دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

نظریه‌ی مجموعه ثابت برای نگاشتهای مجموعه مقدار بسته با کاربردهایی در خود- متشابهی و بازیها

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

پژوهشگر:

اکرم بی‌باک هفشجانی

آبان ماه ۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه دیدگاه نظریه‌ی ترتیب را به‌طور خلاصه شرح می‌دهیم؛ یعنی، نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از قضایای نقطه ثابت در نظریه‌ی ترتیب، قضایای وجودی کلی را درباره بزرگترین مجموعه و مجموعه‌ی مینیمال ثابت و تقریباً- ثابت خانواده‌ای تعویض‌پذیر از خود- نگاشت‌های مجموعه مقدار بسته‌ی (بسته و مجموعه انقباضی) تعریف شده بر یک فضای توپولوژیکی فشرده (فضای متریک کامل و کراندار) نتیجه بگیریم. عکس برخی از این نتایج ثابت شده است. به موجب آن یک مشخص‌سازی از فضاهای فشرده (متریک کامل) بیان می‌کنیم و دو کاربرد ارائه می‌دهیم. در آخر، فرمولبندی از قضیه‌ی نقطه ثابت کراسنوسلسکی را وقتی شرط تحدب زیرمجموعه‌ی S از فضای باناخ X حذف شود، بیان می‌کنیم.

واژگان کلیدی: نقطه ثابت، مجموعه ثابت، نگاشت‌های مجموعه مقدار مجموعه انقباضی مجموعه‌ی خود- متشابه، نگاشت‌های غیرانبساطی، قضیه‌ی نقطه ثابت کراسنوسلسکی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مجموعه‌های ثابت از خود-نگاشت‌ها در شاخه‌های مختلفی از آنالیز ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای نمونه، در هندسه‌ی فرکتال یک مجموعه‌ی خود-متشابه به‌صورت یک مجموعه‌ی فشرده ثابت، تحت اجتماع متناهی از انقباض‌ها تعریف می‌شود. مثال دیگر، در نظریه‌ی بازی‌ها بیان شده است. در حالی‌که یک تعادل نش از صورت نرمال بازی به‌صورت یک نقطه‌ی ثابت از یک خود-نگاشت مجموعه مقدار خاص (نگاشت مجموعه مقدار نش) مشخص می‌شود، مجموعه‌ای از برآمدهای نقطه‌ی گویا شده به‌صورت یک مجموعه‌ی حاصلضرب ثابت ماکزیمال از این نگاشت مجموعه مقدار است.

در سال ۲۰۰۴ اک [1]در [۱۴] به بیان نظریه‌ی مجموعه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه مقدار پرداخت و به عنوان کاربردی از آن وجود مجموعه‌های خود-متشابه و وجود برآمدهای نقطه‌ی گویا شده در بازی‌ها را مطرح کرد. پس از آن در سال ۲۰۰۹ در [۱۵] به فرمولبندی قضیه‌ی نقطه ثابت کراسنوسلسکی [2] وقتی شرط تحدب زیرمجموعه‌ی S از فضای باناخ X حذف شود، پرداخت.

هدف اصلی این پایان‌نامه، بیان نظریه‌ی مجموعه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه مقدار و بیان کاربردهایی از این نظریه می‌باشد. به دلیل فقدان ساختار محدب طبیعی بر مجموعه‌ای از مجموعه‌ها این نظریه بهتر است در طول نظریه‌ی ترتیب یا نظریه‌ی نقطه

[1] Ok

[2] Krasnoselskii

ثابت متریک گسترش یابد.

این پایان نامه در پنج فصل تنظیم شده است.

فصل اول مربوط به مفاهیم ساده و بکار گرفته شده در فصل‌های بعد می‌باشد.

در فصل دوم دیدگاه نظریه‌ی ترتیب را شرح می‌دهیم؛ یعنی، نشان می‌دهیم که چگونه قضایای نقطه ثابت در نظریه‌ی ترتیب می‌تواند در مطالعه‌ی وجود مجموعه‌های ثابت برای خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار استفاده شود.

