دانشگاه علامه طباطبایی
دانشکده اقتصاد

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

**آمار اجتماعی و اقتصادی**

عنوان

# بررسی مدل صف تک سرویس‌دهنده با خط‌مشی آستانه‌ای فازی و بازگشت به صف با تعطیلات سرویس‌دهنده

پژوهش‌گر

هانیه‌سادات میروهابی

استاد راهنما

جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی‌راد

استاد مشاور

جناب آقای دکتر محسن اکبرپورشیرازی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

**کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه**

**برای دانشگاه علامه طباطبائی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع مانعی ندارد.**

**تایید پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشدتوسط دانشجو**

**عنوان پایان‌نامه:** بررسی مدل صف تک سرویس‌دهنده با خط‌مشی آستانه‌ای فازی و بازگشت به صف با تعطیلات سرویس‌دهنده

**نام دانشجو:** هانیه‌سادات میروهابی
**شماره‌ی دانشجویی:** ۹۰۱۲۵۳۱۱۱۲
**استاد راهنما:** جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی‌راد

این‌جانب **هانیه‌سادات میروهابی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **آمار اجتماعی و اقتصادی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارائه شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص این‌جانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید می‌باشد. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط این‌جانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارائه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به‌طور کامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده گردد خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

**امضا دانشجو:**
شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه علامه طباطبایی
دانشکده اقتصاد

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

# بررسی مدل صف تک سرویس‌دهنده با خط‌مشی آستانه‌ای فازی و بازگشت به صف با تعطیلات سرویس‌دهنده

پژوهش‌گر: هانیه‌سادات میروهابی

استاد راهنما: جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی‌راد امضاء:

استاد مشاور: جناب آقای دکتر محسن اکبرپورشیرازی امضاء:

استاد داور: جناب آقای دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: جناب آقای دکتر جلودارممقانی امضاء:

# تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر.
مویشان سپیدی گرفت تا رویم سپید بماند.
آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانه زندگیم هستند.
در برابر وجود گرامیشان سر تعظیم فرود می‌آورم و با دلی مملو از عشق و محبت بر دستانشان بوسه می‌زنم.

بلندای وجودشان همیشه استوار

# سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی‌راد، استاد محترم دانشگاه علامه‌طباطبایی که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های ارزنده و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

از استاد مشاورم جناب آقای دکتر محسن اکبرپورشیرازی استاد محترم دانشگاه صنعتی‌امیرکبیر که قبول زحمت کرده و در فرایند تکمیل پایان‌نامه کمال همکاری را داشتند تشکر می‌نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر جلودارممقانی و جناب آقای دکتر بادامچی‌زاده که زحمت داوری این اثر را به عهده داشتند سپاس‌گزارم.

از همکاران محترم بخش تحقیقات اقتصادی-اجتماعی مرکز تحقیقات کشاورزی استان مرکزی نیز که در طول مدت تحصیل با راهنمایی‌های خود مرا یاری کردند قدردانی می‌نمایم.

و در نهایت از خانواده‌ام، که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

