دانشکده علوم ریاضی

ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

فضاهای فینسلری متقارن ضعیف و متقارن تعمیم‌یافته

استاد راهنما

دکتر اسدالّله رضوی

استاد مشاور

دکتر داریوش لطیفی

پژوهشگر

پرستو حبیبی

زمستان ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: حبیبی نام: پرستو

عنوان: فضاهای فینسلری متقارن ضعیف و متقارن تعمیم‌یافته

استاد راهنما: دکتر اسداللّه رضوی

استاد مشاور: دکتر داریوش لطیفی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی گرایش: هندسه دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۹۸

کلید واژه‌ها: فضای فینسلری متقارن ضعیف، فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته، فضای بروالدی، فضای همگن، $s-$ ساختار موازی، $s-$ ساختار منظم، انحنای پرچمی.

چکیده

در این رساله فضاهای فینسلری متقارن ضعیف و متقارن تعمیم‌یافته را معرفی و مورد بررسی قرار می‌دهیم. برخی از قضایای وجودی و برخی از خواص هندسی این فضاها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم چنین فضاهائی می‌توانند بصورت یک فضای خارج‌قسمتی از یک گروه لی با یک متریک فینسلری پایا بیان شوند. ثابت شده است که هر فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته، از مرتبه متناهی بوده و هر چنین فضائی با مرتبه زوج از نوع بروالدی است. نشان می‌دهیم فضای فینسلری (M,F) متقارن ضعیف است اگر و فقط اگر برای هر ژئودزیک ماکسیمال γ در M و هر نقطه x از γ یک ایزومتری از M وجود داشته باشد که روی γ یک تابع مرتبه دوم نابدیهی بوده و x نقطه ثابت آن باشد. همچنین ثابت می‌کنیم برای یک فضای فینسلری متقارن ضعیف (M,F)، یک متریک ریمانی $I(M,F)-$ پایای g روی M وجود دارد که M را به یک فضای متقارن ضعیف ریمانی تبدیل می‌کند. ثابت شده است که هر فضای فینسلری متقارن ضعیف از نوع بروالدی است. همچنین فضاهای بروالدی متقارن تعمیم‌یافته مطالعه شده و نشان داده شده است که اگر یک فضای بروالدی (M,F) یک $s-$ ساختار موازی بپذیرد، آنگاه موضعاً متقارن است. برای یک فضای بروالدی کامل که یک $s-$ ساختار موازی می‌پذیرد، نشان می‌دهیم اگر انحنای پرچمی (M,F) همه‌جا ناصفر باشد، آنگاه F ریمانی است. در نهایت، ثابت شده است که هر $s-$ ساختار موازی روی فضای بروالدی منظم بوده و هر فضای بروالدی متقارن تعمیم‌یافته با بعد ۲، متقارن است.

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری باشد، در اینصورت دیفئومورفیسم σ از M یک ایزومتری از (M,F) نامیده می‌شود اگر

$$F\left(\sigma(p),(d\sigma)_pX\right)=F(p,X),\qquad \forall p\in M,\quad X\in T_pM$$

اگر $\gamma:[0,r]\longrightarrow M$ یک خم قطعه‌ای هموار باشد، در اینصورت طول آن بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L(\gamma)=\int_0^r F(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

مجموعه تمام خمهای قطعه‌ای هموار $\gamma:[0,r]\longrightarrow M$ واصل بین x_0 و x_1 را با $\Gamma(x_0,x_1)$ نشان می‌دهیم. در اینصورت نگاشت $d_F:M\times M\longrightarrow[0,\infty)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$d_F(x_0,x_1)=\inf_{\gamma\in\Gamma(x_0,x_1)}L(\gamma)$$

d_F تمام خواص متریک را دارد بجز اینکه در حالت کلی متقارن نیست، یعنی لزوماً $d_F(x_0,x_1)$ با $d_F(x_1,x_0)$ برابر نمی‌باشد.

اکنون می‌توانیم تعریف زیر را نیز برای یک ایزومتری ارائه دهیم.

تعریف ۱.۰.۰ یک ایزومتری از (M,F) عبارت است از یک نگاشت از M بروی خودش که تابع فاصله d_F را حفظ کند.

همانند حالت ریمانی، برای فضاهای فینسلری نیز ثابت شده است که این دو تعریف برای ایزومتریها هم‌ارزند [۶].
بعلاوه ثابت شده است که

قضیه ۲.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری باشد، در اینصورت $I(M,F)$ گروه تمام ایزومتریهای (M,F)، یک گروه تبدیلات لی روی M است و اگر $x \in M$، آنگاه زیرگروه ایزوتروپی $I_x(M,F)$ فشرده خواهد بود.

