دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار ریاضی

برآورد مدل رگرسیون ساده خطی برای متغیرهای تصادفی فازی

استاد راهنما:

دکتر حجت اله ذاکرزاده

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا هوشمنداصل

پژوهش و نگارش:

محمد رضا ذاکری

دی‌ماه ۱۳۹۰

و با سپاس ازسه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و و نه توان تشکر از بندگان تو، اما بر حسب وظیفه سپاسگزارم از استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر حجت الله ذاکرزاده که بادقت و حوصله زائدالوصفی، راهنمایی‌های ارزنده‌ای را در جهت تدوین ونگارش این تحقیق ارائه نمودند و از استاد مشاور محترم دکتر محمد رضا هوشمنداصل که تصحیح آن‌را متقبل شدند و نظرات ارزشمندی در تکوین این پایان‌نامه ابراز نموده‌اند.

سپاسگزارم از آقای دکتر حمزه ترابی و آقای دکتر افشین پرورده که داوری این پایان‌نامه را پذیرفته‌اند.

و در پایان از پدر، مادر و همه فرشتگانی که بال‌های محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری‌ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم و این نیست جز جلوه‌ای از لطف و رحمت پرودگاری که از ادای شکر حتی یك نعمت او ناتوانم.

چکیده

یک مسأله اساسی درباره متغیرهای تصادفی، برآورد تابعی وابسته از متغیر پاسخ روی یک مجموعه از متغیرهای مستقل، بر مبنای n مشاهده توأم است. در این پژوهش، نوعی از مدل رگرسیون خطی ساده فازی بررسی می‌گردد که در آن، هر دو سری از داده‌های ورودی و خروجی می‌توانند زیرمجموعه‌هایی فازی از $\mathbb{R}^p$ باشند.

تفسیر ارتباط و یافتن مدل بهینه در بررسی رگرسیون و آنالیز همبستگی برای متغیرهای تصادفی فازی پیچیده‌تر از حالت کلاسیک است. بدین منظور، دو مسأله اساسی، مورد مطالعه قرار می‌گیرند:

۱-تشخیص مدل: در اینجا، مدل ساده خطی جدیدی برای متغیرهای تصادفی فازی[۱] $(FRVs)$ در $\mathbb{R}^p$ در نظر گرفته می‌شود.

۲-برآورد مدل مورد نظر: برآورد پارامترهای موجود در مدل.

در این پایان‌نامه، این وابستگی، از طریق یک تابع خطی به صورت $\mathcal{Y} = a\mathcal{X} + \varepsilon$می باشد. به گونه‌ای که

$$a \in \mathbb{R}, \mathcal{X} : \Omega \longrightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p) \quad , E(\varepsilon) = \mathcal{B} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p) \Longrightarrow \; E(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = a\mathcal{X} + \mathcal{B}$$

بنابراین، موضوع مورد مطالعه عبارت است از برآورد پارامترهای a و $\mathcal{B}$، زمانی که داده‌های ورودی و خروجی فازی هستند.

[۱] Fuzzy Random Variables

فهرست مطالب

پیشگفتار

مسأله رگرسیون با داده‌های فازی پیش از این، از جهات مختلف و برای انواع مختلفی از داده‌های ورودی و خروجی فازی بررسی شده است. ناتر[۲] [۳۴] در سال ۲۰۰۶ و همچنین کاپی[۳] و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۶ بررسی‌های گسترده‌ای از روش‌های پایه‌ای رگرسیون فازی انجام داده‌اند و استنباط‌های کلی را در این‌باره بدست آورده‌اند.

گونزالز-رودریگز[۴] و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۰۷، مدل رگرسیون ساده خطی برای متغیرهای تصادفی فازی را برای مورد خاص مجموعه‌های فشرده محدب در $\mathbb{R}^p$، به طور گسترده‌تر از گیل [۵] و همکاران [۲۰] در سال۲۰۰۱، تشریح نمودند. این پژوهش، تعمیمی بر مطالعات انجام شده بوسیله گیل [۲۰، ۲۱، ۱۸] در سال‌های ۲۰۰۱،۲۰۰۲ و ۲۰۰۷، گونزالز-رودریگز و همکاران [۲۴، ۲۵] در سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ است، که برآورد رگرسیون خطی (امید شرطی) با استفاده از تکنیک حداقل مربعات بدست آمده است.

