دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

تقریب توسط توابع معین مثبت روی گروه های فشرده

نگارش:
هادی پولادی

استاد راهنما:
دکتر حبیب امیری

استاد مشاور:
دکتر سعید مقصودی

آبان ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

مساله‌ی تقریب، بخصوص تقریب داده‌های پراکنده شده کاربردهای زیادی در علوم مختلف از جمله علوم کاربردی دارد. در این پایان‌نامه ما تقریب داده‌های پراکنده شده روی یک گروه فشرده با توابع معین مثبت را بررسی می‌کنیم، در واقع پس از بیان ارتباط بین نمایش‌های روی یک گروه فشرده و توابع معین مثبت روی آن گروه این مساله‌ی تقریب را بیان می‌کنیم و سوالاتی که ممکن است بوجود آید را بیان کرده و تا حد امکان سعی می‌کنیم به این سوالات پاسخ دهیم.

واژه‌های کلیدی: *تقریب داده‌های پراکنده شده، توابع معین مثبت، گروه فشرده.*

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

تقریب داده‌های پراکنده شده یک زمینه‌ی پژوهشی جدید و به سرعت در حال رشد است که علوم ریاضی و مهندسی را به هم ارتباط می‌دهد. در واقع تقریب داده‌های پراکنده شده نامی است که به مجموعه‌ای از روش‌ها داده می‌شود که تلاش می‌کنند تا با در دست داشتن نمونه‌ای از داده‌ها و همچنین مقادیرشان تابعی که مقادیرش در این نقاط نزدیکترین مقادیر به مقادیر داده‌های نمونه باشد را به دست دهند، یعنی این مسأله با احیای یک تابع نامعلوم از داده‌های پراکنده شده سروکار دارد. در حالت کلی دو نوع از این توابع وجود دارند درونیاب و تقریب زننده که با مقادیرشان در مکانهای داده‌های نمونه متمایز می‌شوند. در توابع درونیاب مقدار به دست آمده دقیقاً با مقدار داده شده در مکان مورد نظر یکی است و در توابع تقریب زننده این مقدار نزدیکترین مقدار به مقادیر نمونه‌ی داده شده است، که طبیعتاً هدف ما بیشتر مورد دوم است. [۲۷]

این روش کاربردهای زیادی در ریاضیات کاربردی - نقشه برداری - علوم کامپیوتر - زمین شناسی - زیست شناسی و ... دارد، مثل مدل سازی زمین - بازسازی سطح - فعل و انفعال ساختار مایع - جوابهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و ... . با در نظر گرفتن این کاربردها متوجه می‌شویم که یک روش مناسب برای این نوع تقریب باید قادر باشد در هر بعد دلخواهی از فضا و نیز با هر تعداد نقطه‌ی دلخواه جوابگو باشد، که حتی شاید هیچ نظم و قاعده‌ای نیز بین این نقاط موجود نباشد. بنابراین یک روش مناسب در این زمینه باید این مورد را نیز در برگیرد، در نتیجه روش‌هایی که این شرط را نادیده می‌گیرند نادیده گرفته می‌شوند، اما این به این معنی نیست که چنین روش‌هایی نمی‌توانند در زمینه‌ی تقریب داده‌های پراکنده شده به کار روند بلکه این التزام فقط روش‌های کارآمد را کاهش می‌دهد. خواهیم دید در میان روش‌های موجود روش توابع پایه‌ی شعاعی یا عموماً تقریب توسط توابع معین مثبت بهتر به نظر می‌رسد. تقریب یک تابع f با ترکیب خطی انتقال‌های یک تابع پایه‌ی واحد ϕ، در مواردی که خمینه زمینه $\mathbb{R}^d$ است و تابع پایه متقارن شعاعی است در گذشته با

جزئیات مورد مطالعه قرار گرفته است در این پایان‌نامه هدف پیگیری چنین روشی است. [۸، ۲۷]

به‌کار بستن چنین روشی برای تقریب داده‌های پراکنده شده طبیعتاً مسائلی به وجود می‌آورد که ما درصدد هستیم در این پژوهش تا حد امکان این مسائل را بررسی کنیم. مسائلی که ممکن است به وجود آیند به شرح زیر می‌باشند :

۱) چه توابعی می‌توانند به این روش تقریب زده شوند ؟

در واقع در این پایان‌نامه ابتدا فضای تابعی که تقریب در آن اتفاق می‌افتد مشخص شده و روشن می‌شود که توابع درون این فضای تابعی می‌توانند به این روش تقریب زده شوند.