در فصل سوم خاصیت مجموعه ثابت و تقریباً-ثابت را بیان می‌کنیم و یک مشخص‌سازی از فضاهای فشرده به‌دست می‌آوریم. با مشاهده این‌که هر فضای متریک کامل دارای خاصیت مجموعه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه انقباضی است، یک مشخص‌سازی از فضاهای متریک کامل بیان می‌کنیم، و رفتار دنباله‌ای از مجموعه‌های ثابت یک دنباله از نگاشت‌های مجموعه مقدار بسته را بررسی خواهیم کرد.

در فصل چهارم دو کاربرد از نظریه‌ی مجموعه ثابت بیان می‌کنیم.

در فصل آخر دو روش برای فرمولبندی قضیه‌ی نقطه ثابت کراسنوسلسکی را وقتی شرط تحدب زیرمجموعه‌ی S از فضای باناخ X حذف شود، بیان می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و قراردادها

در این فصل مفاهیم ساده و قضایایی که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد، بدون اثبات آورده شده است. لازم به ذکر است که در این فصل از منابع [۱]، [۲]، [۵]، [۷]، [۸]، [۱۱] و [۱۳] استفاده شده است.

قرارداد: در این پایان‌نامه، برای هر فضای توپولوژیکی X، $\mathbf{c}(X)$ بیانگر مجموعه تمام زیرمجموعه‌های بسته غیرتهی X و $\mathbf{k}(X)$ بیانگر مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فشرده غیرتهی X می‌باشد. اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، $\mathbf{b}(X)$ $(\mathbf{cb}(X))$ را مجموعه تمام زیرمجموعه‌های کراندار غیرتهی (بسته و کراندار غیرتهی) از X در نظر می‌گیریم. هم‌چنین $\mathbb{N}$ را اعداد طبیعی، $\mathbb{R}$ را اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم و $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

توجه <u>۱</u>: فرض کنید P مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد. برای هر $x,y \in P$، $x \vee y$ و $x \wedge y$ به ترتیب بیانگر $\sup\{x,y\}$ و $\inf\{x,y\}$ است. هم‌چنین برای هر زیرمجموعه‌ی S از P، $\bigvee S$ و $\bigwedge S$ به ترتیب بیانگر $\sup S$ و $\inf S$ می‌باشند.

توجه <u>۲</u>: در این پایان‌نامه، برای هر گردایه‌ی غیرتهی $\mathscr{A}$ از زیرمجموعه‌های X، $\bigcap \mathscr{A}$ بیانگر $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ و $\bigcup \mathscr{A}$ بیانگر $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ می‌باشد.

تعریف ۱.۰.۰.۱. *فرض کنید $(P,\leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد.*

(*i*) *اگر $x\vee y$ و $x\wedge y$ برای هر $x,y\in P$ وجود داشته باشد، آن‌گاه P یک شبکه است.*

(*ii*) *اگر $\bigvee S$ و $\bigwedge S$ برای هر $S\subseteq P$ وجود داشته باشد، آن‌گاه P یک شبکه کامل نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۰.۰.۱. *مجموعه‌ی جزئاً مرتب P را نیم شبکه پایینی گوییم هرگاه $x\wedge y$ برای هر $x,y\in P$ وجود داشته باشد.*

لم ۳.۰.۰.۱. *فرض کنید P مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد به‌طوری‌که $\bigwedge S$ در P برای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی S از P وجود داشته باشد. در این صورت $\bigvee S$ در P برای هر زیرمجموعه‌ی S از P که دارای کران بالا در P است، وجود دارد. در حقیقت*

$$\bigvee S=\bigwedge\{x\in P:\forall s\in S\quad s\leq x\}$$

اثبات. به [۲] رجوع کنید. □

تعریف ۴.۰.۰.۱. *فرض کنید X,Y مجموعه‌هایی غیرتهی باشند. یک نگاشت مجموعه مقدار از X به Y تابعی است که X را به‌توی $2^Y\backslash\{\emptyset\}$ می‌نگارد. چنین نگاشتی را با $\Gamma:X\rightrightarrows Y$ نشان می‌دهیم و برای هر زیرمجموعه‌ی S از X می‌نویسیم*

