بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گرایش تحقیق در عملیات

مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی چندسطحی

استاد راهنما:

دکتر مریم زنگی‌آبادی

استاد مشاور:

دکتر حسین منصوری

پژوهشگر:

محبوبه محمدعلیزاده‌سامانی

مهر ۱۳۹۱

مسافری بودم. مقصدم سعادت و خوشبختی بود و جاده پر فراز و نشیب. هزاران خطر، هزاران دام،
طوفان های سهمگین، راهزنان، خطر گم شدن و هزار خطر دیگر. خداوند اما به من لطفی عطا
فرمود. دو همراه، دو یاور، دو رفیق شفیق همراهم فرستاد تا در جاده ی زندگی تنها نباشم. هر دو
مرا از جان دوست داشتند و از جان برایم می گذشتند. اکنون هر چه به انتهای جاده می رسم
در می یابم که سعادت و خوشبختی من به بودن این دو عزیز کنارم خلاصه می شود.
پس به پاس همه ی جان فشانی هایتان پدر و مادر عزیزم این مجموعه تقدیم شما باد.

پروردگارا

من یک انسانم، شاهکار خلقت، اعجاز آفرینش، احسن خالقین، آن گاه که مرا از هیچ آفریدی و از روح خود در من دمیدی.

ولی ای یکتا معبود بی همتایم، تو خود نیک می دانی اسارت خاصیت آدمی ست، من اسیرم، اسیر خواستن ها و نداشتن ها، اسیر ندانستن ها و نرسیدن ها، اسیر منیت ها و معبودیت ها و تنها دست مهربان تو گره گشای بندها و اسارت هایم است.

پس مرا از خود دریغ مکن که بی لطف و مهربانیت تا ابد در اسارت و بردگی خواهم ماند.

و تو را سپاس، سپاس، سپاس.

اکنون وظیفه ی خود می دانم که از زحمات و راهنمایی های بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم سرکار خانم دکتر مریم زنگی آبادی، صمیمانه قدردانی نمایم.

هم چنین از جناب آقای دکتر حسین منصوری استاد مشاور گرامی ام، که زحمت مطالعه و مشاوره ی این پایان نامه را بر عهده گرفتند، سپاس گزاری می کنم.

مراتب سپاس و قدردانی خود را نیز از جناب آقای دکتر قاسمی و سرکار خانم دکتر افتخاری که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند ابراز می نمایم.

محبوبه محمد علیزاده سامانی

مهر ۱۳۹۱

چکیده

این پایان‌نامه مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی چندسطحی را مورد بررسی قرار می‌دهد. مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی چندسطحی شامل ساختار سلسله مراتبی تصمیم‌گیری با اهداف اغلب مستقل و متناقض با یک‌دیگر هستند. برنامه‌ریزی دوسطحی و سه‌سطحی دسته‌ای خاص از مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی هستند.

غالباً مسائل تصمیم‌گیری دوسطحی غیرمتمرکز با یک تصمیم‌گیرنده در سطح بالا و چندین تصمیم گیرنده در سطح پایین، در شرکت‌های بزرگ با ساختار سلسله مراتبی، نظیر کارگزاران دولتی، سود یا ضرر سازمان‌ها، کارخانه‌های صنعتی و شرکت‌های منطقی، دیده می‌شوند. روش‌های یافتن جواب به طور صریح، به هر تصمیم‌گیرنده هدفی یکتا، مجموعه‌ای از متغیرهای تصمیم و مجموعه‌ای از محدودیت‌های مشترک را نسبت می‌دهد که بر همه‌ی تصمیم‌گیرنده ها تأثیر می‌گذارد. هر واحد یا حوزه به طور مستقل سود خود را دنبال می‌کند. درحالی که توسط فعالیت‌های سایر واحدها تحت تأثیر قرار می‌گیرد. به نظر می‌رسد که در یک ساختار سلسله مراتبی از تصمیم‌گیرنده‌ها باید هر تصمیم‌گیرنده انگیزه‌ای برای همکاری با سایرین داشته باشد و هم‌چنین باید سطح مینیم رضایت را برای تصمیم گیرنده‌های سطح پایین برای سود کلی سازمان در نظر گرفت.