۲) برای تقریب یک تابع به روش ذکر شده از یک سیستم خطی استفاده می‌شود مساله‌ی دومی که مطرح می‌شود این است که آیا اساساً این سیستم خطی می‌تواند به یک روش پایا حل شود یا نه ؟

۳) سومین سوال مطرح شده مربوط به خطای تقریب در این روش است که مورد بررسی قرار می‌گیرد.[۸]

مسایل مطرح شده در فضای $\mathbb{R}^d$ به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است، در این پژوهش وضعیتی را بررسی می‌کنیم که با گروه فشرده یا موضعاً فشرده‌ی G، سروکار داریم و حتی در مواردی گروه‌های ماتریسی خاصی مورد بحث قرار می‌گیرند همانند گروه دوران $SO(۳)$، که در اینجا نیز ذکر می‌شود. [۸، ۹] تا زمانیکه گروهی که با آن سروکار داریم می‌تواند در $\mathbb{R}^d$ نشانده شود خصوصیات توابع معین مثبت روی این گروه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد اما اشکال این روش‌ها به طور کلی درا ینست که ساختمان جبری زمینه نادیده گرفته می‌شود، مخصوصاً آنالیز هارمونیک روی گروه‌ها نمی‌تواند در این روش به خوبی به منظور مطالعه‌ی مسائل ذکر شده به کار رود، بنابراین بهتر است مستقیماً روی گروه‌ها کار شود این روشی است که در اینجا دنبال می‌شود. در این پایان‌نامه ابتدا در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز برای ادامه‌ی کار بیان می‌شوند، در فصل دوم نمایش روی گروه‌های توپولوژیک و همچنین توابع از نوع مثبت و معین مثبت معرفی می‌شوند و ارتباط بین آن‌ها را بیان می‌کنیم، در فصل سوم مساله‌ی تقریب با توابع معین مثبت روی یک گروه فشرده بیان می‌شود و در فصل چهارم کاربرد این روش روی گروه دوران به عنوان یک گروه فشرده بررسی می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای که در ادامه کار به آن‌ها نیاز خواهیم داشت بیان می‌شوند. در این فصل بیشتر از مراجع [۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۲۰] استفاده شده است.

۱.۱ گروه توپولوژیک و فضای برداری توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱. *گروه توپولوژیک* [۱]*:*

یک گروه G را با یک توپولوژی یک گروه توپولوژیک می‌نامیم هرگاه اعمال ضرب و وارون پیوسته باشند. اعمال ضرب و وارون به‌صورت زیر هستند:

$$\text{ضرب} : \begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (x,y) \longmapsto x \cdot y \end{array}$$

$$\text{وارون} : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto x^{-1} \end{array}$$

با توجه به مفهوم پیوستگی بین فضاهای توپولوژیک، پیوستگی عمل ضرب یعنی برای هر همسایگی W حول $x \cdot y$ همسایگی‌های U حول x و V حول y وجود دارد که $UV \subseteq W$. پیوستگی وارون یعنی برای هر همسایگی U حول x^{-1} یک همسایگی V حول x هست که $V^{-1} \subseteq U$.

تعریف ۲.۱.۱. *یک تابع دوسویی بین فضاهای توپولوژیک که خودش و وارونش پیوسته باشند، همانریختی* [۲] *نامیده می‌شود.*

[۱] Topological Group
[۲] Homeomorphism

قضیه ۳.۱.۱. *اگر G گروهی توپولوژیک باشد،*

۱) *نگاشتهای زیر همانریختی هستند.*

$$\begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto a \cdot x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto x \cdot a \end{array}$$

۲) *اگر U در G باز باشد و $a \in G$، آن‌گاه Ua, U^{-1} و aU مجموعه‌های باز هستند.*