شهریور ۱۳۹۲

# فهرست مطالب

**فهرست مطالب** آ

**فهرست جدول‌ها** پ

**فهرست شکل‌ها** ت

**۱ تعریف‌ها، مفهوم‌ها و کلیات** ۱

۱.۱ مقدمه . . . . . ۱

۲.۱ مسأله مورد بررسی . . . . . ۲

۳.۱ پیشینه تحقیق . . . . . ۳

۴.۱ توصیف مدل صف‌بندی در حالت کلی . . . . . ۴

۱.۴.۱ چرخه اشتغال سامانه . . . . . ۶

۲.۴.۱ چند تعریف و نتیجه در مدل‌های صف‌بندی . . . . . ۷

۵.۱ چند تعریف و نتیجه در مباحث فازی . . . . . ۱۱

۱.۵.۱ تفاوت نظریه احتمال و منطق فازی . . . . . ۱۷

۶.۱ خلاصه فصل و چشم‌انداز فصل‌های آتی . . . . . ۱۷

**۲ بررسی مدل صف M/G/۱ با تلاش‌مجدد** ۱۸

۱.۲ مقدمه . . . . . ۱۸

۲.۲ توصیف مدل . . . . . ۱۹

۳.۲ تابع‌های مولد احتمال در حالت پایا . . . . . ۲۱

۴.۲ اندازه‌های مؤثر بودن سامانه . . . . . ۲۷
۵.۲ خلاصه فصل . . . . . ۴۷

**۳ بررسی مدل صف M/M/۱ با تلاش‌مجدد از دیدگاه فازی ۴۸**
۱.۳ مقدمه . . . . . ۴۸
۲.۳ توصیف مدل . . . . . ۴۹
۳.۳ خط‌مشی آستانه‌ای . . . . . ۵۰
۴.۳ خط‌مشی آستانه‌ای فازی . . . . . ۵۰
۱.۴.۳ پارامترهای ورودی . . . . . ۵۱
۲.۴.۳ تعیین معیار و متغیرهای زبانی . . . . . ۵۲
۳.۴.۳ تابع‌های عضویت . . . . . ۵۳
۵.۳ اجرای مدل $FBTP$ . . . . . ۵۶
۶.۳ خلاصه فصل . . . . . ۵۶

**۴ مثال عددی ۵۸**
۱.۴ مقدمه . . . . . ۵۸
۲.۴ مثال عددی . . . . . ۵۸
۳.۴ نتیجه‌گیری . . . . . ۶۰

**آ پیوست ۶۳**

**مرجع‌ها ۶۵**

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۸**

# فهرست جدول‌ها

۱.۴ نتایج شبیه‌سازی شده . . . . . ۶۱
۲.۴ داده‌های مربوط به خروجی روش استنتاج فازی . . . . . ۶۲

# فهرست شکل‌ها


۱.۱ مقایسه مجموعه کلاسیک (شکل الف) و مجموعه فازی (شکل ب) . . . . . ۱۳

۲.۱ تابع عضویت مثلثی با پارامترهای (۸۰، ۶۰، ۲۰) . . . . . ۱۵

۱.۳ حالت‌های (S،M،B) برای متغیر w . . . . . ۵۳

۲.۳ حالت‌های (S،M،B) برای متغیرw.b.p . . . . . ۵۵

۳.۳ حالت‌های (S،M،B) برای متغیر delta . . . . . ۵۵

۴.۳ نمودار تابع عضویت متغیر خروجی . . . . . ۵۶

۱.۴ هزینه کل برای ۱۰۰۰۰ متقاضی با درنظر گرفتن آستانه معین . . . . . ۶۱

۲.۴ نمایش‌گر سطح‌ها با ثابت گرفتن سایر ورودی‌ها . . . . . ۶۲

آ.۱ جدول قاعده-بنیاد فازی . . . . . ۶۴

# چکیده

انتظار در صف‌ها یکی از واقعیت‌های اجتناب‌ناپذیر زندگی امروزه را تشکیل می‌دهد. ما به عنوان متقاضی عموماً این‌گونه انتظار کشیدن را دوست نداریم. معمولاً در سامانه‌های صف‌بندی مسئله‌ای که مطرح می‌شود، عدم دسترسی متقاضیان به سامانه یا از دست دادن متقاضیان، به دلیل شلوغ بودن سامانه و یا عدم‌حضور سرویس‌دهنده در محل سرویس‌دهی است. لذا باید خط‌مشي‌اي در نظر گرفته شود تا متقاضیانی که با چنین سامانه‌هایی روبرو می‌شوند در محیطی خارج از سامانه صف به نام اربیت نگه‌داری و سپس وارد صف شوند. در این پایان‌نامه به بررسی یک مدل صف تک سرویس‌دهنده با تلاش‌مجدد به صف و تعطیلی سرویس‌دهنده می‌پردازیم. سرویس‌دهنده به تمام متقاضیان سرویس می‌دهد تا زمانی‌که سامانه خالی شود و بعد از آن به تعطیلی می‌رود. مسئله مورد بحث، زمان بازگشت سرویس‌دهنده بعد از تعطیلی به صف می‌باشد. از این‌رو ابتدا در فصل اول، به بیان مفهوم‌های اولیه و مقدماتی می‌پردازیم. در فصل دوم، به بررسی سامانه صف $M/G/1$ با تلاش‌مجدد می‌پردازیم و با درنظر گرفتن فرض‌های مدل، اندازه‌های مؤثر بودن سامانه را به‌دست می‌آوریم. در فصل سوم، برای تعیین زمان اتمام تعطیلی و بازگشت سرویس‌دهنده به سامانه، براساس مدل $M/M/1$ زمان بهینه را از دیدگاه فازی تعیین می‌کنیم. در فصل چهارم، با بیان يك مثال عددی، بررسی می‌کنیم که با استفاده از شیوه فازی می‌توان هزینه‌های سامانه را در اکثر موارد کنترل کرد.