در این پایان‌نامه مسائل دوسطحی با چندین تابع هدف در سطح بالا را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه جواب‌های کارا، نقاط مغلوب نشدنی و ناحیه‌ی اجبار را برای این مسائل تعریف می‌کنیم. سپس یک الگوریتم آرمانی فازی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه‌ی دوسطحی و چندسطحی ارائه می‌دهیم. در پایان یک روش جدید برای حل مسائل دوسطحی بررسی می‌شود. در این روش، یک الگوریتم برنامه‌ریزی آرمانی فازی بر اساس روش مینماکس ارائه شده است. هم‌چنین روش ارائه شده برای مسائل دوسطحی کسری تعمیم داده می‌شود.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 90C05، 90C29، 90C70.

کلمات کلیدی : برنامه‌ریزی چندسطحی، برنامه‌ریزی دوسطحی غیرمتمرکز، کارایی، برنامه‌ریزی چندهدفه، برنامه‌ریزی آرمانی فازی، روش MINMAX .

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است که در فصل اول مقدمه‌ای از انواع مسائل برنامه‌ریزی را بیان می‌کند. سپس برای معرفی مسأله‌ی آرمانی فازی، ابتدا مقدمه‌ی کوتاهی در مورد نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی و اعداد فازی و برخی از تعاریف اساسی فازی بیان می‌شود. در بخش بعدی تاریخچه و کاربرد نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی را در مسائل برنامه‌ریزی بیان می‌کنیم. سپس در پایان این فصل، با مقدمات گفته شده، می‌توانیم مسأله‌ی آرمانی فازی را معرفی نماییم.

در فصل دوم مسائل دوسطحی با چندین تابع هدف در سطح بالا را معرفی می‌کنیم. سپس برخی از تعاریف اساسی برای مسائل برنامه‌ریزی مانند جواب‌های کارا، نقاط مغلوب نشدنی و ناحیه‌ی اجبار را بیان می‌کنیم. در همین بخش دو مثال بیان می‌کنیم و ناحیه‌ی اجبار و نقاط مغلوب نشدنی را روی شکل برای این دو مثال مشخص می‌کنیم. در بخش بعدی وجود نقاط مغلوب نشدنی را با استفاده از تعاریف و قضایا نشان می‌دهیم. یافتن نقاط کارا در یک مسأله‌ی دوسطحی بسیار مهم است. از این رو در بخش‌های پایانی این فصل دو روش برای یافتن نقاط کارا معرفی می‌کنیم. یافتن نقاط کارا به وسیله‌ی مجموع وزنی و یافتن نقاط کارا با استفاده از تکنیک‌های عددی، روش‌های ارائه شده در این بخش هستند.

در فصل سوم الگوریتم برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای حل مسائل دوسطحی غیر متمرکز بیان می‌شود. در این فصل ابتدا تاریخچه‌ای از مسائل دوسطحی غیرمتمرکز بیان می‌شود. سپس فرمول‌بندی این نوع مسائل معرفی می‌شود. در دو بخش بعدی فرمول‌بندی مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی را برای مسائل دوسطحی غیرمتمرکز با استفاده از ساختار توابع عضویت بیان می‌کنیم. پس از آن الگوریتم ارائه شده برای حل مسائل دوسطحی غیرمتمرکز بیان می‌شود. در بخش‌های بعدی این الگوریتم را با استفاده از فرایند خطی‌سازی برای مسائل دوسطحی کسری غیرمتمرکز، تعمیم می دهیم. بخش پایانی مثال‌های عددی را برای بیان درستی الگوریتم داده شده، بیان می‌کنیم.

در فصل چهار، مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی چندسطحی را معرفی می‌کنیم. سپس فرمول‌بندی این مسائل را ارائه می‌دهیم. در بخش‌های بعدی فرمول‌بندی برنامه‌ریزی آرمانی را برای این مسائل معرفی می‌کنیم. سپس دو الگوریتم آرمانی فازی را برای مسائل سه سطحی معرفی نموده، سپس در بخش پایانی با یک مثال عددی الگوریتم را توضیح می‌دهیم.

فصل پنجم روش جدیدی را براساس روش مینماکس[1] متداول و با توجه به الگوریتم بیان شده در فصل ۳، برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی دوسطحی غیرمتمرکز ارائه می‌دهیم. در بخش‌های بعدی

1. MINMAX

با خطی‌سازی توابع کسری، این روش را برای مسائل دوسطحی کسری تعمیم می‌دهیم. سپس با یک مثال نشان می‌دهیم که جواب‌های روش ارائه شده در این فصل و روش ارائه شده در فصل ۳ با هم برابرند.