۳) *اگر U در G باز باشد و $A \subseteq G$، آن‌گاه AU و UA نیز باز هستند.*

برهان . برای برهان رجوع شود به [۱۰] گزاره‌ی (۱ ۰ ۲). □

گزاره ۴.۱.۱. *اگر $x \in G$ و U همسایگی حول x باشد، $x^{-1}U$ همسایگی حول e است. بنابراین هر همسایگی حول x را می‌توان به‌صورت $U = x(x^{-1}U) = xV$ نوشت که $V = x^{-1}U$ همسایگی حول e است.*

برهان . برهان طبق قضیه‌ی قبل واضح است. □

تعریف ۵.۱.۱. *فضای برداری توپولوژیک [1]:*

فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر روی X یک توپولوژی قرار دهیم که اعمال جمع برداری $+ : X \times X \longrightarrow X$ و ضرب در اسکالر $\cdot : F \times X \longrightarrow X$ پیوسته باشند آن‌گاه X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. *فضای G را هاسدورف می‌گویند هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز از G مثل x , y ($x \neq y$) همسایگی‌های U حول x و V حول y موجود باشند که $U \cap V = \emptyset$.*

تعریف ۷.۱.۱. *یک گروه توپولوژیک G را فشرده می‌گوییم هرگاه به عنوان یک فضای توپولوژیکی، فشرده باشد.*

[1] Topological Vector Space

تعریف ۸.۱.۱. گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده می‌گویند هرگاه G هاسدورف بوده و برای هر همسایگی U حول $x \in G$، همسایگی V حول x موجود باشد که $V \subseteq U$ و $\bar{V}$ فشرده باشد. در واقع گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده می‌گوییم هرگاه G هاسدورف بوده و e دارای همسایگی با بستار فشرده باشد.

۲.۱ اندازه و انتگرال هار

قضیه ۱.۲.۱. قضیه نمایش ریس [1]:

اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده و I یک تابعک خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد در این صورت یک $\sigma-$ جبر $\mathcal{M}$ بر X موجود است که شامل مجموعه‌های بورل است و یک اندازه مثبت منحصر به فرد λ بر $\mathcal{M}$ موجود است که I را به مفهوم زیر نمایش می‌دهد،

$$\forall f \in C_c(X) \quad I(f) = \int_X f d\lambda,$$

و نیز اگر K فشرده باشد $\lambda(K) < \infty$.

برهان . رجوع شود به [۲۰] قضیه‌ی (۲ ۰ ۱۴). $\square$

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده باشد آن‌گاه تابعک خطی I بر $C_c(G)$ موجود است که

الف) اگر $0 \leq f$ عضو ناصفری از $C_c(G)$ باشد، $I(f) > 0$.

ب) $I(L_a f) = I(f)$.

به‌علاوه اگر J تابعک خطی مثبت ناصفری باشد که در خاصیت (ب) صدق کند آن‌گاه عدد مثبت $c > 0$ موجود است که $J = cI$.

برهان . رجوع شود به [۱۰]. $\square$

[1] Riesz Representation Theorem

نتیجه ۳.۲.۱. *با توجه به قضیه نمایش ریس یک $\sigma-$ جبر و یک اندازه λ موجود است که*

$$I(f) = \int f \, d\lambda,$$

که λ تمام خواص مذکور در قضیه‌ی نمایش ریس را دارد.

تعریف ۴.۲.۱. *تابعک I را که در بالا به دست آمد انتگرال هار چپ بر $C_c(G)$ و اندازه‌ی λ نمایش دهنده‌ی آن را اندازه‌ی هار چپ می‌گوییم.*

قضیه ۵.۲.۱. *اگر G گروهی موضعاً فشرده باشد و λ اندازه هار چپ بر G باشد آن‌گاه داریم:*
G فشرده است اگر وتنها اگر $\lambda(G) < \infty$

برهان . رجوع شود به [۱۴] قضیه‌ی (۹ ۰ ۱۵). $\square$

تعریف ۶.۲.۱. *اگر G گروهی فشرده باشد و λ اندازه هار چپ بر G باشد می‌دانیم $\lambda(G) < \infty$، حال می‌توانیم تعریف کنیم*

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda(G)},$$

که در نتیجه داریم $\mu(G) = ۱$، که μ را اندازه احتمال روی G یا اندازه هار نرمال شده می‌گوییم. بنابراین اگر G فشرده باشد می‌توانیم اندازه هار را نرمال در نظر بگیریم یعنی $\lambda(G) = ۱$.