مدلی که در این پژوهش برای متغیرهای تصادفی فازی بررسی می‌شود، مطابق با مقالات انجام شده توسط دایموند[۶] [۱۱، ۱۲] سال‌های ۱۹۸۸ و۱۹۹۲، دایموند و کرنر[۷] [۱۳] در سال ۱۹۹۷،کرنر و ناتر [۲۶] در سال ۱۹۹۸، ناتر [۳۳] در سال۲۰۰۰، واسچ[۸] و نادر [۳۸] در سال ۲۰۰۲، کراچمر[۹] [۲۹] در سال ۲۰۰۴، با استفاده از همان تابع رگرسیون تحت شرایط خاص می‌باشد، که در همه این مقالات دو مورد تحت بررسی قرار گرفته است:

۱- مسأله حداقل مربعات برازش یا مسئله تقریب، تحت شرایط خاص

۲- به‌دست آوردن برخی از ویژگی‌های نظری برآوردگرها.

[۲] Näther

[۳] Coppi

[۴] González-Rodríguez

[۵] Gil

[۶] Diamond

[۷] Körner

[۸] Wünsche

[۹] Krätschmer

این پایان‌نامه به شرح زیر مرتب شده است در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و تعاریف مورد نیاز در فصول بعدی پایان‌نامه پرداخته شده است. در فصل دوم ضمن بیان فضای متری کامل و جدایی پذیر، یک متر برای محاسبه فاصله بین مجموعه‌های فازی معرفی می‌گردد. در فصل سوم متغیر تصادفی فازی را تعریف کرده و امیدریاضی و واریانس را برای این متغیرها بیان می‌شوند و در فصل چهارم پارامترهای رگرسیون فازی، زمانی که متغیرها فازی باشند، برآورد خواهد شد. سپس در بخش بعدی، آزمون فرضی را برای استقلال خطی بین متغیرهای فازی در مدل خطی مورد نظر، ارائه نموده‌ایم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل به بیان مفاهیم اولیه نظریه فازی مانند تابع عضویت، مفهوم α برش، اصل توسیع، اعداد فازی خواهیم پرداخت. بدین منظور ابتدا مجموعه و خواص مجوعه‌های غیرفازی را بیان نموده، سپس این روابط را به مجموعه‌های فازی گسترش می‌دهیم.

۱.۱ مقدمه

این حقیقت که ریاضیات به عنوان یک علم خاص، کاملا مترادف با دقت در نظر گرفته می شود باعث شده است که بسیاری از محققان و فلاسفه نگران عدم کارایی مناسب آن برای حل مسائل جهان واقعی باشند. این نگرانی از آن جا سرچشمه می‌گیرد که در منطق و نیز در علم، همواره شکافی بین تئوری و تفسیر نتایج بدست آمده از واقعیت‌های عینی نادقیق وجود دارد. دلیل این امر که وجود آن در شاخه‌های مختلف مهندسی به روشنی دیده می‌شود، ابهام ونقص اطلاعات نامیده می‌شود.

از زمان ارائه نظریه مجموعه‌های فازی، گامی موثر در جهت رفع این مشکل برداشته شده است.

نظریه مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط پروفسور زاده[۱] [۳۹]در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید و از آن زمان تاکنون کاربردهای بسیار مفید و اثربخشی داشته است.

این نظریه ابزار ریاضی لازم را برای شبیه سازی مفاهیم گنگ، نامشخص و مبهم فراهم می‌آورد

[۱] Zadeh

و قادر است دانش بشر که از تجربه یا داده‌های آزمایشگاهی بدست آمده را مدلسازی نماید.[۳]

اساس نظریه بر این استوار است که بسیاری از مفاهیم جهان چه در فلسفه، علم یا مهندسی مطلقا بد یا خوب،سیاه یا سفید، صفر یا یک نیستند، بلکه مفاهیمی خاکستری هستند و بسته به نظر هر شخص می‌تواند تعابیر گوناگونی داشته باشند. از جمله موارد می‌توان به واژگانی چون زیاد، کم، گرم، زیبا، جوان و غیره اشاره نمود.[۲]

مجموعه‌های فازی در واقع تعمیمی از مجموعه‌های کلاسیک هستند، که قبل از شروع مباحث نظریه مجموعه‌های فازی، لازم است مفاهیم و تعاریف اصلی را برای مجموعه‌های کلاسیک یادآوری کنیم.

