تقدیم به اسوه‌ی استقامت و منطق،

گرامی پدرم؛

تقدیم به معلم صبر و دلسوزی،

نازنین مادرم؛

تقدیم به یار، یاور و همراه همیشگی،

مهربان همسرم.

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که اول وآخر وجود است، بی آنکه اولی بر او پیشی بگیرد یا آخری پس از او باشد؛ سپاسی به وسعت همه آن سپاسی که ملائکه مقرب و خلایق مکرم و ستایندگان پسندیده او را شکر گفتند. برترین شکر از میان هر شکری، چون برتری پروردگارمان بر هر وجودی.

در کمال تواضع و فروتنی نهایت تشکر و امتنان خود را از استاد راهنمای گرامی‌ام، دانشمند و فرهیخته، فاضل و دلسوز جناب آقای دکتر فرشید میرزائی که نفس گرم و صفای باطن ایشان مشوق و محرک حضور و مایه دلگرمی و علاقه‌ی بیشتر در گردآوری این پژوهش شده را دارم.

از استاد مشاور محترمم جناب آقای دکتر رشید رضایی که با ارائه راهنمایی‌ها و ارشادات اندیشمندانه مرا در این پژوهش یاری نمودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

سپاس از جناب آقای دکتر خسرو سایوند و جناب آقای دکتر مهدی قیاسوند که به صبر و دانش داوری این نوشته را پذیرفتند.

زبان از بیان تشکرتان قاصر و کوتاه، کلمات از ساخت جمله‌ای در خور وشایسته‌ی سپاستان گنگ و سردرگم و من از بیان نهایت قدردانی‌ام عاجز و ناتوان. از خانواده عزیزم، بخصوص پدر و مادر عزیزتر از جانم که همواره پشتوانه، مشوق و حامی من در تمامی مراحل زندگی بودند و همسر مهربان وبزرگوارم که همیشه دلگرمی و مسبب آرامشم بوده، به وسعت همه ناگفته‌ها و نانوشته‌ها سپاسگذارم.

برای هر رسیدنی مسیری است و پیمودن هر مسیری را هزار دریچه‌ی ناامیدی و صدها بن بست که جز با همدلی و همدردی دوستانی همراه امکان پیمودن به آسانی میسر نیست. از تمامی کسانی که مرا در این راه یاری رساندند کمال تشکر را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: حدادیان نژاد یوسفی	نام: الهام
عنوان پایان نامه: توابع متعامد بلاک – پالس و استفاده از آن برای حل معادلات انتگرال	
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی استاد مشاور : دکتر رشید رضایی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر–گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۱۲۸	
کلید واژه: معادلات انتگرال فردهلم خطی و غیرخطی، معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی، معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم، معادلات انتگرال–دیفرانسیل ولترا، توابع متعامد بلاک–پالس، ماتریس عملیاتی انتگرال.	

چکیده:

در این پایان‌نامه حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترا خطی و غیرخطی، همچنین معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم و ولترا خطی با استفاده از روش توابع متعامد بلاک–پالس مورد بررسی قرار گرفته است. این پایان‌نامه شامل پنج فصل است که به صورت زیر ارایه گردیده‌اند. در فصل اول مقدمه‌ای کوتاه در مورد معادلات انتگرال و تعاریف و قضایای مربوط به این پایان‌نامه بیان شده است. در فصل دوم مختصر توضیحاتی از توابع متعامد بلاک–پالس و بسط توابع بر حسب سری توابع متعامد بلاک–پالس آن، همچنین همگرایی این روش آورده شده است. در فصل سوم این روش را برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترا خطی به همراه چندین مثال به‌کار برده‌ایم. حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترا غیرخطی با استفاده از روش مذکور و چند مثال در فصل چهارم بررسی شده است. در انتها، حل عددی معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم و ولترا خطی را به همراه چند مثال در فصل پنجم بیان نموده‌ایم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا معادلات انتگرال را تعریف می‌کنیم، سپس به بیان تاریخچه معادلات انتگرال و دسته‌بندی آن اشاره خواهیم داشت. پس از آن تعاریف و قضایای لازم و مرتبط با این پایان‌نامه را ارایه می‌کنیم و در انتها به شرح روش حل دستگاه‌های غیرخطی به روش نیوتن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ معادله انتگرال، معادله‌ای است که تابع مجهول، زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود؛ همچنین این تابع مجهول می‌تواند علاوه بر زیر علامت انتگرال، در خارج از علامت انتگرال نیز ظاهر شود [۱]، [۷]، [۸] و [۱۶].