**واژگان کلیدی:** *صف، صف با تلاش‌مجدد، اربیت، تعطیلی سرویس‌دهنده، سامانه صف فازی، بهینه‌سازي تابع هزینه.*

# فصل ۱

# تعریف‌ها، مفهوم‌ها و کلیات

## ۱.۱ مقدمه

مسأله‌ی خط انتظار یا صف، از جمله مسایل و مدل‌هایی است که هم در توسعه‌ی علمی و هم در توزیع خدمات مورد نیاز است و در "صنایع" و "تحقیق در عملیات" [۱] جایگاهی خاص دارد. نظریه صف از قدیمی‌ترین و توسعه‌یافته‌ترین تکنیک‌های تحلیل و بررسی خطوط انتظار است که همواره در مسایل مختلف همه روزه با آن مواجه هستیم. کاربرد مدل‌های صف‌بندی در اوایل قرن بیستم شروع شد و دانشمندان اهمیت استفاده از آن را احساس کردند. نظریه صف با کار تحقیقاتی ریاضی‌دان دانمارکی به نام ای.کی.ارلنگ در سال (۱۹۰۹)، آغاز گردید. وی ابتدا میزان افزایش و کاهش تقاضا در سامانه‌های خطوط تلفن را مورد بررسی قرار داد. تا سال (۱۹۵۰)، تنها کاربرد اصلی نظریه صف‌بندی، در سامانه‌های تلفن بود. گالیهر و ویلر سال ( ۱۹۵۸)، کاربرد نظریه صف را در مسایل فرود هواپیما بررسی کردند. آن‌ها با درنظر گرفتن هواپیماها به‌عنوان متقاضی و باندهای فرودگاه به‌عنوان سرویس‌دهنده و همچنین با درنظر گرفتن هواپیماهایی که در ارتفاع‌های مختلف منتظر دستور فرود هستند، خط انتظار را تعریف کردند.

به‌طور کلی می‌توان گفت، مدل‌های صف‌بندی برحسب ماهیت کاربرد آن‌ها در سامانه‌های تولیدی، حمل و نقل، سامانه‌های انبارداری، ارتباطات و سامانه‌های اطلاعات به‌طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

[۱] تحقیقاتی که با کاربرد روش‌های علمی در مسایلی که مدیران و مقامات تصمیم‌گیرنده با آن روبه‌رو هستند مرتبط است.

در این فصل، به بیان مفهوم‌های اولیه می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مکرر از آن‌ها استفاده خواهیم کرد. از این‌رو ابتدا در بخش ۲.۱، مدل، مسأله مورد بررسی را توصیف می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۱، پیشینه تحقیق را می‌آوریم. در بخش ۴.۱، به توصیف یک مدل صف‌بندی در حالت کلی می‌پردازیم. در بخش ۵.۱، چند تعریف و نتیجه مورد نیاز را مطرح می‌کنیم و در نهایت در بخش ۶.۱، خلاصه‌ای از فصل و چشم‌انداز فصل‌های آتی را می‌آوریم.

## ۲.۱ مسأله مورد بررسی

در این پایان‌نامه، به بررسی یک مدل صف تک سرویس‌دهنده با تلاش مجدد متقاضی به صف و تعطیلی سرویس‌دهنده، می‌پردازیم. ابتدا به تحلیل مدل $M/G/1$ با تلاش‌مجدد می‌پردازیم و تابع مولد احتمال سامانه در زمان‌های اشتغال و تعطیلی سامانه و همچنین زمان انتظار در صف را تعیین می‌کنیم.