۲.۱ مجموعه‌های کلاسیک

۱.۲.۱ تعریف مجموعه

در نظریه کلاسیک، گردایه‌ای از اشیاء که بواسطه‌ی خصوصیات مشترک گرد هم جمع شده‌اند، را مجموعه می‌نامیم. اشیاء این گردایه اعضاء یا عناصر مجموعه نامیده می‌شوند. مجموعه‌ها با حروف بزرگ لاتین A ، B، ... و اعضای آن را با حروف کوچک لاتین a ، b، ... نشان می دهیم.
به عنوان مثال ”مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵“ و ” یک خط در فضای دو بعدی“ به صورت ذیل نشان داده می‌شوند.

A :مجموعه اعداد طبیعی کوچکتراز ۵ $\quad A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

B : یک خط در فضای دو بعدی $\quad B = \{x \in X | ax + by + c = ۰, (x, y, a, b, c) \in \mathbb{R}\}$

راه‌های مختلفی برای نمایش مجموعه وجود دارد

- نمایش عناصر آن مجموعه $\quad A = \{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$
- تعریف مجموعه توسط خصوصیات آن $\quad \{x \in U |$ را داشته باشد p خاصیت $x\}$
- استفاده از تابع مشخصه $\quad I_A(x) \ : U \longrightarrow \{۰, ۱\}$

تابع مشخصه مجموعه مرجع U را به دو مقدار ۰ و ۱ تصویر می‌کند. عناصری که عضو A هستند مقدار یک و در غیر این‌صورت مقدار صفر را می‌گیرند. استفاده از تابع مشخصه گامی به سوی انتزاعی

شدن مفهوم مجموعه است زیرا به جای در نظر گرفتن عضوهای یک مجموعه، با اعداد صفر و یک سروکار داریم.

مثال ۱.۲.۱ . فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ تعریف شده باشد این مجموعه را به ۳ روش فوق نمایش می‌دهیم.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{x \in U | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$I_A(x)$	۱	۱	۱	۱	۰	۰

۲.۲.۱ عملیات در مجموعه‌های کلاسیک

تعاریف و عملیات مختلف مربوط به مجموعه‌های کلاسیک به طور خلاصه در ادامه آمده است.

$x \in A$: x متعلق به مجموعه A است.

$x \notin A$: x متعلق به مجموعه A نیست.

A زیرمجموعه B است اگر هر عنصری که در A هست در مجموعه B نیز وجود داشته باشد و با نماد $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم.

$A = B$: دو مجموعه A و B مساوی خواهند بود اگر هر عضوی از A عضو B نیز باشد و بالعکس.

$A \subseteq B$: A زیرمجموعه B یا مساوی آن است. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ برقرار باشد آن گاه داریم که $A = B$

$A \cup B$: اجتماع دو مجموعه A و B است و داریم :

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \text{یا}\ x \in B\}$$

$A \cap B$: اشتراک دو مجموعه A و B است و داریم :

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \text{و}\ x \in B\}$$

$\overline{A}$: مکمل مجموعه A و شامل عناصری از مجموعه مرجع است که در A نیست.

$$\overline{A} = \{x | x \in U \ ,\ x \notin A\}$$

$A|B$:تفاضل دو مجموعه و شامل عناصری از مجموعه جهانی است که در Aهست و در B نیست.

$$A|B = A - B = A \cap \overline{B} = \{x|x \in A \ \text{و} \ x \notin B\}$$

اگر بخواهیم عملیات مجموعه های کلاسیک را با تابع مشخصه ($I_A(x)$) بیان کنیم، خواهیم داشت: (علامت $\vee$ به معنی حداکثر و علامت $\wedge$ به معنی حداقل است.)

$$A \cup B: \quad I_{A\cup B}(x) = I_A(x) \ \vee I_B(x) = max\{I_A(x), \ I_B(x)\}$$

$$A \cap B: \quad I_{A\cap B}(x) = I_A(x) \ \wedge I_B(x) = min\{I_A(x), \ I_B(x)\}$$

$$\overline{A} : I_{\overline{A}}(x) = 1 - I_A(x)$$

$$A \subseteq \ B: \quad I_A(x) \leq I_B(x)$$

$$A|B: \quad I_{A|B}(x) = I_A(x) \vee \ (1 - I_B(x))$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \ \overline{B} : I_{\overline{A\cup B}} = (1 - I_A(x)) \wedge \ (1 - I_B(x))$$