۳.۱ فضای L^P و فضای هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱. *هرگاه q, p اعداد حقیقی مثبتی باشند که $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = ۱$ آن‌گاه q, p را مزدوج می‌نامیم. به وضوح $۱ < p < \infty, ۱ < q < \infty$ و اگر $p \to ۱$ آن‌گاه $q \to \infty$ ولذا $۱, \infty$ را نیز مزدوج یکدیگر می‌نامند.*

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای اندازه دلخواه با اندازه مثبت μ باشد، اگر $۱ \leq p < \infty$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی اندازه پذیر باشد نرم L^p و فضای L^p را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$L^p(X, \mu) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_p < \infty \}.$$

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید q, p مزدوج باشند و $1 < p < \infty$ و $f, g : X \longrightarrow [0, \infty)$ اندازه پذیر باشند، در این صورت،*

$$\int_X fg d\mu \leq \Big(\int_X f^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X g^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}},$$
$$\Big(\int_X (f+g)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_X f^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X g^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

برهان . رجوع شود به [۲۰] قضیه‌ی (۳.۰۸, ۳.۰۹). □

تعریف ۴.۳.۱. *نرم L^∞ و فضای L^∞:*

$\|f\|_\infty$، سوپریموم اساسی $|f|$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|f\|_\infty = inf\{\alpha \ : \ \mu\{x : |f(x)| > \alpha\} = 0\},$$

$$L^\infty(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ \|f\|_\infty < \infty\}.$$

تعریف ۵.۳.۱. *تابعی به‌صورت $H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ که در خواص زیر صدق کند یک شبه ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط H نامیده می‌شود.*

$\forall x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

۱) نسبت به مولفه اول خطی باشد،

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle,$$

۲) نسبت به مولفه دوم مزدوج خطی باشد،

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle,$$

۳) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$،

۴) $\langle x, x\rangle \geq 0$ $\forall x \in H$.

این شبه ضرب داخلی را ضرب داخلی می‌گویند هرگاه $\langle x, x\rangle = 0$ نتیجه دهد که $x = 0$.

قضیه ۶.۳.۱. *اگر $\langle,\rangle$ یک شبه ضرب داخلی روی H باشد، آن‌گاه داریم:*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \quad \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

این نامساوی موسوم به نامساوی کشی شوارتز [1] است.

برهان . رجوع شود به [۲۰] قضیه‌ی (۲۰۴). $\square$

تعریف ۷.۳.۱. *فضای هیلبرت [2]:*

H را یک فضای هیلبرت می‌گوییم هرگاه روی H یک ضرب داخلی تعریف شود و اگر تعریف کنیم $\langle x,x\rangle = \|x\|^۲$، آن‌گاه H با این نرم کامل باشد یعنی هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا شود.

تساوی زیر به اتحاد قطبی معروف است.

$$\langle x,y\rangle = \frac{۱}{۴}\Big[\|x+y\|^۲ - \|x-y\|^۲ + i\|x+iy\|^۲ - i\|x-iy\|^۲\Big].$$

تعریف ۸.۳.۱. *در یک فضای هیلبرت H می‌گوییم x بر y عمود است هرگاه $\langle x,y\rangle = ۰$. اگر $H \supseteq A$ داریم:*

$$A^{\perp} = \{x \in H \ : \ \langle x,y\rangle = ۰ \ \forall y \in A\}.$$

قضیه ۹.۳.۱. *اگر E یک مجموعه متعامد یکه در H باشد آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند.*

۱) *E یک پایه است،*

۲) $E^{\perp} = \{۰\}$،

۳) $\overline{span\ E} = H$،

۴) $\forall x \in H, \quad x = \sum_{e\in E}\langle x,e\rangle e$،

۵) $\forall x,y \in H, \quad \langle x,y\rangle = \sum_{e\in E}\langle x,e\rangle\langle e,y\rangle$،