مسأله‌ای که در مدل‌های صف با تعطیلی مطرح می‌شود زمان اتمام تعطیلی و بازگشت سرویس‌دهنده به سامانه است. برای این مسأله، در مدل $M/M/1$، و با مشخص کردن یک تابع هزینه برای مدل، زمان بهینه بازگشت سرویس‌دهنده به سامانه بعد از تعطیلی را تعیین می‌کنیم.

سامانه‌های صف با تلاش مجدد پیچیده‌تر از سامانه‌های صف معمولی هستند. از آن‌جایی که یکی از راه‌های حل مسایل کنترل و بهینه‌سازی استفاده از رویکرد فازی است، در این پایان‌نامه خط‌مشی آستانه‌ای فازی [۲] $(FBTP)$ را به‌جای خط‌مشی‌های آستانه‌ای معمولی در نظر می‌گیریم و با فازی کردن تصمیم‌گیری جهت بازگشت سرویس‌دهنده به سامانه، بررسی خواهیم کرد که با استفاده از خط‌مشی پیشنهادی می‌توان هزینه‌های سامانه را در اکثر موارد کنترل کرد.

[۲] Fuzzy Based Threshold Policy

## ۳.۱ پیشینه تحقیق

کاپیرین (۱۹۷۷)، موضوع تلاش‌مجدد را در مدل صف $M/G/1$ بررسی کرده است. او فرض کرد که هر متقاضی در اربیت، براساس یک جریان که مستقل از سایر متقاضیان در اربیت و سامانه است، جهت ورود دوباره به سامانه تلاش می‌کند.

لین و کومار (۱۹۸۴) و کول (۱۹۹۵)، بهبود خط‌مشی آستانه‌ای در سامانه صف‌بندی با دو سرویس‌دهنده و یک جریان ورود را مورد بحث و بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که برای کاهش نرخ سرویس‌دهی باید تعداد متقاضیان در صف، از یک مقدار آستانه‌ای معین بیشتر باشد.

چوی و پارک (۱۹۹۰)، به بررسی مدل صف تک سرویس‌دهنده با تلاش مجدد از نوع $M_1, M_2/G/1$ با دو نوع ورودی پرداختند. در این مدل، متقاضیان نوع اول، متقاضیان منتظر در صف و متقاضیان نوع دوم، متقاضیان تلاش‌مجدد جهت ورود به سامانه هستند. متقاضیان نوع اول در اولویت قرار دارند. چوی و پارک، برای این مدل، تابع مولد احتمال توأم طول صف را با استفاده از روش متغیر کمکی به‌دست آوردند. همچنین چوی و همکاران (۱۹۹۳)، توزیع زمان انتظار برای متقاضیان نوع دوم در صف مجازی را برای این مدل به‌دست آوردند.

آلتمن و نین (۱۹۹۶)، یک مدل صف تک سرویس‌دهنده با زمان تعطیلی تصادفی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن هزینه سامانه متشکل از هزینه نگه‌داری در اربیت و هزینه‌ای ثابت برای هر بار که سرویس‌دهنده بعد از تعطیلی شروع به‌کار می‌کند، نشان دادند که در خط‌مشی آستانه‌ای می‌توان مجموع هزینه سامانه را به حداقل رساند.

فنگ و همکاران (۲۰۰۲)، عملکرد خط‌مشی آستانه‌ای در سامانه صف با دو سرویس‌دهنده و با دو جریان ورود را مطالعه کردند. آن‌ها با درنظر گرفتن خط‌مشی آستانه‌ای ثابت یعنی خط‌مشی مبتنی بر یک دوره زمانی از پیش تعریف شده، متوسط زمان انتظار و متوسط طول صف را به‌دست آوردند.

کو و جردن (۲۰۰۲)، کنترل‌فازی صف‌های با زیان [۳] را به‌منظور به‌حداکثر رساندن درامد مورد بحث قرار دادند.