۳.۲.۱ خواص عملیات در مجموعه‌های کلاسیک

خواص عملیات در مجموعه‌های کلاسیک و قوانین مربوط به طور خلاصه در زیر شرح داده شده است.
خاصیت مکمل مکمل

$$\overline{\overline{A \cup B}} = A \cup B \tag{۱.۱}$$

خاصیت جابجایی

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \tag{۲.۱}$$

خاصیت شرکت پذیری

$$(A \cup \ B) \cup C = A \ \cup (B \cup \ C) \tag{۳.۱}$$

$$(A \cap \ B) \cap C = A \ \cap (B \cap \ C) \tag{۴.۱}$$

خاصیت توزیع پذیری

$$A \cap \ (B \cup \ C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{۵.۱}$$

$$A \cup \ (B \cap \ C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{۶.۱}$$

خاصیت خودتوانی

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A \tag{۷.۱}$$

خاصیت جذب

$$A \cup (A \cap B) = A \tag{۸.۱}$$

$$A \cap (A \cup B) = A \tag{۹.۱}$$

خاصیت جذب با U و ϕ (که U مجموعه مرجع و ϕ مجموعه تهی است.)

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A \tag{۱۰.۱}$$

$$A \cup \phi = A \qquad A \cap \phi = \phi \tag{۱۱.۱}$$

خاصیت تناقض

$$A \cap \overline{A} = \phi \tag{۱۲.۱}$$

قانون اجتماع یا مکمل

$$A \cup \overline{A} = U \tag{۱۳.۱}$$

قوانین دمورگان

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{۱۴.۱}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{۱۵.۱}$$

با توجه به مطالب بیان‌شده، در مجموعه‌های کلاسیک یک عنصر، یا عضو مجموعه مورد نظر هست یا نیست یعنی از این دو حالت خارج نیست. اگر عنصر مورد نظر، عضو مجموعه باشد ۱۰۰ درصد عضو آن است و اگر نباشد ۱۰۰ درصد عضو آن نیست.

بنابراین، مجموعه‌های کلاسیک برای مفاهیمی مناسب هستند که به طور قطعی و مشخص قابل تعریف هستند. در حالی که مفاهیمی وجود دارند که نمی‌توان به طور مشخص و قطعی برای آن‌ها حد و مرزی مشخص کرد و بر اساس آن مجموعه‌های کلاسیک را تشکیل داد.[۳]

۳.۱ مجموعه‌های فازی

۱.۳.۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

فرض کنید U، یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه باشد. همانطور که در بخش قبل گفته شد، تابع نشانگر هر زیر مجموعه‌ی کلاسیک A از U، یک تابع از U به $\{۰, ۱\}$ است که اینگونه تعریف می‌شود.

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \in A \\ ۰ & \text{اگر } x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه‌ی دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به به بازه ی $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از U عددی را از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت نامیده و آنرا با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم.

تابع عضویت درجه اعتقاد تعلق یک شیء به یک مجموعه خاص از اشیاء را نشان می‌دهد. تابع عضویت به طور پیوسته بین صفر و یک انتخاب شده و به وسیله آن می‌توان خواص مجموعه‌های معمولی را به مجموعه‌های فازی تعمیم داد. از جمله راه‌های بدست آوردن تابع عضویت متناظر با یک مجموعه، استفاده از روش‌های آماری است.

مثال ۱.۳.۱ . فرض کنید شما برای تعدادی از کارکنان نوعی دوره آموزشی برگزار کرده‌اید. اگر در کلاس از کارکنان مرد بخواهید دست‌های خود را بلند کنند، دست‌های کارکنان مرد بالا می‌رود و دست‌های کارکنان زن پایین می‌ماند. در این حالت مجموعه کارکنان مرد، يك مجموعه معمولی است و اعضای این مجموعه ۱۰۰ درصد عضو این مجموعه هستند.