۶) $\|x\|^۲ = \sum_{e\in E}|\langle x,e\rangle|^۲$، *این تساوی به تساوی پارسوال نیز موسوم است.*

برهان . رجوع شود به [۲۰]. $\square$

---

[1] Cauchy-Schwarz Inequality
[2] Hilbert Space

تعریف ۱.۳.۱۰. اگر M زیرفضایی بسته از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه برای هر $x \in H$، اعضای یکتای $\dot{x} \in M$ و $\ddot{x} \in M^{\perp}$ موجود است که $x = \dot{x} + \ddot{x}$. عملگر $P : H \longrightarrow M$ که $P(x) = \dot{x}$ را تصویر متعامد بر M می‌نامیم که دارای خواص زیر است،

۱) $\|P\| = ۱, P^* = P$ و $P \geq ۰$ یا $\forall x \in H: \langle P(x), x\rangle \geq ۰$،

۲) $\forall x \in M : Px = x$ در واقع $M = \{x \in H : Px = x\}$،

۳) $M^{\perp} = \{x \in H : Px = ۰\} = kerP$.

تعریف ۱.۳.۱۱. یک عملگر [۱] یک نگاشت بین فضاهای برداری است، مثلاً اگر V, U دوفضای برداری باشند آن‌گاه $A : U \longrightarrow V$ یک عملگر بین فضاهای برداری ذکر شده است و نیز عملگر $A : U \longrightarrow U$ یک عملگر روی فضای برداری U است.

تعریف ۱.۳.۱۲. فرض کنید V, U دو فضای برداری روی میدان F باشند، تابع $T : U \longrightarrow V$ را یک تبدیل خطی می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in U$ و هر $c \in F$ داشته باشیم،

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y).$$

هر تبدیل خطی از یک فضای برداری به خودش را یک عملگر خطی می‌گوییم.

تعریف ۱.۳.۱۳. یک مجموعه‌ی A را به همراه دو عمل دوتایی $+, *$ یک جبر [۲] می‌نامیم یعنی $(A, +, *)$ یک جبر است در صورتیکه $(A, +)$ فضایی برداری باشد و $(A, *)$ یک حلقه باشد و $*$، $\forall a, b, c \in A, \alpha \in \mathbb{C}$ در خواص زیر صدق کند،

۱) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$،

۲) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$،

۳) $(\alpha a) * b = \alpha(a * b)$،

۴) $a * (b * c) = (a * b) * c$.

---

[۱] Operator
[۲] Algebra

تعریف ۱.۳.۱۴. یک جبر A که با نرم $\|.\|$، یک فضای باناخ یعنی یک فضای برداری نرم دار کامل شود و همچنین،

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|,$$

یک جبر باناخ [۱] گفته می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱۵. تابع $A \longrightarrow A : *$ که در خواص زیر صدق کند یک برگشت [۲] برجبر A نامیده می‌شود.

۱) $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$ $\quad \forall a, b \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$،

۲) $(ab)^* = b^* a^*$،

۳) $(a^*)^* = a$.

تعریف ۱.۳.۱۶. یک جبر باناخ به همراه یک برگشت را یک باناخ $*-$ جبر [۳] می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۱۷. اگر A، یک باناخ $*-$ جبر باشد و $\|a^*a\| = \|a\|^2$ آن‌گاه A یک C^*- جبر [۴] است.

تعریف ۱.۳.۱۸. عملگر خطی $\varphi : A \longrightarrow B$ که A, B هر دو جبر باناخ هستند را یک همریختی [۵] جبری می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall a, b \in A, \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

تمام همریختی‌های جبری $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را کاراکتر [۶] روی A یا مشخصه‌های A می‌نامیم.

[۱] Banach Algebra
[۲] Involution
[۳] Banach *-Algebra
[۴] $C^* - Algebra$
[۵] Homomorphism
[۶] Character

تعریف ۱.۳.۱۹. اگر H یک فضای هیلبرت باشد عملگر $A : H \longrightarrow H$ را یک عملگر معین مثبت می‌گوییم هرگاه

$$\forall u \in H, \qquad \langle Au, u\rangle > 0.$$

اگر نامساوی به‌صورت $\geq$ باشد عملگر فوق را نیمه معین مثبت می‌گوییم.