بعد از اثبات این قضایا، بررسی متریکهای فینسلری پایا روی فضاهای خارج‌قسمتی آغاز شده است، یعنی مسیری برای بررسی هندسه فضاهای فینسلری همگن ایجاد شده است. برای دیدن برخی خواص فضاهای فینسلری همگن به [۱۱] و [۲۳] مراجعه کنید.

یکی از مباحث نزدیک به فضاهای همگن، فضاهای متقارن می‌باشد. تعریف فضاهای فینسلری متقارن، مشابه حالت ریمانی در [۲۳] و [۱۲] بصورت زیر ارائه شده است.

تعریف ۳.۰.۰ منیفلد فینسلری همبند (M,F) متقارن نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $p \in M$ یک ایزومتری $\sigma_p : M \longrightarrow M$ موجود باشد بطوریکه

i) σ_p برگشتی باشد، یعنی $\sigma_p^2 = Id$.

ii) p یک نقطه ثابت تنهای σ_p باشد، یعنی یک همسایگی U از p موجود باشد که p تنها نقطه ثابت σ_p در U باشد.

ثابت شده است [۲۳]، که هر فضای فینسلری متقارن، کامل پیشرو بوده و هر فضای فینسلری

متقارن همبند همگن می‌باشد. همینطور ثابت شده است [۱۲] که فضاهای فینسلری متقارن از نوع بروالدی می‌باشد. برای بررسی و مطالعه بیشتر فضاهای متقارن فینسلری به [۱۲] مراجعه شود.

در فصل دوم این رساله برخی خواص متریکهای فینسلری پایا روی فضاهای خارج‌قسمتی و گروههای لی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، همچنین بررسی هندسه متریکهای فینسلری دو پایا روی گروههای لی از موضوعات مورد بررسی این فصل می‌باشد. در فصل سوم به بررسی فضاهای متقارن فینسلری می‌پردازیم.

به لحاظ سنتی بعد از بررسی فضاهای متقارن آفین و ریمانی، فضاهای متقارن تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار می‌گیرند. در فصل چهارم فضاهای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری همبند و $I(M,F)$ نشاندهنده گروه تمام ایزومتریهای آن باشد. یک ایزومتری از (M,F) با نقطه ثابت تنهای x یک تقارن در x نامیده و با s_x نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۰.۰ خانواده $\{s_x|\ x\in M\}$ از تقارنها روی منیفلد فینسلری (M,F)، یک $s-$ ساختار روی (M,F) نامیده می‌شود.

یک $s-$ ساختار $\{s_x|\ x\in M\}$ از مرتبه k $(k\geq ۲)$ نامیده می‌شود، اگر $(s_x)^k=id$ برای هر $x\in M$ و برای کوچکترین عدد k با این خاصیت.

توجه می‌کنیم که یک فضای فینسلری متقارن است، اگر و تنها اگر روی آن یک $s-$ ساختار از مرتبه دو موجود باشد.

یک $s-$ ساختار $\{s_x\}$ روی (M,F) منظم نامیده می‌شود، اگر برای هر دو نقطه $x,y\in M$ داشته باشیم

$$s_x\circ s_y=s_z\circ s_x\ ,\qquad z=s_x(y)$$

تعریف ۵.۰.۰ یک فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته عبارتست از یک منیفلد فینسلری همبند (M,F) که روی آن یک $s-$ ساختار منظم موجود باشد. (M,F) را $k-$ متقارن ($k \geq ۲$) گوئیم، هرگاه روی آن یک $s-$ ساختار منظم از مرتبه k موجود باشد.

فرض کنید G یک گروه لی همبند، H یک زیر گروه بسته G و σ یک اتومورفیسم از G باشد که

i) $G_\sigma^\circ \subset H \subset G_\sigma$، که در آن G_σ زیرگروه G شامل تمام نقاط ثابت σ و G_σ° نشاندهنده مؤلفه همانی G_σ است.

ii) $\sigma^k = id$ (k را کوچکترین عدد با این خاصیت در نظر می‌گیریم)

در اینصورت سه‌تائی (G,H,σ) را یک $s-$ منیفلد همگن منظم از مرتبه k گوئیم [۲۰].