آپااولازا و آرتالجو (۲۰۰۵)، با انجام روش‌های تقریبی در حالت مانا، زمان لازم برای رسیدن به تعداد بحرانی متقاضیان و تعداد متقاضیان سرویس دیده در این زمان، را ارایه دادند.

[۳] در صف‌های با زیان هیچ فضای انتظار وجود ندارد لذا متقاضیان بلوکه شده از دست خواهند رفت.

ژانگ و همکاران (۲۰۰۵)، کنترل‌فازی را برای مدل صف با چند سرویس‌دهنده با تعطیلی را توسعه دادند. آن‌ها در مطالعه خود، تغییر در هزینه و هزینه نگه‌داری در کنترل صف با چند سرویس‌دهنده با حافظه مجازی محدود را در نظر گرفتند.

اسرینیواس و همکاران (۲۰۰۶)، مدل‌های تلاش‌مجدد با چند سرویس‌دهنده با فرایند ورود مارکوفی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها روی نرخ تلاش‌مجدد متقاضیان، که وابسته به تعداد متقاضیان در اربیت و نسبت به نرخ بازگشت ثابت است، کار کردند.

که و همکاران (۲۰۰۷)، مدل صف با تلاش‌مجدد با پارامترهای فازی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در مطالعه خود با درنظرگرفتن ویژگی‌های تابع‌های عضویت، در صف با تلاش‌مجدد، نرخ تلاش‌مجدد و نرخ سریس‌دهی فازی را پیشنهاد دادند. آن‌ها همچنین، نشان دادند که مدل پیشنهادی دارای دقت بیشتری نسبت به مدل‌های صف با تلاش مجدد در محیط غیرفازی است.

آریوداینامبی و همکاران (۲۰۰۹)، تازه‌ترین کار در مورد تلاش‌مجدد را ارایه دادند. آن‌ها یک مدل صف تک سرویس‌دهنده با بازگشت به اربیت و تعطیلی برنولی را در نظر گرفتند. آن‌ها با استفاده از روش متغیر کمکی، تابع مولد احتمال توأم تعداد متقاضیان در صف و تعداد متقاضیان در اربیت را به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین، میانگین طول صف و میانگین زمان انتظار در صف را پیدا کردند.

جولای و همکاران (۲۰۱۰)، خط‌مشی آستانه‌ای فازی را برای کنترل سامانه تک سرویس‌دهنده با تلاش‌مجدد با تعطیلی سرویس‌دهنده ارایه دادند. آن‌ها با مثال‌های عددی نشان دادند که، با استفاده از خط‌مشی آستانه‌ای فازی به‌جای یک تصمیم قطعی و واضح می‌توان هزینه‌های کل سامانه را در اکثر موارد کاهش داد. این مقاله، مقاله اصلی مورد استفاده در این پایان‌نامه است.

## ۴.۱ توصیف مدل صف‌بندی در حالت کلی

یک سامانه صف را می‌توان به این صورت توصیف کرد که متقاضیان برای گرفتن سرویس، وارد مکانی می‌شوند که این سرویس در آن‌جا ارایه می‌شود. اگر در لحظه ورود متقاضی، ارایه سرویس مقدور نباشد، متقاضی برای دریافت آن منتظر می‌ماند و پس از اتمام سرویس از سامانه خارج می‌شود. در نظریه صف، متقاضی یک واژه عام برای ورودی‌هایی است که جهت دریافت سرویس به سامانه‌ای که این سرویس را فراهم می‌کند وارد می‌شود. فرایند و ابزاری که چنین سرویس و خدمتی را در اختیار می‌گذارد سرور یا سرویس‌دهنده می‌نامند.

سامانه‌های صف برحسب چیدمان فیزیکی براساس نوع فرایندهای ورود و سرویس، تعداد سرویس‌دهنده‌ها، ظرفیت سامانه و نظم صف تقسیم‌بندی می‌شوند و مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند. برای نمایش یک مدل صف، کندال (۱۹۵۳)، یک مدل صف را در حالت کلی به‌صورت $A/B/X/Y/Z$ نمایش داد که در آن $A$ معرف توزیع مدت زمان بین دو ورود متوالی، $B$ الگوی سرویس، $X$ تعداد باجه‌های سرویس، $Y$ محدودیت در گنجایش سامانه و $Z$ نظم صف هستند.