تعریف ۱.۳.۲۰. در جبر خطی و نظریه‌ی عملگرها اگر T یک عملگر نیمه معین مثبت کراندار روی یک فضای هیلبرت مختلط باشد، B ریشه‌ی دوم T است اگر

$$T = B^*B$$

که B^* الحاقی عملگر B است. B را با $T^{1/2}$ نیز نشان می‌دهیم .

تعریف ۱.۳.۲۱. فرض کنید K, H دو فضای هیلبرت باشند، نگاشت $f : H \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک فرم یک ونیم خطی [1] می‌گوییم هرگاه نسبت به مؤلفه‌ی اول خطی ونسبت به مؤلفه‌ی دوم مزدوج خطی باشد.

تعریف ۱.۳.۲۲. فرم f را کراندار می‌گوییم هرگاه

$$\exists\, M > 0 \ : \ \forall x \in H, \forall y \in K \ , |f(x, y)| \leq M\|x\|\, \|y\|.$$

اینفیمم چنین M هایی را با $\|f\|$ نشان می دهیم، یعنی $|f(x, y)| \leq \|f\|\, \|x\|\, \|y\|$

تعریف ۱.۳.۲۳. اگر H یک فضای هیلبرت باشد عملگر $T \in B(H)$ را فشرده می‌گوییم هرگاه $\overline{T(B)}$ فشرده باشد که در آن $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. عملگر T را از رتبه متناهی می‌گوییم هرگاه $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$. هر عملگر از رتبه متناهی فشرده است.

تعریف ۱.۳.۲۴. اگر $H,\ K$ فضاهای هیلبرت باشند، گردایه‌ی تمام نگاشتهای خطی کراندار از H به توی K را با $B(H, K)$ نشان می‌دهند. همچنین $B(H, H) = B(H)$. مجموعه‌ی $B(H, K)$ فضایی نرمدار است که نرم آن به‌صورت زیر می‌باشد

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ \ : \ \ \|x\| \leq 1\}.$$

[1] Sesquilinear

مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده از H به K را با $K(H,K)$ نشان می‌دهیم و عملگرهای فشرده روی H را با $K(H)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۵.۳.۱. اگر $f : H \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ یک فرم یک ونیم خطی کراندار باشد آن‌گاه عملگرهای منحصر به‌فرد $T \in B(H,K)$ و $S \in B(H,K)$ موجودند که

$$\forall x \in H, \forall y \in K, \qquad f(x,y) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle.$$

وبه‌علاوه $\|S\| = \|T\| = \|f\|$. این S را الحاقی عملگر T نامند و با T^* نمایش می‌دهند.

برهان . رجوع شود به [۱۰]. □

تذکر ۲۶.۳.۱. می‌توان نشان داد که $B(H)$ یک C^*- جبر است که برگشت آن همان الحاقی است.

تعریف ۲۷.۳.۱. برای هر عنصر a در یک C^*- جبر قدرمطلق آنرا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}.$$

به‌وضوح اگر عنصر a، مثبت باشد داریم $a = |a|$. همچنین دیدیم $B(H)$ با برگشت الحاقی یک C^*- جبر است بنابراین این تعریف برای عملگرهای نامنفی نیز برقرار است.

تعریف ۲۸.۳.۱. عملگر یکانی [۱]:

فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $B(H)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی H باشد. عملگر $u \in B(H)$ را یکانی می‌نامیم هرگاه $u : H \longrightarrow H$ یک به یک، پوشا و طولپا باشد یعنی $\|ux\| = \|x\|$. اگر $U(H)$ را فضای عملگرهای یکانی در $B(H)$ در نظر بگیریم آن‌گاه $U(H)$ با عمل ضرب عملگرها که همان ترکیب است یک گروه تشکیل می‌دهد. $U(H)$ زیرمجموعه‌ای از گوی یکه بسته در $B(H)$ است در واقع،

$$\forall u \in U(H) \;:\; \|u\| = ۱.$$

[۱] Unitary

تعریف ۲۹.۳.۱. منظور از یک شبه نرم [1] بر یک فضای برداری X نگاشت $P : X \longrightarrow [0, \infty)$ است که،

۱) $\forall x, y \in X \;\; P(x+y) \leq P(x) + P(y)$،

۲) $\forall \alpha \in F, \forall x \in X \;\; P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

شبه نرم P را یک نرم می‌گوییم هرگاه از $P(x) = 0$ نتیجه شود که $x = 0$.