قضیه ۶.۰.۰ فرض کنید (G,H,σ) یک $s-$ منیفلد همگن منظم از مرتبه k و F یک متریک فینسلری $G-$ پایا روی $\frac{G}{H}$ باشد بطوریکه نگاشت s روی $\frac{G}{H}$، تعریف شده توسط رابطه $\pi \circ \sigma = s \circ \pi$، حافظ متریک F در مبدأ eH از $\frac{G}{H}$ باشد، در اینصورت $\frac{G}{H}$ یک فضای فینسلری $k-$ متقارن خواهد بود.

برای یک فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته می‌توان قضیه زیر را بیان کرد

قضیه ۷.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته باشد، در اینصورت داریم

الف) برای هر $x \in M$، $S_x = (ds_x)_x$ بردار پایا ندارد.

ب) (M,F) همگن است، یعنی گروه ایزومتریهای (M,F)، $I(M,F)$ بطور متعدی روی M عمل می‌کند.

ج) (M,F) کامل پیشرو است.

نشان می‌دهیم که اگر روی (M,F) یک $s-$ ساختار منظم وجود داشته باشد، آنگاه روی آن یک $s-$ ساختار منظم با مرتبه k موجود است.

قضیه ۸.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته باشد، در اینصورت (M,F) یک فضای فینسلری $k-$ متقارن خواهد بود.

قضیه ۹.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری $k-$ متقارن باشد، در اینصورت یک متریک ریمانی g وجود دارد بقسمیکه (M,g) یک فضای $k-$ متقارن ریمانی است.

قضیه ۱۰.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری $k-$ متقارن باشد که در آن k زوج است، در اینصورت F باید متریک بروالدی برگشتپذیر باشد و التصاق F با التصاق لوی‌چویتای یک متریک ریمانی g یکی است، بطوریکه (M,g) یک فضای متقارن ریمانی می‌باشد.

فضاهای متقارن ریمانی از جنبه‌های دیگری نیز توسعه یافته‌اند. یک فضای متقارن ضعیف عبارتست از یک منیفلد ریمانی همبند، بطوریکه هر دو نقطه از آن توسط یک ایزومتری جابجا شوند، این نوع از فضاهای همگن توسط سلبرگ معرفی شده‌اند [۲۹]. مطالعه هندسه فضاهای متقارن ضعیف از [۴]، [۵] و [۳] آغاز شده است. در [۴] نشان داده شده که ژئودزیکهای این فضاها مدارهای گروههای ۱ − پارامتری از ایزومتریها می‌باشند. ابتدا درباره وجود چنین فضاهای فینسلری متقارن بحث خواهیم کرد، سپس برخی خواص هندسی این فضاها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که این فضاها را می‌توان بصورت یک فضای خارج‌قسمتی با یک متریک فینسلری پایا بیان کرد. در نهایت نشان می‌دهیم که این فضاها از نوع بروالدی‌اند.

فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیر گروه فشرده از آن باشد.

تعریف ۱۱.۰.۰ (G,H) را زوج متقارن ضعیف گوئیم، هرگاه یک اتومورفیسم θ از G موجود باشد که

الف) $\theta(H) \subset H$ و $\theta^{2} \in Inn_H(G)$

ب) $H\theta(g)H = Hg^{-1}H$ برای هر $g \in G$

قضیه ۱۲.۰.۰ فرض کنید (G,H) زوج متقارن ضعیف باشد. در اینصورت هر متریک فینسلری $G-$ پایای برگشت‌پذیر F روی $M = \frac{G}{H}$، (M,F) را به یک فضای فینسلری متقارن ضعیف تبدیل می‌کند.

در زیر برخی خواص هندسی فضاهای متقارن ضعیف را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری متقارن ضعیف باشد، در اینصورت

الف) (M,F) همگن است و (M,F) کامل پیشرو و پسرو می‌باشد.

ب) برای هر $x \in M$ و $\xi \in T_xM$، یک ایزومتری $s \in I(M,F)$ موجود است بطوریکه $s(x) = x$ و $ds_x(\xi) = -\xi$، بویژه اینکه F بایستی برگشتی باشد.

ج) فرض کنید $\tilde{M}$ فضای پوششی جامع M و π تابع تصویر باشد. در اینصورت $(\tilde{M},\pi^*(F))$ یک فضای فینسلری متقارن ضعیف است، که در آن

$$\pi^*(F)(y) = F\left((d\pi)_{\tilde{x}}(y)\right), \qquad y \in T_{\tilde{x}}\tilde{M}$$

قضیه ۱۴.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری متقارن ضعیف باشد. در اینصورت یک متریک ریمانی g، $I(M,F)-$ پایا روی M وجود دارد که M را به یک فضای متقارن ضعیف ریمانی تبدیل می‌کند.