مثال ۲.۱.۱ معادلات زیر، نمونه‌هایی از معادلات انتگرال هستند:

$$x(t) = \int_a^b k(t,s)y(s)ds \ , \tag{۱.۱}$$

$$y(t) = x(t) + \int_a^b k(t,s)y(s)ds \ , \tag{۲.۱}$$

$$y(t) = \int_a^b k(t,s)y^{۲}(s)ds \ , \tag{۳.۱}$$

که در آن‌ها $a \leq t,s \leq b$، $y(t)$ تابع مجهول و سایر توابع معلوم هستند. تابع دو متغیره $k(t,s)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. این توابع می‌توانند مقدار حقیقی یا مختلط از متغیرهای حقیقی s و t باشند. همچنین معادله انتگرال ممکن است به چندین متغیر وابسته باشد. برای مثال:

$$y(t) = x(t) + \int_\Omega k(t,s)y(s)ds \ , \tag{۴.۱}$$

که s و t بردارهایی n—بعدی و Ω ناحیه‌ای از فضای n—بعدی هستند. همچنین می‌توانیم دستگاه معادلات انتگرالی را بررسی کنیم که چندین تابع مجهول داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱ یک هسته را متقارن می‌نامیم، اگر داشته باشیم

$$k(t,s) = k^*(t,s) \ , \tag{۵.۱}$$

که k^* مزدوج مختلط k می‌باشد.

تذکر ۴.۱.۱ اگر k حقیقی باشد، $k = k^*$ است.

۲.۱ تاریخچه

در روند بررسی برخی از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی، با معادلاتی روبه‌رو می‌شویم که به آن‌ها معادلات انتگرال گفته می‌شود. نظریه معادلات انتگرال یکی از مهم‌ترین

شاخه‌های آنالیز عددی است که در بسیاری از مسایل فیزیکی و فنی ظاهر می‌شود و اصولاً اهمیت آن از لحاظ مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است.

بنیان‌گذاران اصلی نظریه معادلات انتگرال ویتو ولترا[۱] (۱۹۴۰—۱۸۶۰) و اریک اوار فردهلم[۲] (۱۹۲۷—۱۸۶۶) به همراه دیوید هیلبرت[۳] (۱۹۴۳—۱۸۲۶) و ارهارد اسمیت[۴] (۱۸۷۶) می‌باشند.

در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می‌شد، لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال توسط بویس ریموند[۵] پیشنهاد شد. در سال ۱۷۸۲ لاپلاس[۶] اولین کسی بود که برای حل معادلات دیفرانسیل، با معرفی $x(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}y(s)ds$، بحث درباره نظریه معادلات انتگرال را آغاز کرد. در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه[۷] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار کرد و به نوعی از این معادلات برخورد کرد. به دنبال آن آبل[۸] نیز در سال ۱۸۲۳ در مسئله خود، که به مسئله مکانیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد. در سال ۱۸۲۶ پواسن[۹] در نظریه مغناطیسی خود، به معادله انتگرال زیر رسید:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}y(s)ds \,. \qquad (\text{به قدر کافی بزرگ } a)$$

لیوویل[۱۰] نیز مستقلاً معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل نمود و یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال برداشت و آن چگونگی حل بعضی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. در سال ۱۸۷۰ نیومن[۱۱] با تبدیل مساله دیریکله[۱۲] به یک معادله انتگرالی از دیگر کسانی بود که نقش موثری در تکامل معادلات انتگرال داشت.

برای اولین بار اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می‌رود، توسط هیلبرت پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرم‌های زیر مطرح بود که هر دو از نمونه‌های مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$x(t) = \int_{a}^{t} k(t,s)y(s)ds \;; \qquad a \le t \le b \,,$$

[۱] Vito Volterra
[۲] Erik Ivar Fredholm
[۳] David Hilbert
[۴] Irhard Smith
[۵] Bois Reymond
[۶] Laplace
[۷] Fourier
[۸] Abel
[۹] Poissone
[۱۰] Liouville
[۱۱] Neuman
[۱۲] Dirichlet

و

$$y(t) = x(t) + \int_a^t k(t,s)y(s)ds \; ; \qquad a \le t \le b \; ,$$

که در آن‌ها $k(t,s)$ و $x(t)$ توابعی معلوم و $y(t)$ تابعی مجهول است.