تعریف ۳۰.۳.۱. فرض کنید $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده ای از شبه نرمها بر فضای X باشند، شرط زیر را شرط هاسدورف می‌گوییم،

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \{x \in X : P_\alpha(x) = 0\} = \{0\}.$$

اگر خانواده‌ای از شبه نرمها روی فضای برداری X موجود باشد که در شرط هاسدورف صدق کند، آن‌گاه X را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب هاسدورف تبدیل می‌کند. عکس این مطلب نیز درست است یعنی هر توپولوژی موضعاً محدب روی یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف توسط یک خانواده از شبه نرمها که در شرط هاسدورف صدق می‌کند ایجاد شده است.

تذکر ۳۱.۳.۱. در توپولوژی القایی توسط شبه نرمهای $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ داریم:

۱) $x_i \to x \Longleftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda \; : \; \lim P_\alpha(x_i - x) = 0$ ،

۲) هر P_α نسبت به این توپولوژی پیوسته است یعنی،

$$|P_\alpha(x_i) - P_\alpha(x)| \leq P_\alpha(x_i - x).$$

تعریف ۳۲.۳.۱. توپولوژی عملگری قوی [2]:

برای هر $x \in H$ شبه نرم $P_x : B(H) \longrightarrow [0, \infty)$ را به‌صورت $P_x(T) = \|Tx\|$ تعریف می‌کنیم. به وضوح P_x شبه نرم است. نشان داده می‌شود خانواده‌ی $\{P_x\}_{x \in H}$ در شرط هاسدورف صدق می‌کند. توپولوژی موضعاً محدب ایجاد شده توسط این خانواده از شبه نرمها روی $B(H)$ را

[1] Seminorm
[2] Strong Operator Topology

توپولوژی عملگری قوی می نامیم. در این توپولوژی داریم:

$$T_i \longrightarrow T \Longleftrightarrow \forall x \in H; P_x(T_i - T) \longrightarrow \circ$$

$$\equiv \forall x \in H, \|T_i x - Tx\| \longrightarrow \circ$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in H \ \ T_i(x) \longrightarrow T(x).$$

که این مطلب معادل همگرایی نقطه‌ای است. همچنین داریم:

$$\forall\ x \in H\ :\ \|T_i(x) \longrightarrow T(x)\| < \|T_i - T\|\ \|x\|.$$

بنابراین اگر $T_i \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} T$ آن‌گاه $T_i \longrightarrow T$ در توپولوژی عملگری قوی. یعنی توپولوژی نرم قوی‌تر از توپولوژی عملگری قوی است.

تعریف ۳۳.۳.۱. *توپولوژی عملگری ضعیف [۱]:*

برای هر $x, y \in H$ شبه نرم $P_{x,y} : B(H) \longrightarrow [\circ, \infty)$ را به‌صورت $P_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$ تعریف می‌کنیم، به وضوح $P_{x,y}$ شبه نرم است. نشان داده می‌شود خانواده‌ی $\{P_{x,y}\}_{x,y\in H}$ در شرط هاسدورف صدق می‌کنند. توپولوژی موضعاً محدب ایجاد شده توسط این خانواده از شبه نرمها روی $B(H)$ را توپولوژی عملگری ضعیف می‌نامیم. در این توپولوژی داریم:

$$T_i \longrightarrow T \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in H \quad P_{x,y}(T_i - T) \longrightarrow \circ$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\langle T_i x - Tx, y\rangle| \longrightarrow \circ$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in H \langle T_i x, y\rangle \longrightarrow \langle Tx, y\rangle.$$

توپولوژی عملگری ضعیف از توپولوژی عملگری قوی، ضعیف‌تر است. می‌توان نشان داد بر فضای عملگرهای یکانی $U(H)$، توپولوژی عملگری قوی و توپولوژی عملگری ضعیف یکسان هستند.

[۱] Weak Operator Topology