قضیه ۱۵.۰.۰ فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری متقارن ضعیف باشد. در اینصورت

الف) ژئودزیکهای (M,F) همگن است.

ب) (M,F) یک فضای بروالدی است.

بخشی از نتایج بدست آمده در این رساله در مقالات زیر ارائه شده‌اند:

1. P. Habibi, A. Razavi, *On weakly symmetric Finsler spaces*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 570-573.

2. P. Habibi, A. Razavi, *On Generalized Symmetric Berwald Spaces*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, no. 14 (2010), 667-673.

3. P. Habibi, A. Razavi, *On Generalized Symmetric Finsler Spaces*, Geom. Dedicata, DOI 10.1007/s10711-010-9471-1.

فصل ۱

هندسه فینسلری

در این فصل خواص هندسه فینسلری بیان می‌شود. ابتدا قضیه اویلر درباره توابع همگن را بیان کرده و با استفاده از آن تابع فینسلری F تعریف می‌شود. در ادامه کلاف مماسی تصویری[۱] را در نظر می‌گیریم و بعضی از خواص آن را بررسی می‌کنیم. سپس التصاق چرن [۲] و تانسور کارتان [۳] را معرفی کرده، نشان می‌دهیم که این التصاق روی کلاف مماسی تصویری، بدون تاب و تقریباً متریک سازگار است. با استفاده از التصاق چرن، انحناهای P و R را در مختصات طبیعی خواهیم داد. همچنین ژئودزیکها، انحنای پرچمی و ریچی تعریف می‌شوند.

[۱] projectivised tangent bundle

[۲] Chern

[۳] Cartan tensor

۱.۱ ساختار فینسلر و قضیه اویلر

فرض کنید M یک منیفلد $m-$ بعدی هموار و $u^i,\ i=1,\ldots m$ یک مختصات موضعی روی مجموعه باز $U\subset M$ باشد. TM و T^*M به ترتیب کلاف مماس و کتانژانت با پایه‌های طبیعی $\frac{\partial}{\partial u^i}$ و du^i روی M هستند.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید $F:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع با مقدار حقیقی باشد. F همگن مثبت از درجه k نامیده می‌شود، اگر $F(\lambda X)=\lambda^k F(X),\ \lambda>0$.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید $F:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع با مقدار حقیقی باشد. اگر F همگن مثبت از درجه یک باشد، آنگاه

$$X^i\frac{\partial F(X)}{\partial X^i}=F(X),\qquad X=(X^1,\cdots,X^m)$$

اثبات. به [۲] مراجعه شود. $\square$

از این پس نمادهای F_{X^i} و F_{u^i} را نیز برای نشان دادن مشتق F نسبت به X^i و u^i بکار می‌بریم.

نتیجه ۳.۱.۱ اگر F یک تابع همگن مثبت از درجه ۱ از $X=(X^1,\cdots,X^m)$ باشد، آنگاه داریم

۱) $X^iF_{X^i}=F$

۲) $X^jF_{X^iX^j}=0$

۳) $X^kF_{X^iX^jX^k}=-F_{X^iX^j}$

۴) $X^l F_{X^iX^jX^kX^l} = -2F_{X^iX^jX^k}$

۵) $X^i F_{X^iu^i} = F_{u^i}$

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید F یک تابع روی کلاف مماسی TM، $F: TM \longrightarrow [0,\infty)$ با خواص زیر باشد:

۱) F روی $TM-\{0\}$، C^∞ است.

۲) F همگن مثبت است، یعنی

$$F(u,\lambda X) = \lambda F(u,X), \qquad \forall\lambda > 0$$

۳) F دارای خاصیت تحدب قوی است، یعنی ماتریس $m \times m$

$$(g_{ij}) = \left(\frac{1}{2}F^2\right)_{X^iX^j}$$

روی $TM-\{0\}$ در هر نقطه معین مثبت است.

در این صورت F را تابع فینسلر یا ساختار فینسلری روی M گویند.

شرایط فوق ایجاب می‌کند

۴) $F(u,X) > 0$ برای $X \neq 0$

۵) $F(u,X) + F(u,Y) \geq F(u,X+Y)$

اگر M یک منیفلد هموار و F یک تابع فینسلری روی آن باشد، در اینصورت (M,F) را یک منیفلد فینسلری گویند.