اگر $\mathcal{P}$ مجموعه کارکنان مرد باشد آنگاه:

کارمند a(محمد)، عضو این مجموعه است. بنابراین $\mu_P(a) = ۱$

کارمند b(مریم)، عضو این مجموعه نیست. بنابراین $\mu_P(b) = 0$

حال اگر بپرسید، آنهایی که از شغل خود راضی هستند، دستهای خود را بلند کنند. دست‌ها بالا و پایین می‌رود و پس از چندی به سکون می‌رسد اما اغلب آنها خمیده است. معدودی از افراد با اطمینان دست خود را بالا نگه می‌دارند، یا آن را اصلاً بالا نمی‌آورند. اغلب افراد بین این دو حالت قرار می‌گیرند. این مجموعه (مجموعه کارکنان راضی) دیگر یك مجموعه معمولی نیست، زیرا بیشتر افراد تا حدودی از کار خود راضی هستند نه به میزان ۱۰۰ درصد. بنابراین مجموعه‌های کلاسیک مناسب نبوده و باید از مجموعه‌های فازی استفاده نمود.

اگر $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از افراد که از شغل خود راضی هستند باشد، آنگاه:

کارمند a، ۱۰۰ درصد عضو این مجموعه است. بنابراین $\mu_{\mathcal{A}}(a) = 1$

کارمند b، عضو این مجموعه نیست. بنابراین $\mu_{\mathcal{A}}(b) = 0$

کارمند c، ۷۰ درصد عضو این مجموعه است. بنابراین $\mu_{\mathcal{A}}(c) = 0/7$

۲.۳.۱ تکیه گاه و ارتفاع

تعریف ۲.۳.۱ . فرض کنید U یک مجموعه مرجع و $\mathcal{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد، تکیه‌گاه مجموعه فازی $\mathcal{A}$ عناصری را در بر می‌گیرد که مقدار عضویت آن‌ها در مجموعه، بزرگ‌تر از صفر باشد و با $Supp\mathcal{A}$ نشان داده می‌شود.

$$Supp\ \mathcal{A} = \{x \in U \ | \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0\}$$

بنابراین، تکیه گاه یک مجموعه فازی، مجموعه‌ای معمولی خواهد بود.

حداکثر مقدار درجه عضویت، ارتفاع آن مجموعه فازی نامیده می‌شود. اگر ارتفاع یک مجموعه مقدار ۱ باشد، مجموعه مذکور نرمال خوانده می‌شود در غیر این صورت مجموعه غیر نرمال خواهد بود. بدیهی است که هر مجموعه فازی غیر نرمال را می‌توان با تقسیم $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ ها بر ارتفاع $\mathcal{A}$، نرمال کرد. اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \frac{1}{2}$، x را یک نقطه گذر یا معبر $\mathcal{A}$می‌نامیم.

مثال ۳.۳.۱ . فرض کنید عبارت فازی نوجوان و جوان در مجموعه مرجع به صورت زیر تعریف

شده باشد.

سن	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
نوجوان ($\mathcal{A}$)	۰	۰٫۳	۱	۰٫۲	۰	۰	۰	۰	۰
جوان ($\mathcal{B}$)	۰	۰	۰٫۲	۰٫۸	۱	۰٫۷	۰٫۱	۰	۰

تکیه‌گاه مجموعه فازی نوجوانان ($\mathcal{A}$) و جوانان ($\mathcal{B}$) به صورت زیر خواهد بود.

$$Supp\ \mathcal{A} = \{۱۰, ۱۵, ۲۵\}$$

$$Supp\ \mathcal{B} = \{۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵\}$$

از آنجا که حداکثر مقدار درجه عضویت مقدار ۱ است، مجموعه‌های مذکور نرمال هستند.

یک مجموعه فازی با تابع عضویت آن تعریف می‌شود. تابع عضویت عناصر مجموعه‌ی مرجع را با انتخاب درجه‌ای از بازه $[۰, ۱]$ به مجموعه فازی $\mathcal{A}$ منتصب می‌کند.

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) : U \longrightarrow [0,1] \quad x \in U$$

اگر مقادیر عناصر x در مجموعه فازی $\mathcal{A}$ ناپیوسته باشد این مجموعه فازی را به شکل‌های زیر می‌توان نشان داد.

$$\mathcal{A} = \{(x,\ \mu_{\mathcal{A}}(x))\}$$

$$\mathcal{A} = \sum \frac{\mu_{\mathcal{A}}(x)}{x}$$

اگر عناصر و درجات عضویت آنها به طور پیوسته انتخاب شوند، مجموعه فازی $\mathcal{A}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\mathcal{A} = \int \frac{\mu_{\mathcal{A}}(x)}{x}$$

که $\sum$ و $\int$ اجتماع بوده و خط کسری به معنای تقسیم نیست. بلکه به‌صورت کسر، درجه عضویت عنصر مخرج کسر به‌خود عنصر، را در مجموعه فازی نشان می‌دهد.