در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[۱] معادله انتگرال زیر، که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی حرکت موج می‌باشد:

$$\nabla y + \lambda y = x(t,s) \; ,$$

را به دست آورد، که در آن،

$$\nabla = \frac{\partial^۲}{\partial t^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial s^۲} \; ,$$

و

$$y(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)dy = x(t) \; .$$

در همان سال دانشمندی از ایتالیا به نام ولترا برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را مطرح کرد و اهمیت این نظریه را به رسمیت شناخت و به شکلی اصولی به تحقیق و بررسی در این مورد پرداخت.

ولترا در سال ۱۸۹۰ با استفاده از مفاهیم حساب انتگرال و دیفرانسیل تابعی، نشان داد که نظریه هامیلتون[۲] و ژاکوبی[۳] برای انتگرال‌گیری از معادلات دینامیکی را می‌توان به دیگر مسایل ریاضی فیزیک توسعه داد. ولترا در خلال سال‌های ۱۸۹۲ تا ۱۸۹۴ مقالاتی تحت عنوان معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منتشر کرد. شهرت او بیشتر به واسطه کارهایش در زمینه معادلات انتگرال می‌باشد. او مطالعه در این زمینه را در سال ۱۸۸۴ شروع کرد که هم اکنون تحت عنوان معادلات انتگرال ولترا شناخته می‌شود.

فردهلم تا حدود سال ۱۹۰۰ نقش عمده‌ای در بسط و گسترش این نظریه نداشت. او اوایل به تحقیق در مورد مسایل مکانیک کاربردی پرداخت. وی در اواخر زندگیش به کار بر روی ریاضیات کاربردی ادامه داد. شهرت او بیشتر به خاطر کارهایش در نظریه معادلات انتگرال و نظریه طیفی می‌باشد. در سال ۱۹۰۰ اولین مقاله فردهلم در نظریه معادلات انتگرال تحت عنوان،

[۱] Poincare
[۲] Hamilton
[۳] Jacobi

Sur une nouvelle methode pour la resolution du problem de dirichle

منتشر شد. ریمان[۱] ، شوارتز[۲] ، نیومن، پوانکاره مسایلی را حل کرده بودند که حالت خاصی از نظریه‌ای بود که فردهلم ارایه کرده بود و که این امر نشان از قدرتمند بودن نظریه او در معادلات انتگرال دارد.

در سخنرانی که درباره نظریه فردهلم در گوتینگن در سال ۱۹۰۱، توسط یک ریاضیدان سوئدی به نام اریک هولمگر[۳] ارایه شد، فردهلم به عنوان چهره‌ای در عرصه ریاضیات شناخته شد و علاقه هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال کمک گرفت. هیلبرت فاصله انتگرال‌گیری را $(۰, ۱)$ و هسته را پیوسته فرض کرد.

فردهلم در سال ۱۹۰۳ نسخه کامل‌تری از نظریه‌اش را در معادلات انتگرال تحت عنوان،

Sur une classe d'equations fonctionelle

منتشر کرد. هیلبرت که به اهمیت نظریه فردهلم پی برده بود، ثابت کرد که معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل از نوسانات یک صفحه می‌تواند منجر به یک معادله انتگرال فردهلم با هسته متقارن شود. هیلبرت حدود ۱۰ سال به کار روی نظریه فردهلم پرداخت و کارهای او را توسعه داد که منجر به نظریه مقادیر ویژه برای معادلات انتگرال شد. حدود دو دهه اول قرن بیستم معادلات انتگرال یکی از عمده‌ترین موضوعات تحقیق در ریاضیات بود.

۳.۱ انواع معادلات انتگرال

با توجه به توسعه معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن تقسیم‌بندی جامع برای این دسته از معادلات ضرورت دارد؛ به خصوص که از یک طرف در مسایل مختلف فیزیکی، انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شود و از طرف دیگر راه‌هایی که جهت حل انواع آن‌ها ارایه شده است، متفاوت است. با توجه به موارد فوق، لازم است که برخی از دسته‌بندی‌های این نوع از معادلات را معرفی کنیم. اولین دسته‌بندی که در اینجا به آن اشاره می‌شود خطی یا غیرخطی بودن این معادلات می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱ یک معادله انتگرال را خطی گوییم، هرگاه عمل‌های انجام شده روی تابع مجهول، خطی باشد؛ در غیر این صورت آن را غیرخطی گوییم [۱]، [۷]، [۸] و [۱۶].

مثال ۲.۳.۱ معادلات (۱.۱) و (۲.۱) خطی و معادله (۳.۱) غیر خطی می‌باشد.

[۱] Riemann
[۲] Schwartz
[۳] Erick Holmger

بر حسب ثابت یا متغیر بودن کران بالای انتگرال، دسته‌بندی دیگری شامل این نوع از معادلات می‌شود. در این دسته‌بندی معادلات انتگرال را به سه نوع عمده تقسیم می‌کنیم [۱]، [۷]، [۸] و [۱۶].