هندسه ریمانی توسط فرم درجه دوم زیر ساخته می‌شود:

$$ds^۲ = F^۲ = g_{ij}(u)du^i du^j \tag{۱.۱}$$

هندسه فینسلری روی $ds = F(u,du)$ ساخته می‌شود، که در آن F لزوماً در شرط درجه دوم بودن (۱.۱) صدق نمی‌کند ولی F یک تابع فینسلری است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید c یک خم دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد، بطوریکه $c : t \longrightarrow u^i = u^i(t) = c(t) \in M, \quad t \in [a,b] \subset I\!R$. طول خم c بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L(c) = \int_a^b F(u, \frac{du}{dt})dt$$

که در آن $\frac{du}{dt} = (\frac{du^۱}{dt}, \cdots, \frac{du^m}{dt})$ $u = (u^۱, \cdots, u^m),$.

۲.۱ کلاف مماس تصویری و متریک فینسلری

کلاف مماس تصویری از کلاف مماسی چنین بدست می‌آید که بردارهای ناصفری را که مضرب حقیقی از یکدیگرند، یکی می‌گیریم و آن را با PTM نشان می‌دهیم. فرض کنید $p : PTM \longrightarrow M$ تابع تصویر باشد، یعنی

$$p(u^i, X^i) = (u^i)$$

در اینصورت p^*TM عبارتست از کلاف مماسی پول‌بک (برگشتی) با دوگان p^*T^*M. T_uM و T_u^*M تارهای p^*TM و p^*T^*M می‌باشند و منیفلد $(۲m-۱)$- بعدی PTM منیفلد پایه آن می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱ ۱– فرمی $\omega = F_{X^i}du^i$ فرم هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید F یک تابع فینسلری باشد، در اینصورت تانسور $(۰,۲)$ متقارن و معین مثبت g، با تعریف $g = g_{ij}du^i \otimes du^j = \frac{\partial^۲(\frac{۱}{۲}F^۲)}{\partial X^i \partial X^j}du^i \otimes du^j$ تانسور اساسی متریک F نامیده می‌شود.

در عبارت بالا، g_{ij} بصورت زیر نیز قابل بیان است

$$g_{ij} = FF_{X^iX^j} + F_{X^i}F_{X^j}$$

با استفاده از قضیه اویلر داریم

$$g_{ij}X^iX^j = FF_{X^iX^j}X^iX^j + X^iF_{X^i}X^jF_{X^j} = F^۲$$

توابع g_{ij} همگن از درجه صفرند.

فرض کنید $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویری و π^*TM کلاف تصویر باشد، در اینصورت یک برش طبیعی از این کلاف عبارتست از

$$l = l_{(x,y)} = \frac{y^i}{F(y)}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{y^i}{F}\frac{\partial}{\partial x^i} = l^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

دوگان l عبارتست از فرم هیلبرت ω که یک برش π^*T^*M می‌باشد

$$\omega = \omega_{(x,y)} = F_{y^i}(x,y)dx^i = F_{y^i}dx^i$$

تانسور اساسی و تانسور کارتان عبارتند از

$$g_{ij} = \left(\frac{۱}{۲}F^۲\right)_{y^iy^j} = FF_{y^iy^j} + F_{y^i}F_{y^j}$$

$$A_{ijk} = \frac{F}{۲}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{F}{۴}\left(F^۲\right)_{y^i y^j y^k}$$

و

$$C_{ijk} = \frac{۱}{F}A_{ijk}$$

مؤلفه‌های g_{ij} از تانسور اساسی، توابعی روی $TM - \{۰\}$ بوده و همگن مثبت از درجه صفرند. با استفاده از آنها می‌توان نمادهای کریستوفل را بصورت زیر تعریف کرد

$$\gamma^i_{jk} = g^{is}\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j}\right)$$

و همچنین کمیتهای

$$N^i_j = \gamma^i_{jk}y^k - C^i_{jk}\gamma^k_{rs}y^r y^s$$

به آسانی دیده می‌شود

$$\frac{N^i_j}{F} = \gamma^i_{jk}l^k - A^i_{jk}\gamma^k_{rs}l^r l^s$$

پایه‌های مناسب زیر را برای کلاف مماسی و کلاف کتانژانت T^*M معرفی می‌کنیم:

$$\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j\frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\frac{\delta y^i}{F} = \frac{۱}{F}\left(dy^i + N^i_j dx^j\right)$$

یعنی $\{\frac{\delta}{\delta x^i},\ F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ یک پایه برای کلاف مماس $TM - \{۰\}$ و $\{dx^i,\ \frac{\delta y^i}{F}\}$ یک پایه برای کلاف کتانژانت $T^*M - \{۰\}$ است.