فصل ۱

مقدمه و تعاریف اساسی

همان‌طور که همه‌ی ما می‌دانیم ریاضیات علمی است که در بخش‌های مختلف زندگی ما تأثیرگذار است. به همین دلیل این علم در سرتاسر دنیا، دارای شاخه‌ها و گرایش‌های مختلفی است که از جمله مهم‌ترین گرایش‌های ریاضی، گرایش تحقیق در عملیات (OR) [۱] است که توانست سرنوشت جنگ جهانی دوم را رقم بزند. نام تحقیق در عملیات ظاهراً به همین دلیل داده شده است. این رشته‌ی جدید تصمیم‌گیری از آغاز به عنوان رشته‌ای شناخته شده است که اطلاعات علمی را از طریق تلاش گروه‌های متخصص در نظام‌های مختلف، به منظور بهترین نحوه‌ی استفاده از منابع محدود، به کار می‌گیرد. این علم پس از جنگ و موفقیت گروه های نظامی، توجه مدیران صنعتی را به خود جلب نمود. اولین تکنیک ریاضی که در این رشته مورد قبول همه قرار گرفت و روش سیمپلکس برنامه‌ریزی خطی نامیده شد، در سال ۱۹۴۷ میلادی توسط جرج بی. دانتزیک [۲] ریاضی‌دان آمریکایی، معرفی شد. تأثیر تحقیق در عملیات را امروزه می‌توان در بسیاری از زمینه‌ها مشاهده نمود. در این بخش فرمول‌بندی انواع مختلف مسائل برنامه‌ریزی خطی را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ معرفی

در آغاز فرمول‌بندی نوع خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی را معرفی می‌کنیم. هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی نمود:

$$\max \quad cx$$

$$\text{s.t.}$$

$$Ax \leq b,$$

1. Operation Research
2. George B. Dantzig

$$x \geq \circ.$$

که در آن بردار x نشان‌دهنده‌ی متغیرهای تصمیم، b بردار سمت راست قیود، cx تابع هدف و A ماتریس ضرایب است. برای بیان فرم مسأله‌ی اصلی فرم‌های مختلفی از مسائل برنامه‌ریزی را معرفی می‌کنیم.
فرم کلی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP)[۱]:

$$\begin{aligned}
\max \quad & c^{۱}x = z_{۱}, \\
\max \quad & c^{۲}x = z_{۲}, \\
& \vdots \\
\max \quad & c^{k}x = z_{k}, \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x \in S,
\end{aligned}$$

یا به طور معادل داریم:

$$\begin{aligned}
\max \quad & Z = Cx \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x \in S,
\end{aligned}$$

که در آن S مجموعه‌ی محدودیت‌های مسأله و C ماتریس $k \times n$ است.

تعریف ۱. نقطه‌ی $\bar{x} \in S$ را نقطه‌ی کارا برای مسأله‌ی MOLP می‌گوییم، اگر و تنها اگر هیچ $x \in S$ وجودنداشته‌باشد به‌طوری‌که $Cx \geq C\bar{x}$ و $Cx \neq C\bar{x}$ باشد. درغیراین‌صورت $\bar{x}$ را نقطه‌ی غیرکارا گوییم.

تعریف ۲. فرض کنید $\bar{z} \in Z$ باشد. آن‌گاه $\bar{z}$ را بردار مغلوب‌نشدنی می‌گوییم اگر و تنها اگر هیچ $z \in Z$ وجودنداشته‌باشد به‌طوری‌که $z \geq \bar{z}$ و $z \neq \bar{z}$ باشد. درغیراین‌صورت $\bar{z}$ را بردار معیار مغلوب می‌نامیم.

نمونه‌ای از مسأله‌ی آرمانی

مثال زیر نمونه‌ای از مدل برنامه‌ریزی آرمانی (GP)[۲] است:

$$\begin{aligned}
goal \quad & \{c^{۱}x = z_{۱}\} \quad z_{۱} \leq t_{۱}, \\
goal \quad & \{c^{۲}x = z_{۲}\} \quad z_{۲} \geq t_{۲}, \\
goal \quad & \{c^{۳}x = z_{۳}\} \quad z_{۳} = t_{۳},
\end{aligned}$$

1. Multi Objective Linear Programming
2. Goal Programming

$$goal \quad \{c^{4}x = z_{4}\} \quad z_{4} \le [t_{4}^{L}, t_{4}^{U}],$$

$$\text{s.t.}$$

$$x \in S,$$

که به هر کدام از عبارت های سمت راست شامل t، سطوح آرمانی می‌گوییم. برای حل این مسأله روش‌های متعددی ارائه شده‌است. روش ارشمیدسی و روش الفبای از جمله این روش‌ها هستند.