۱) **معادله انتگرال فردهلم:** چنانچه در معادله انتگرال، کران بالای انتگرال عددی ثابت باشد، آن را معادله انتگرال فردهلم می‌نامیم. فرم کلی معادلات انتگرال فردهلم خطی به صورت زیر است:

$$h(t)y(t) = x(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds \ ; \quad a \leq t \leq b \ , \tag{۶.۱}$$

که در آن $x(t)$، $h(t)$ و $k(t,s)$ توابعی معلوم، $y(t)$ تابعی مجهول، a و b اعدادی ثابت و $\lambda \neq 0$ عددی ثابت، حقیقی یا مختلط می‌باشد.

۲) **معادله انتگرال ولترا:** اگر در معادله انتگرال، کران بالای انتگرال متغیر باشد، آن را معادله انتگرال ولترا می‌نامیم. چنانچه در معادله (۶.۱)، قرار دهیم $b = t$، فرم کلی معادلات انتگرال ولترا خطی به دست می آید.

۳) **معادله انتگرال تکین یا منفرد:** اگر حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری یعنی a یا b نامتناهی باشد، یا هسته در فاصله انتگرال‌گیری در نقطه یا نقاطی بی‌نهایت باشد، آن را معادله انتگرال تکین یا منفرد می‌نامیم.

همچنین هر کدام از معادلات فوق به چهار دسته تقسیم می‌شوند.

۱ــ **معادله انتگرال نوع اول:** چنانچه در فرم کلی هر کدام از این معادلات $h(t) = 0$ باشد، معادله انتگرال نوع اول آن حاصل می‌شود.

مثال ۳.۳.۱ معادله انتگرال فردهلم خطی نوع اول به صورت زیر است:

$$x(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds = 0 \ . \tag{۷.۱}$$

۲ــ **معادله انتگرال نوع دوم:** چنانچه در فرم کلی هر کدام از این معادلات $h(t) = 1$ باشد، معادله انتگرال نوع دوم آن حاصل می‌شود.

مثال ۴.۳.۱ معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم به صورت زیر است:

$$y(t) = x(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds \ . \tag{۸.۱}$$

۳ــ **معادله انتگرال نوع سوم:** فرم کلی هر کدام از این معادلات، معادله انتگرال نوع سوم آن است.

مثال ۵.۳.۱ معادله (۶.۱)، معادله انتگرال فردهلم خطی نوع سوم می‌باشد.

۴ــ **معادله انتگرال همگن:** چنانچه در فرم کلی هر کدام از این معادلات $h(t) = 1$ و $x(t) = 0$ باشد، معادله انتگرال همگن آن حاصل می‌شود.

مثال ۶.۳.۱ معادله انتگرال فردهلم خطی همگن به صورت زیر است:

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds \ . \qquad (۹.۱)$$

۴.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۴.۱ اگر X یک فضای برداری روی میدان (حقیقی یا مختلط) F باشد، حاصل ضرب داخلی روی X، تابع $U : X \times X \to F$ است، به طوری که به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشند [۵]:

۱) $x = 0 \Leftrightarrow U(x,x) = 0$ و $U(x,x) \geq 0$،

۲) $U(\alpha x + \beta y, z) = \alpha U(x,z) + \beta U(y,z)$،

۳) $U(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} U(x,y) + \bar{\beta} U(x,z)$،

۴) $U(x,y) = \overline{U(y,x)}$.

تذکر ۲.۴.۱ از اینجا به بعد، حاصل ضرب داخلی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$U(x,y) = \langle x, y \rangle \ . \qquad (۱۰.۱)$$

تعریف ۳.۴.۱ فضای برداری H را روی میدان حقیقی F همراه با حاصل ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$، فضای هیلبرت می نامیم، هرگاه H نسبت به متر القا شده به وسیله نُرم $d(x,y) = ||x-y||$ یک فضای متریک کامل باشد [۵].