در ساده‌ترین حالت، سامانه صف دارای یک فرایند ورودی برای ورود متقاضیان و یک سرویس‌دهنده می‌باشد. اصطلاحاً به این سامانه، سامانه تک کاناله و تک سرویس‌دهنده می‌گویند. در پیچیده‌ترین حالت، سامانه دارای چندین فرایند ورودی و چندین سرویس‌دهنده می‌باشد که هر سرویس‌دهنده، سرویس‌های متفاوتی را عرضه می‌نماید. به این سامانه اصطلاحاً سامانه چندکاناله و سرویس‌دهنده چندگانه گفته می‌گویند.

**فرایند ورود**

فرایند ورود، طریقه‌ای است که متقاضیان وارد سامانه می‌شوند و غالباً برحسب متوسط تعداد ورودی‌ها در واحد زمان یا به‌وسیله متوسط زمان بین دو ورود متوالی اندازه‌گیری می‌شود. زمانی‌که جریان ورود متقاضیان کاملاً مشخص است، الگوی ورود با میانگین نرخ ورودی یا میانگین فاصله زمانی دو ورود متوالی کاملاً مشخص می‌شود. در اکثر موارد، ورود می‌تواند یک فرایند پواسون با پارامتر مناسب باشد.

**فرایند سرویس**

فرایند سرویس در ارتباط با خروج متقاضیان از سامانه است. از جمله عوامل مهم که در فرایند سرویس‌دهی مطرح می‌گردد توزیع احتمال زمان سرویس، تعداد باجه‌های سرویس، طریقه قرار گرفتن باجه‌های سرویس می‌باشد. متداول‌ترین سامانه صف، سامانه صفی است که دارای تنها یک سرویس‌دهنده، ورود متقاضیان به سامانه به‌صورت یک فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ و آهنگ ورود، مستقل از جمعیت داخل سامانه فرض می‌شود. همچنین زمان سرویس‌دهی دارای توزیع نمایی است و به کمک یک فرایند مارکوف زمان پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مدل چون تنها یک سرویس‌دهنده وجود دارد، آهنگ خروج متقاضیان برابر آهنگ سرویس خواهد بود که این آهنگ را با $\mu$ نمایش می‌دهند. این مدل صف را با علامت $M/M/1$ نمایش می‌دهند. حال اگر در مدل تک سرویس‌دهنده‌ای، زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان نمایی اما مدت زمان سرویس هر متغیر تصادفی با تابع توزیع دلخواه باشد مدل را با علامت $M/G/1$

نمایش می‌دهند.

**تعداد سرویس‌دهنده‌ها**

تعداد سرویس‌دهنده‌هایی که می‌توانند به متقاضیان، همزمان سرویس ارایه دهند.

**ظرفیت سامانه**

در برخی فرایندهای صف‌بندی، به علت محدودیت فیزیکی و یا برخی عوامل دیگر، برای طول صف محدودیت تعیین می‌کنند، به این صورت که اگر طول صف به اندازه مشخصی رسید، متقاضی دیگری اجازه ورود به سامانه را ندارد تا زمانی‌که حداقل یک متقاضی از سامانه خارج شود.

**نظم صف**

منظور از نظم صف، یعنی شیوه تشکیل خط انتظار، اداره آن و سرویس متقاضیان می‌باشد. ساده‌ترین نظم، سرویس‌دهی به‌ترتیب ورود به سامانه است. یعنی، هر متقاضی که زودتر وارد سامانه شده است زودتر سرویس می‌گیرد و از سامانه خارج می‌شود. این نظم را با علامت $(FCFS)$[۴] نمایش می‌دهند. از دیگر نظم‌های سامانه، می‌توان نظم سرویس‌دهی به‌ترتیب عکس فرایند ورود متقاضی به سامانه $(LCFS)$[۵] و نظم صف به‌صورت تصادفی $(RSS)$[۶] اشاره کرد.