چارنز[1] و کوپر [2][۱۲] اولین بار مسأله‌ی آرمانی را در سال ۱۹۶۱ معرفی نمودند . GP یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی است که بر اساس مفهوم سطوح آرمانی که توسط تصمیم‌گیرنده (DM)[3] تعیین می شود، ارائه شده است. هدف GP مینیمم کردن متغیرهای انحراف سطوح آرمانی است، که توسط تصمیم‌گیرنده معین شده‌اند. هر چند تعیین سطوح آرمانی برای اهداف در مسائل دنیای واقعی کار دشواری است. در حقیقت اغلب مسائل دنیای واقعی در یک سیستم ناصریح قرار دارند. برخی روش‌ها برای مدل‌بندی مسائل GP با آرمان‌های ناصریح و غیر دقیق، معرفی شده‌اند. یکی از ابزارهای مفید برای این آرمان‌ها استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی می‌باشد.

ناراسیمهان [4][۲۴] با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و ترکیب آن با مسائلGP یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی (FGP)[5] را ارائه نمود. قبل از معرفی مسائل FGP ابتدا با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی آشنا می‌شویم.

۲.۱ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی که توسط پروفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ ارائه شد، یک روش ریاضی برای سروکارداشتن با ابهامات در طول زندگی است. در نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک، عضویت اعضاء در رابطه با یک مجموعه، با یک عبارت دودویی (صفر و یک) ارزیابی می‌شد که با توجه به حالت پیچیده‌ی یک عضو، یا متعلق به یک مجموعه بود یا متعلق به آن مجموعه نبود.

با مقایسه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی با نظریه‌ی مجموعه‌ی کلاسیک، می‌توان نتیجه گرفت که در مجموعه‌های فازی، درجه‌ی عضویت یک شیء در یک مجموعه محدود به مقادیر ۰ و ۱ نیست و ممکن است روی هر مقداری در بازه‌ی [۰,۱] باشد. به عبارت ساده‌تر مجموعه‌های فازی راهی برای رویارویی با ابهاماتی هستند که ما اغلب در زندگی روزانه با آن‌ها سر و کار داریم.

یک مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌ای است که ممکن است برخی از عناصر فقط تا حدی متعلق به آن باشند. به عنوان مثال، مجموعه‌های سیاه‌پوستان یک مجموعه‌ی فازی است که افراد کاملاً سیاه، کاملاً به آن تعلق دارند و افراد کاملاً سفید هیچ تعلقی به آن ندارند. در حالی که یک دو رگه ی سیاه و سفید

1. Charnes
2. Cooper
3. Desicion Maker
4. Narasimhan
5. Fuzzy Goal Programming

در آن مثلاً عضویت ۰/۵ دارد. تفاوت اساسی مجموعه‌های فازی با مجموعه‌های قطعی این است که بر خلاف مجموعه‌های قطعی، مرزهای یک مجموعه‌ی فازی ممکن است دقیق نباشد. مجموعه‌های فازی با نمادهای $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, ...$ مشخص می‌شوند.

۱.۲.۱ مجموعه‌های فازی و اعداد فازی

در نظریه‌ی مجموعه‌های سنتی یک زیرمجموعه مانند a از یک مجموعه مانند X می‌تواند با تابع مشخصه‌ی χ_a به صورت یک نگاشت از اعضای X به روی مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$ تعریف شود. این نگاشت می‌تواند با زوج‌های مرتب برای هر عضو X نمایش داده شود. اولین عضو این زوج مرتب، عضوی از مجموعه‌ی X و دومین عضو آن، عضوی از مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$ است:

$$\chi_a : X \longrightarrow \{۰, ۱\},$$

مقدار صفر جهت نمایش غیر عضو بودن و مقدار یک جهت نمایش عضو بودن استفاده می‌شود. درستی یا نادرستی گزاره‌ی $x \in a$ یا (x در a است) به وسیله‌ی زوج مرتب $(x, \chi_a(x))$ تعیین می‌شود. هرگاه عضو دوم این زوج مرتب ۱ باشد، گزاره درست و هرگاه برابر ۰ باشد، گزاره نادرست است.