مثال ۴.۴.۱ اگر $H = L^2(\mu)$ و $\langle f, g \rangle = \int f\bar{g}d\mu$ باشد، همچنین نُرم القا شده را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$||f|| = \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad (۱۱.۱)$$

به کمک نظریه اندازه خواهیم داشت که $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۵.۴.۱ تابع $f(t)$ را روی فاصله $[0,1)$ به طور مربع انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \ . \qquad (۱۲.۱)$$

قضیه ۶.۴.۱ فرض کنیم تابع $f(t)$ روی فاصله $[0,1]$ پیوسته و در فاصله $(0,1)$ مشتق‌پذیر باشد و عدد حقیقی M وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر t متعلق به فاصله $[0,1]$، $|f'(t)| \leq M$. در این صورت به ازای هر a و b متعلق به فاصله $[0,1]$ داریم [۲۹]:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a| \ . \qquad (۱۳.۱)$$

۵.۱ حل عددی دستگاه معادلات غیرخطی به روش نیوتن

در این روش برای حل عددی دستگاه معادلات غیرخطی $F(X)=\begin{bmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$، فرض می‌کنیم $\widehat{X}=[\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n]^T$، جواب دقیق این دستگاه است و حدس اولیه یعنی $X^{(0)}=\left[x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right]^T$، تقریبی نزدیک به $\widehat{X}$ باشد (که در آن T ترانهاده ماتریس است). همچنین قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n\end{bmatrix}=H\ . \tag{۱۴.۱}$$

حال برای به دست آوردن H از بسط تیلور توابع $f_i(\widehat{X});\ i=1,\cdots,n$ حول $X^{(0)}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0=f_1(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n)=f_1(x_1^{(0)}+h_1,\cdots,x_n^{(0)}+h_n)=f_1(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}) \\ \qquad +h_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{X^{(0)}}+\cdots+h_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}|_{X^{(0)}}+\cdots\ , \\ \vdots \\ 0=f_n(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n)=f_n(x_1^{(0)}+h_1,\cdots,x_n^{(0)}+h_n)=f_n(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}) \\ \qquad +h_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}|_{X^{(0)}}+\cdots+h_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n}|_{X^{(0)}}+\cdots\ . \end{cases} \tag{۱۵.۱}$$

با توجه به کوچک بودن h_iها می‌توانیم از سایر جملات بسط‌های فوق صرفه‌نظر کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0\simeq f_1(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})+h_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{X^{(0)}}+\cdots+h_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}|_{X^{(0)}}\ , \\ \vdots \\ 0\simeq f_n(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})+h_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}|_{X^{(0)}}+\cdots+h_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n}|_{X^{(0)}}\ . \end{cases} \tag{۱۶.۱}$$

معادلات فوق را به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{X^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}|_{X^{(0)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}|_{X^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}|_{X^{(0)}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n\end{bmatrix}\ . \tag{۱۷.۱}$$

با حل دستگاه فوق می‌توانیم بردار مجهول H را پیدا کنیم و با افزودن آن به $X^{(0)}$ می‌توانیم تقریب جدید $X^{(1)}$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$X^{(1)}=X^{(0)}+H\ . \tag{۱۸.۱}$$

با تکرار این روند می‌توانیم تقریبی با دقت دلخواه از $\widehat{X}$ به دست آوریم. فرم کلی این روش در تکرار mام به صورت زیر خواهد بود [۹]:

۱) به دست آوردن بردار H از حل دستگاه زیر:

$$F(X^{(m)}) = -J_F(X^{(m-1)})H \;, \tag{۱۹.۱}$$

که در آن J_F، ماتریس ژاکوبین F است.

۲) افزودن بردار H به $X^{(m-1)}$، برای به دست آوردن تقریب جدید $X^{(m)}$:

$$X^{(m)} = X^{(m-1)} + H \;. \tag{۲۰.۱}$$

تذکر ۱.۵.۱ چنانچه $n = 1$ باشد، آنگاه روش فوق همان روش نیوتن برای معادلات غیرخطی یک متغیره خواهد بود.

مثال ۲.۵.۱ دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2 = 0 \;, \\ f_2(x_1, x_2) = \cos x_1 + x_2 - 1 = 0 \;. \end{cases}$$

این مجموعه از معادلات غیرخطی یک جواب در $\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]^T = [0, 0]^T$ دارد. ماتریس ژاکوبین تابع $F = [f_1, f_2]^T$، در نقطه $X = [x_1, x_2]^T$ عبارت است از :

$$J_F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \sin x_2 & x_1^2 \cos x_2 \\ -\sin x_1 & 1 \end{bmatrix} .$$

با حدس اولیه به صورت $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]^T = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^T$، برای اولین تکرار روش نیوتن نیاز هست که دستگاه خطی زیر را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} \pi \sin \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 \end{bmatrix} ,$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 1 \end{bmatrix} .$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ 1 - \frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} ,$$

و بنابراین تکرار اول عبارت است از:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ 1 - \frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 1 - \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} .$$

با ادامه روند فوق می‌توان سایر تکرارهای روش نیوتن را محاسبه کرد.

فصل ۲

توابع متعامد بلاک–پالس