استنباط شواهدی در حالت حجم نمونه کوچک ۱۲۶

۱-۴ مقدمه ۱۲۷ . . . . .

۲-۴ احتمالات پشتیبانی قوی گمراه کننده ۱۲۷ . . . . .

۱-۲-۴ الگوی استقلال ۱۲۷ . . . . .

۲-۲-۴ الگوی پیوند یکنواخت ۱۳۰ . . . . .

۳-۲-۴ الگوی پیوند  $RC$  ۱۳۲ . . . . .

۴-۲-۴ الگوی همبستگی  $CA$  ۱۳۴ . . . . .

۵-۲-۴ نتیجه گیری ۱۳۶ . . . . .

۱۳۷ . . . . . A

۱-۴ بسط تیلور شامل مشتق مرتبه دوم ۱۳۷ . . . . .

۱-۱-۴ الگوی استقلال ۱۳۷ . . . . .

۲-۱-۴ الگوی پیوند یکنواخت ۱۳۸ . . . . .

۳-۱-۴ الگوی پیوند  $RC$  ۱۳۹ . . . . .

۴-۱-۴ الگوی همبستگی  $CA$  ۱۴۱ . . . . .

۱۴۳ . . . . . B

۱-۴ مقدمه ۱۴۳ . . . . .

۱۴۳	بسط تیلور شامل مشتق مرتبه سوم	۲-B
۱۴۴	الگوی استقلال	۱-۲-B
۱۴۴	الگوی پیوند یکنواخت	۲-۲-B
۱۴۶	الگوی پیوند RC	۳-۲-B
۱۴۸	الگوی همبستگی CA	۴-۲-B

۱۵۲ C

۱۵۲	برنامه‌های مربوط به فصل اول	۱-C
۱۵۲	برنامه رسم نمودار (۱-۲)	۱-۱-C

۱۵۲ ۲-C

۱۵۲	بسط تیلور الگوی استقلال شامل مشتق مرتبه دوم	۱-۲-C
۱۵۲	بسط تیلور الگوی استقلال شامل مشتق مرتبه سوم	۲-۲-C
۱۵۳	بسط تیلور الگوی پیوند یکنواخت شامل مشتق مرتبه دوم	۳-۲-C
۱۵۳	بسط تیلور الگوی پیوند یکنواخت شامل مشتق مرتبه سوم	۴-۲-C
۱۵۴	بسط تیلور الگوی پیوند RC شامل مشتق مرتبه دوم	۵-۲-C
۱۵۵	بسط تیلور الگوی پیوند RC شامل مشتق مرتبه سوم	۶-۲-C
۱۵۷	بسط تیلور الگوی همبستگی CA شامل مشتق مرتبه دوم	۷-۲-C
۱۵۷	بسط تیلور الگوی همبستگی CA شامل مشتق مرتبه سوم	۸-۲-C
	برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای	۹-۲-C

الگوی استقلال در حالت حجم نمونه بزرگ ۱۵۹

برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای ۱۰-۲-C

الگوی پیوند یکنواخت در حالت حجم نمونه بزرگ ۱۶۰

- ۱۱-۲-C برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای  
 الگوی پیوند  $RC$  در حالت حجم نمونه بزرگ ۱۶۴ . . . . .
- ۱۲-۲-C برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای  
 الگوی همبستگی  $CA$  در حالت حجم نمونه بزرگ ۱۶۷ . . . . .
- ۱۳-۲-C محاسبات مربوط به رسم تابع دست‌انداز ۱۷۰ . . . . .
- ۳-C برنامه‌های مربوط به فصل سوم ۱۷۱ . . . . .
- ۱-۳-C محاسبات مربوط به نمودار (۱-۳) ۱۷۱ . . . . .
- ۲-۳-C محاسبات مربوط به نمودار (۲-۳) ۱۷۱ . . . . .
- ۳-۳-C محاسبات مربوط به نمودار (۳-۳) ۱۷۳ . . . . .
- ۴-۳-C محاسبات مربوط به نمودار (۴-۳) ۱۷۳ . . . . .
- ۴-C برنامه‌های مربوط به فصل چهارم ۱۷۴ . . . . .
- ۱-۴-C برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای  
 الگوی استقلال در حالت حجم نمونه کوچک ۱۷۴ . . . . .
- ۲-۴-C برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای  
 الگوی پیوند یکنواخت در حالت حجم نمونه کوچک ۱۷۶ . . . . .
- ۳-۴-C برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای  
 الگوی پیوند  $RC$  در حالت حجم نمونه کوچک ۱۸۰ . . . . .
- ۴-۴-C برنامه محاسبه احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای  
 الگوی همبستگی  $CA$  در حالت حجم نمونه کوچک ۱۸۴ . . . . .

## لیست نمودارها

- ۱-۱ نمودار تابع درست‌نمایی نرمال شده . . . . . ۱۵
- ۱-۲ نمودار تابع دست‌انداز . . . . . ۳۲
- ۲-۲ نمودار احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده الگوی استقلال . . . . . ۴۷
- ۳-۲ نمودار احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده الگوی پیوند یکنواخت . . . . . ۵۶
- ۴-۲ نمودار احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده الگوی پیوند  $RC$  . . . . . ۶۲
- ۵-۲ نمودار احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده الگوی همبستگی  $CA$  . . . . . ۷۱
- ۱-۳ نمودار احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده برای تابع درست‌نمایی پواسن . . . . . ۸۱
- ۲-۳ نمودار تقریب احتمال پشتیبانی قوی گمراه‌کننده در الگوی استقلال . . . . . ۸۹