به طور مشابه، یک زیر مجموعه‌ی فازی مانند $\tilde{a}$ از یک مجموعه‌ی X، می‌تواند با زوج های مرتب که اعضای اول آن‌ها، از مجموعه‌ی X و اعضای دوم آن‌ها از اعضای بین بازه $[۰, ۱]$ است، تعریف شود. هر زوج مرتب متناظر با یک عضو X است. این تعریف یک نگاشت $\mu_{\tilde{a}}$ بین اعضای مجموعه‌ی X و مقادیر بازه‌ی $[۰, ۱]$ است. مقدار صفر نشان‌دهنده‌ی غیرعضویت کامل، مقدار یک نشان‌دهنده‌ی عضویت کامل و مقدار بین صفر و یک نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی عضویت هستند.

میزان درستی گزاره‌ی x در $\tilde{a}$ است، با زوج مرتب $(x, \mu_{\tilde{a}}(x))$ توصیف می‌شود که درجه‌ی درستی گزاره با دومین عضو از این زوج مرتب نمایش داده می‌شود. باید توجه داشت که عبارات تابع عضویت و زیر مجموعه‌ی فازی می‌توانند به جای یک‌دیگر استفاده شوند. تعریف فرمول یک مجموعه‌ی فازی در زیر ارائه شده است:

تعریف ۳. فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع باشد. یک زیر مجموعه‌ی فازی از X به وسیله‌ی تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}} : X \longrightarrow [۰, ۱]$ توصیف می‌شود و برای هر $x \in X$، $\mu_{\tilde{a}}(x)$ درجه عضویت x را در مجموعه فازی $\tilde{a}$ نشان می‌دهد.

برای سادگی $\mu_{\tilde{a}}(x)$ را با $\tilde{a}(x)$ نشان می‌دهیم. واضح است که یک زیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ می‌تواند با یک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که شامل عضو x و عضو دیگر $\tilde{a}(x)$ است، توصیف شود:

$$\tilde{a} = \{(x, \tilde{a}(x)) | x \in X\}.$$

خانواده‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های فازی X را با $F(X)$ مشخص می‌کنیم.

مثال ۴. مجموعه‌ی مرجع $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را در نظر بگیرید. زیر مجموعه‌ی فازی از اعداد بزرگ این مجموعه را در نظر می‌گیریم. اگر این مجموعه را با $\tilde{a}$ نمایش دهیم، ممکن است تابع عضویت $\tilde{a}$ به

صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases} ۰ & x=۱, \\ ۰/۴ & x=۲, \\ ۰/۸ & x=۳, \\ ۱ & x=۴, \end{cases}$$

این تابع به عنوان نمونه می‌گوید که عدد ۴ کاملاً بزرگ است در حالی که میزان بزرگ بودن عدد ۲، ۰/۴ است.

مثال ۵. مجموعه‌ی فازی اعداد حقیقی نزدیک به صفر می‌تواند با تابع عضویت زیر مشخص شود:

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\frac{۱}{۱+۹x^{۲}}.$$

به عنوان نمونه داریم $\mu_{\tilde{b}}(۰)=۱$ و $\mu_{\tilde{b}}(۱)=۰/۱$. یعنی صفر، صددرصد به صفر نزدیک است. به بیان دیگر میزان تعلق عدد صفر به مجموعه اعداد نزدیک به صفر یک است. در حالی‌که این موضوع در مورد عدد یک به میزان ۰/۱ تحقق یافته است. واضح است که برحسب شرایط مختلف توابع ارائه شده قابل تغییر هستند.

اعمال اصلی که در نظریه‌ی مجموعه‌های اعداد فازی توسط زاده ارائه شد، به صورت زیر است:

۱. تساوی: مجموعه‌های فازی $\tilde{a},\tilde{b}$ با هم برابرند و به صورت $\tilde{a}=\tilde{b}$ نشان داده می‌شوند، اگر و تنها اگر توابع عضویت آن‌ها به ازای هر عضو X با هم برابر باشند:

$$\tilde{a}=\tilde{b}\Longleftrightarrow\tilde{a}(x)=\tilde{b}(x),\ \forall x\in X.$$

۲. زیر مجموعه: مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ زیرمجموعه‌ی $\tilde{b}$ است و به صورت $\tilde{a}\subseteq\tilde{b}$ نشان داده می شود اگر و تنها اگر تابع عضویت $\tilde{a}$ کمتر یا مساوی تابع عضویت $\tilde{b}$ به ازای هر عضو X باشد.