مثال ۴.۳.۱ . مجموعه فازی " دمای بالا ($\mathcal{A}$) " می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 110\}$$

$$\mathcal{A} = \{(۸۰, ۰), (۸۵, ۰/۲۵), (۹۰, ۰/۵), (۹۵, ۰/۷۵), (۱۰۰, ۱), (۱۰۵, ۱), (۱۱۰, ۱)\}$$

یا

$$\mathcal{A} = \{\frac{۰}{۸۰}, \frac{۰/۲۵}{۸۵}, \frac{۰/۵}{۹۰}, \frac{۰/۷۵}{۹۵}, \frac{۱}{۱۰۰}, \frac{۱}{۱۰۵}, \frac{۱}{۱۱۰}\}$$

۳.۳.۱ عملگرهای مجموعه ای

در این بخش عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی تعریف می‌شوند. این عملگرها یک تعمیم طبیعی عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های معمولی هستند، که در بخش اول مرور شدند. در تمامی موارد زیرU، یک مجموعه مرجع و $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$،$\mathcal{C}$ و...زیر مجموعه‌های فازی آن به ترتیب با توابع عضویت $\mu_{\mathcal{A}}(x)$، $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ و $\mu_{\mathcal{C}}(x)$هستند.[۲]

تعریف ۵.۳.۱ . مجموعه فازی $\mathcal{A}$ را تهی می‌گوئیم اگر برای هر $x \in U$, $\mu_{\mathcal{A}}(x) = ۰$.

تعریف ۶.۳.۱ . مجموعه فازی $\mathcal{A}$ را تام می‌گوئیم اگر برای هر $x \in U$, $\mu_{\mathcal{A}}(x) = ۱$

تعریف ۷.۳.۱ . گوئیم مجموعه فازی $\mathcal{A}$، زیر مجموعه فازی $\mathcal{B}$ است و می‌نویسیم $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ اگر برای هر $x \in U$، $\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x)$

تعریف ۸.۳.۱ . دو مجموعه فازی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را مساوی گوئیم و می‌نویسیم $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ اگر برای هر $x \in U$, $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{B}}(x)$.

تعریف ۹.۳.۱ . مجموعه فازی $\overline{\mathcal{A}}$ متمم مجموعه فازی $\mathcal{A}$، توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\overline{\mathcal{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x)$$

تعریف ۱۰.۳.۱ . اگر $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$، متمم نسبی $\mathcal{A}$ نسبت به $\mathcal{B}$ که با $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\mathcal{B}-\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{B}}(x) - \mu_{\mathcal{A}}(x) \quad \forall x \in U$$

تعریف ۱۱.۳.۱ . $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$، اجتماع دو مجموعه فازی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود.

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = max[\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)] \;\; \forall x \in U$$

و یا به بیان ساده تر $\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \vee \mu_{\mathcal{B}}(x)$

تعریف ۱۲.۳.۱ . $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$، اشتراک دو مجموعه فازی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود.

$$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = min[\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)] \;\; \forall x \in U$$

و یا به بیان ساده‌تر $\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \wedge \mu_{\mathcal{B}}(x)$

تعریف ۱۳.۳.۱ . مانند حالت معمولی، $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را از هم جدا گوییم اگر $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \phi$، یعنی اشتراک تکیه‌گاه‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ تهی باشد.

تعریف ۱۴.۳.۱ . چنانچه K یک مجموعه اندیس گذار باشد و برای هر $k \in K$، $\mathcal{A}_k$ زیر مجموعه‌ای از U باشد، آنگاه $\cap_{k\in K}\mathcal{A}_k$ و $\cup_{k\in K}\mathcal{A}_k$ به صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mu_{\cup_{k\in K}\mathcal{A}_k} = \sup\{\mu_{\mathcal{A}_{k(x)}}, k \in K\}$$

$$\mu_{\cap_{k\in K}\mathcal{A}_k} = \inf\{\mu_{\mathcal{A}_{k(x)}}, k \in K\}$$

۴.۳.۱ خواص عملیات در مجموعه‌های فازی

تمامی خواص گفته شده برای مجموعه‌های کلاسیک به غیر از قانون تناقض (۱۲.۱) و قانون اجتماع یا مکمل (۱۳.۱) در مجموعه‌های فازی صادق هستند. علاوه بر عملگرهای اساسی تعریف شده در