### ۱.۴.۱ چرخه اشتغال سامانه

هرگاه تمام متقاضیان از سامانه خارج شوند، سامانه مدتی بیکار می‌ماند. این دوره از خروج آخرین متقاضی شروع و با ورود اولین متقاضی بعدی پایان می‌یابد. در واقع با ورود متقاضی دوره اشتغال سامانه آغاز می‌شود و تا زمانی‌که تمام متقاضیان سرویس بگیرند و از سامانه خارج شوند ادامه می‌یابد. مجموع یک دوره بیکاری و یک دوره اشتغال را یک چرخه اشتغال می‌گویند.

---

[۴] First Come, First Served

[۵] Last Come, First Served

[۶] Random Selection For Served

یک رده از صف‌های بسیار مهم در زندگی روزمره، صف با تعطیلی است. در زمینه صف، تعطیلی یک دوره زمانی است که سرویس‌دهنده با وجود حضور متقاضی در سامانه، خود در سامانه حضور ندارد و سرویس ارایه نمی‌دهد.

در سامانه‌های صف‌بندی، مسأله‌ای که مطرح می‌شود، عدم دسترسی متقاضیان به سامانه به دلیل شلوغ بودن یا تعطیلی سامانه می‌باشد و این خود باعث از دست دادن متقاضی می‌شود. لذا می‌توان صفی مجازی به نام اربیت [۷] در نظر گرفته شود تا متقاضیانی که با چنین سامانه‌هایی روبرو می‌شوند، به‌جای قرار گرفتن در صف، وارد اربیت شده و شانس خود را برای گرفتن سرویس، در فاصله‌های زمانی تصادفی تکرار کنند. این‌گونه صف‌ها را صف با تلاش مجدد می‌نامند.

### ۲.۴.۱ چند تعریف و نتیجه در مدل‌های صف‌بندی

**فرمول‌های لیتل**

بین متوسط تعداد متقاضیان در سامانه و متوسط زمان انتظار متقاضیان در صف رابطه‌هایی وجود دارد. لیتل اولین بار در سال (۱۹۶۱)، این رابطه‌ها را به‌دست آورد. فرض کنید $W$ میانگین زمان انتظار در سامانه و $W_q$ میانگین زمان انتظار در صف باشد، در این صورت، داریم

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

در صورتی‌که $L_q$ میانگین طول صف باشد، آن‌گاه

$$L_q = \lambda W_q$$

و

$$L = \lambda W$$

که این رابطه‌ها به فرمول‌های لیتل معروف هستند. جهت مطالعه بیشتر به لیتل (۱۹۶۱)، مراجعه نمایید.

[۷] Orbit

**تبدیل لاپلاس - استیلتیس**

تبدیل لاپلاس تابع $F(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,\mathrm{d}F(t) \qquad |z| \leq 1$$

اگر $F(t)$ مشتق‌پذیر باشد با مشتق $f(t)$، آن‌گاه

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad |z| \leq 1$$

**نکته ۱.۱** همواره

$$f^*(u)\mid_{u=0} = 1$$

**نکته ۲.۱** فرض کنید $F(z)$ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته $X$ باشد. آن‌گاه با استفاده از تبدیل لاپلاس $f^*(z)$ می‌توان گشتاورهای متوالی $X$ را با روش مشتق‌گیری از $f^*(z)$ نسبت به $z$ به‌دست آورد. برای این‌منظور، دو گشتاور اول متغیر $X$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$E(X) = (-1)\frac{df^*(z)}{dz}\mid_{z=0}$$

و

$$E(X^2) = (-1)^2\frac{d^2f^*(z)}{dz^2}\mid_{z=0}$$

**نکته ۳.۱** در صورتی‌که $f^*(u)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(.)$ و $u$ تابعی نسبت به $z$ باشد به‌طوری که به ازای $z = 1$، داشته باشیم $u = 0$، آن‌گاه

$$\frac{d}{dz}f^*(u) = \frac{d}{du}f^*(u)\mid_{u=0}\cdot\frac{du}{dz}\mid_{z=1} = -S_1\frac{du}{dz}\mid_{z=1}$$