$$\tilde{a}\subseteq\tilde{b}\Longleftrightarrow\tilde{a}(x)\leq\tilde{b}(x),\ \forall x\in X.$$

۳. متمم: متمم یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ رویX را با $\tilde{a}^c$ نمایش می‌دهند که با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{a}^c(x)=۱-\tilde{a}(x),\ \forall x\in X.$$

۴. اشتراک: اشتراک دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ روی X که با $\tilde{a}\cap\tilde{b}$ نمایش داده می‌شود که با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{a}\cap\tilde{b}}(x)=\min\{\tilde{a}(x),\tilde{b}(x)\},\ \forall x\in X.$$

۵. اجتماع: اجتماع دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ روی X که با $\tilde{a}\cup\tilde{b}$ نمایش داده می‌شود که با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{a}\cup\tilde{b}}(x)=\max\{\tilde{a}(x),\tilde{b}(x)\},\ \forall x\in X.$$

در نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی، غالباً مینیمم و ماکزیمم دو مجموعه به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\min\{a,b\}=a\wedge b,$$

$$\max\{a,b\} = a \vee b,$$

با توجه به مطالب بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ می‌توانند با تابع عضویتی به صورت زیر نوشته شوند:

$$\mu_{\tilde{a}\cap\tilde{b}}(x) = \tilde{a}(x) \wedge \tilde{b}(x), \quad \forall x \in X,$$

$$\mu_{\tilde{a}\cup\tilde{b}}(x) = \tilde{a}(x) \vee \tilde{b}(x), \quad \forall x \in X.$$

تعریف ۶. تکیه گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ روی Xمجموعه‌ای از نقاط X می باشد به‌طوری‌که $\tilde{a}(x)$ مثبت باشد:

$$supp(\tilde{a}) = \{\ x \in X|\ \tilde{a}(x) > ۰\}.$$

تعریف ۷. ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ روی X با $hgt_{(\tilde{a})}$ نمایش داده می‌شود که کوچک‌ترین کران بالای $\tilde{a}(x)$ است:

$$hgt_{(\tilde{a})} = \sup_{x\in X} \tilde{a}(x).$$

تعریف ۸. برای یک مجموعه‌ی متناهی $\tilde{a}$، عدد اصلی $|\tilde{a}|$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{a}| = \sum_{x\in X} \mu_{\tilde{a}}(x).$$

تعریف ۹. یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ روی X نرمال است هر گاه ارتفاع آن یک باشد. در غیر این صورت $\tilde{a}$ یک مجموعه‌ی زیرنرمال است. اگر $\tilde{a}$ یک مجموعه‌ی فازی باشد، نرمال شده‌ی آن با تابع عضویت زیر مشخص می‌گردد:

$$\mu_{\mathrm{norm}\tilde{a}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{a}}(x)}{hgt_{(\tilde{a})}}.$$

تعریف ۱۰. یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ محدب است هر گاه:

$$\tilde{a}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min\{\tilde{a}(x_۱), \tilde{a}(x_۲)\}, \quad \forall x_۱, x_۲ \in X, \quad \lambda \in [۰, ۱].$$

تعریف ۱۱. یک مجموعه‌ی α-برش از یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ که با $\tilde{a}_\alpha$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{a}_\alpha = \{\ x \in X|\ \tilde{a}(x) \geq \alpha\}.$$

هم‌چنین α-برش قوی برای $\tilde{a}$ عبارت است از:

$$\tilde{a}_{\bar{\alpha}} = \{\ x \in X|\ \tilde{a}(x) > \alpha\}.$$

تعریف ۱۲. فرض کنیم $\tilde{a}$ زیر مجموعه‌ای فازی از اعداد حقیقی باشد، گوییم $\tilde{a}$ یک عدد فازی حقیقی است هر گاه:

۱- $\tilde{a}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب باشد.

۲- $\tilde{a}$ نرمال باشد.

۳- $\tilde{a}$ تک نمایی باشد. یعنی دقیقاً یک $x_\circ \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu_{\tilde{a}}(x_\circ) = ۱$. به عبارت دیگر دقیقاً یک عنصر با عضویت یک داشته باشد.

۴- نمودار تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}}(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد[الف].