۳.۱ التصاق چرن

فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد، در اینصورت کلاف π^*TM دارای یک التصاق خطی یکتا به نام التصاق چرن با خواص زیر است:

۱) بدون تاب بودن

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega_j^i = -dx^i \wedge \omega_j^i = 0$$

۲) تقریباً $g-$ سازگار بودن

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 2A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}$$

بدون تاب بودن هم‌ارز است با اینکه ω_j^i ها جمله‌های شامل dy^k نداشته باشند، یعنی

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$$

و

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

تقریباً متریک سازگار بودن نتیجه می‌دهد

$$\Gamma_{jk}^l = \gamma_{jk}^l - g^{li}\left(A_{ijs}\frac{N_k^s}{F} - A_{jks}\frac{N_i^s}{F} + A_{kis}\frac{N_j^s}{F}\right)$$

بطور ساده‌تر التصاق چرن بصورت زیر داده می‌شود

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{is}}{2}\left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j}\right)$$

۴.۱ انحناهای فضاهای فینسلری

در این بخش تانسور انحنای Ω التصاق چرن را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید θ^i و θ_i^j به ترتیب ۱− فرمی‌های پایه و ۱− فرمی التصاق باشند، در این صورت

$$\Omega_j^i = d\theta_j^i - \theta_j^k \wedge \theta_k^i$$

۲− فرمی انحنای التصاق چرن در مختصات طبیعی گفته می‌شود. از آنجائیکه Ω_j^i یک ۲− فرمی روی $TM - \{0\}$ می‌باشد، می‌توان نوشت

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i du^k \wedge du^l + P_{jkl}^i du^k \wedge \frac{\delta X^l}{F} + \frac{1}{2} Q_{jkl}^i \frac{\delta X^k}{F} \wedge \frac{\delta X^l}{F}$$

عبارتهای R، P و Q را بترتیب $hh-$، $hv-$ و $vv-$ انحنا گوئیم. R و Q در روابط زیر صدق می‌کنند

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i \ \ , \ Q_{jkl}^i = -Q_{jlk}^i$$

با استفاده از خاصیت بدون تاب بودن التصاق چرن داریم

$$du^j \wedge \theta_j^i = 0$$

پس

$$du^j \wedge \theta_j^k \wedge \theta_k^i = 0$$

همچنین داریم $du^j \wedge d\theta_j^i = 0$. از این روابط نتیجه می‌شود

$$du^j \wedge \left(d\theta_j^i - \theta_j^k \wedge \theta_k^i \right) = 0$$

یا بطور معادل

$$du^j \wedge \Omega_j^i = 0$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۲}R^i_{jkl}du^j\wedge du^k\wedge du^l+P^i_{jkl}du^j\wedge du^k\wedge\frac{\delta X^l}{F}+\frac{۱}{۲}Q^i_{jkl}du^j\wedge\frac{\delta X^k}{F}\wedge\frac{\delta X^l}{F}=۰$$

هر سه جمله عبارت فوق از نوع متفاوتی هستند، پس برابر صفر خواهند بود.

از صفر بودن جمله سوم نتیجه می‌شود که Q باید متقارن باشد، با توجه به رابطه $Q^i_{jkl}=-Q^i_{jlk}$، خواهیم داشت $Q^i_{jkl}=۰$.

پس ۲− فرمی انحنا بصورت زیر خواهد بود

$$\Omega^i_j=\frac{۱}{۲}R^i_{jkl}du^k\wedge du^l+P^i_{jkl}du^k\wedge\frac{\delta X^l}{F}$$

از صفر شدن جمله دوم خواهیم داشت

$$P^i_{jkl}=-P^i_{kjl}$$

و از صفر شدن جمله اول، اتحاد بیانکی بدست می آید

$$R^i_{jkl}du^j\wedge du^k\wedge du^l=۰$$

یا بطور معادل

$$R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=۰$$

حال فرمول را برای R و P در مختصات طبیعی ارائه می‌دهیم.

$$d\theta^i_j-\theta^h_j\wedge\theta^i_h=\Omega^i_j=\frac{۱}{۲}R^i_{jkl}du^k\wedge du^l+P^i_{jkl}du^k\wedge\frac{\delta X^l}{F}$$

با استفاده از رابطه $\theta^i_j=\Gamma^i_{jl}du^l$ داریم

$$d\theta^i_j=d\Gamma^i_{jl}\wedge du^l$$