برای ارائه‌ی مثال‌هایی از اعداد فازی حقیقی می‌توان به نمودارهای مثلثی که دارای ارتفاع یک هستند و نمودارهایی شبیه توزیع نرمال با ارتفاع یک، اشاره نمود.

مثال ۱۳. مجموعه‌های فازی زیر اعداد فازی می‌باشند به‌طوری‌که $\tilde{a}$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی فازی "تقریباً ۵" و $\tilde{b}$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی فازی "تقریباً ۱۰ " هستند:

$$\tilde{a} = \{(۳, ۰/۲), (۴, ۰/۶), (۵, ۱), (۶, ۰/۷), (۷, ۰/۱)\},$$

$$\tilde{b} = \{(۸, ۰/۳), (۹, ۰/۷), (۱۰, ۱), (۱۱, ۰/۷), (۱۲, ۰/۳)\}.$$

اما $\{(۳, ۰/۸), (۴, ۱), (۵, ۱), (۶, ۰/۷)\}$ یک عدد فازی نیست زیرا $\mu(۴), \ \mu(۵)$ هر دو برابر با یک هستند[ب].

تعریف ۱۴. عدد فازی $\tilde{a}$ را مثبت (منفی) می‌نامیم اگر تابع عضویت آن برای هر $x < ۰$ $(x > ۰)$ برابر با صفر باشد.

به عنوان آخرین نکته در این بخش می‌توان گفت که به منظور افزایش کارایی محاسبات و آسان شدن استفاده از آن در داده‌های مختلف، توابع عضویت ذوزنقه‌ای و مثلثی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل‌های بعد این توابع مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲.۲.۱ کاربرد نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی در مسائل برنامه‌ریزی

زمینه‌ی دیگر کاربرد منطق فازی در تئوری تصمیم‌گیری بوده است و روش‌های فازی در رشته‌های تصمیم‌گیری از قبیل تصمیم‌گیری چند هدفی، چندنفره و چندمرحله‌ای کاربرد فراوان دارد. در بیست سال اخیر، بیان نمودن سیستم‌های مجموعه‌های واقعی در مدل‌های ریاضی، پایه‌ی اصلی علوم و مهندسی شده‌است. پس از آن، تحقیق در عملیات در مسائل واقعی تصمیم به کار رفته و یکی از رشته‌های مهم در علوم و مهندسی شده است. از آن جا که موقعیت‌های عملی اغلب نامعلوم‌اند و نمی‌توان آن‌ها را به طور صریح بیان نمود، شاید شیوه‌های متداول تحقیق در عملیات، مناسب برای حل مسائل تصمیم‌گیری نباشند. از این رو مسائل تصمیم‌گیری را می‌توان به صورت مدل‌های تصمیم فازی فرمول‌بندی نمود.

اظهارات آقایان بلمن[1] و زاده در مورد نقش سیستم‌های فازی در فرایند تصمیم، توصیف بهتری است: بیشتر تصمیم‌گیری‌های دنیای واقعی در محیطی که اهداف، محدودیت‌ها و نتایج ممکن اعمال دقیق نیستند، انجام می‌گیرند. عدم دقت ما، معمولاً سبب می‌شود که ما مفاهیم و شیوه‌های نظریه‌ی احتمالات و به ویژه ابزار شرطی را با نظریه‌ی تصمیم گیری به کار ببریم. هم‌چنین به طور ضمنی این قضیه را که

1. Bellman

عدم درستی هر چیز با تصادفی بودن آن برابر است می‌پذیریم و در این صورت یک فرض سوال‌برانگیز برای ما به وجود می‌آید، به ویژه بحث ما بیشتر در مورد نیاز به تفکیک کردن بین موارد تصادفی و فازی است و خود این مطالب منبع مهم نادرستی در بسیاری از فرایندهای تصمیم‌گیری شده‌است. ما می‌توانیم یک موضوع غیر قطعی را با سیستم‌های فازی معنا کنیم.

در سال ۱۹۷۶ ، زیمرمان[1] اولین نظریه‌ی سیستم فازی را جهت مسائل برنامه‌ریزی خطی متعارف ارائه کرد. او مسائل برنامه‌ریزی خطی را با یک تابع هدف فازی و محدودیت‌های فازی در نظر گرفت. او از توابع عضویت خطی و عملگر اجتماع بین این توابع استفاده کرد و مسائل برنامه‌ریزی خطی را به وسیله‌ی مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی تعیین نمود.

۳.۱ معرفی مسأله‌ی FGP

مفهوم توابع عضویت، بر اساس نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی توسط زیمرمان (۱۹۷۶،۱۹۷۸،۱۹۸۳) و فرلینگ [2] (۱۹۸۰) برای فرمول‌بندی پارامترهای فازی تصمیم‌گیری معرفی و مورد استفاده قرار گرفت. فرم کلی تابع عضویت با دو درجه‌ی پذیرفتنی بالا و پایین به صورت زیر است:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} ۱ & f_i(x) \leq b_i \\ ۱ - \dfrac{f_i(x) - b_i}{\Delta_i} & b_i < f_i(x) \leq b_i + \Delta_i \\ ۰ & f_i(x) > b_i + \Delta_i \end{cases}$$

که $\mu_i(x)$ تابع عضویت مجموعه جواب تصمیم است و $b_i, b_i + \Delta_i$ به ترتیب کران‌های پایین و بالای متناظر با تابع هدف $f_i(x)$ هستند. پارامترهای Δ_i، ثابت‌های تغییرات قابل قبول هستند. زیمرمان اولین فرمول‌بندی برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی فازی را بر اساس مفهوم تابع عضویت به صورت زیر ارائه داد:

$$\max \quad Z = \lambda$$

$$\text{s.t.}$$

$$\lambda \leq \frac{(b_i - f_i(x))}{\Delta_i} \qquad i = ۱, ۲..., p,$$

$$x \in X,$$

$$\lambda \geq ۰.$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد، ناراسیمهان [۲۴] با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و ترکیب آن با مسائلGP یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی را ارائه نمود. پس از ناراسیمهان، هنان [3][۱۹] روش ناراسیمهان را تعمیم داد. فرمول‌بندی FGP ارائه شده توسط هنان بسیار ساده‌تر و کاراتر از مدل

1. Zimmerman
2. Freeling
3. Hannan

ناراسیمهان است. مدل FGP سطوح آرمانی فازی را در نظر می‌گیرد. این عبارت فازی توسط تابع عضویت مثلثی تعریف شده روی بازه‌ی $[\circ, ۱]$ بیان خواهد شد.
فرمول‌بندی ریاضی مدل هنان به صورت زیر است:

$$\max \quad Z = \lambda$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{f_i(x)}{\Delta_i} + \delta_i^- - \delta_i^+ = \frac{g_i}{\Delta_i} \qquad i = ۱, ۲, ..., p,\\
&\lambda + \delta_i^- + \delta_i^+ \leq ۱ \qquad i = ۱, ۲, ..., p,\\
&x \in X,\\
&\lambda, \delta_i^-, \delta_i^+ \geq \circ \qquad i = ۱, ۲, ..., p,
\end{aligned}$$

که Δ_i ثابت‌های انحراف سطوح آرمانی g_i هستند. این ثابت‌ها توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند. هم‌چنین متغیرهای δ_i^+, δ_i^- نشان‌دهنده‌ی انحراف‌های مثبت و منفی سطوح آرمانی g_i ها هستند. تابع عضویت متناظر با این فرمول‌بندی به صورت زیر است:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \circ & f_i(x) \leq g_i - \Delta_i,\\ \dfrac{(f_i(x) - (g_i - \Delta_i))}{\Delta_i} & g_i - \Delta_i \leq f_i(x) \leq g_i,\\ \dfrac{(g_i + \Delta_i - f_i(x))}{\Delta_i} & g_i \leq f_i(x) \leq g_i + \Delta_i,\\ \circ & f_i(x) \geq g_i + \Delta_i, \end{cases}$$

فرمول‌بندی‌های مختلف FGP می‌توانند در چهار دسته به صورت زیر قرار بگیرند:
الف) FGP وزنی،
ب) FGP الفبایی،
ج) برنامه‌ریزی آرمانی MINMAX فازی،
د) FGP محاوره‌ای [۲].

در این فصل به معرفی چند نمونه از مسائل برنامه‌ریزی خطی پرداختیم. سپس با نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی و اعداد فازی آشنا شدیم. مجموعه‌ی فازی در مسائل برنامه‌ریزی کاربردهای زیادی دارند، از این رو مسأله ی FGP را که نمونه‌ای از مدل بندی مسائل برنامه‌ریزی آرمانی فازی است، معرفی نمودیم. این مسأله در فصل‌های ۳، ۴ و ۵ برای حل مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی و چندسطحی مورد استفاده قرار می‌گیرد.