$$\Gamma(S)=\bigcup\{\Gamma(x):x\in S\}$$

اگر $X=Y$ باشد، Γ خود-نگاشتی مجموعه مقدار بر X است. هر تابعی در X^X یک خود-نگاشت است.(ما خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار تک مقداری و خود-نگاشت‌ها را یکسان می‌گیریم.) هر عنصر $x\in X$ به‌طوری‌که $x\in\Gamma(x)$ نقطه ثابت Γ نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۰.۵. *فرض کنید X فضایی توپولوژیکی و $\Gamma : X \rightrightarrows X$ نگاشتی مجموعه مقدار باشد. گوییم Γ دارای گراف بسته است، هرگاه $Gr(\Gamma) := \{(x,y) : y \in \Gamma(x)\}$ زیرمجموعه‌ای بسته از X^2 باشد.*

Γ نیم پیوسته بالایی است، اگر برای هر x و هر مجموعه‌ی باز O که شامل $\Gamma(x)$ است همسایگی باز U از x به‌طوری‌که $\Gamma(U) \subseteq O$ وجود داشته باشد.

Γ نیم پیوسته پایینی است، اگر برای هر x و هر مجموعه‌ی باز O که $\Gamma(x) \cap O \neq \emptyset$ است همسایگی باز U از x به‌طوری‌که برای هر $t \in U$، $\Gamma(t) \cap O \neq \emptyset$ وجود داشته باشد.

Γ پیوسته است، هرگاه نیم پیوسته بالایی و نیم پیوسته پایینی باشد.

نگاشت مجموعه مقدار Γ بسته (همبند) است، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی بسته (همبند) S از X، $\Gamma(S)$ بسته (همبند) باشد. Γ بسته مقدار است، هرگاه $\Gamma(x)$ زیرمجموعه‌ای بسته از X باشد.

لم ۱.۰.۶. *برای نگاشت مجموعه مقدار $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ بین فضاهای توپولوژیکی شرایط زیر معادل‌اند:*

(*i*) *Γ نیم پیوسته بالایی است.*

(*ii*) *$\{x \in X : \Gamma(x) \subset V\}$ باز است، برای هر زیرمجموعه‌ی باز V از Y.*

(*iii*) *$\{x \in X : \Gamma(x) \cap F \neq \emptyset\}$ بسته است، برای هر زیرمجموعه‌ی بسته F از Y.*

اثبات. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰.۷. *تصویر یک مجموعه‌ی فشرده تحت یک نگاشت مجموعه مقدار نیم پیوسته بالایی و فشرده- مقدار، فشرده است.*

اثبات. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۸.۰.۱. *برای نگاشت مجموعه مقدار $\varphi : X \rightrightarrows Y$ بین فضاهای توپولوژیکی گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

(i) *نگاشت مجموعه مقدار φ در نقطه‌ی x نیم پیوسته پایینی است.*

(ii) *اگر $x_\alpha \longrightarrow x$، آن‌گاه برای هر $y \in \varphi(x)$، زیرتور $\{x_{\alpha_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ از تور $\{x_\alpha\}$ و تور $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در Y وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in \Lambda$، $y_\lambda \in \varphi(x_{\alpha_\lambda})$ و $y_\lambda \longrightarrow y$.*

اثبات. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۹.۰.۱. *فرض کنید X یک فضای متریک کامل و $T : X \longrightarrow X$ در شرط*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \psi(\rho(x, y)) \quad \text{برای هر} \quad x, y \in X$$

صدق کند، که در آن $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, \infty)$ نیم پیوسته بالایی از راست (یعنی، هرگاه $r_n \downarrow r \geq 0$، آن‌گاه $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \psi(r_n) \leq \psi(r)$) و برای هر $t > 0$، $\psi(t) < t$. در این صورت T دارای نقطه ثابت یکتای x_0 است و $T^n(x) \longrightarrow x_0$ برای هر $x \in X$.

اثبات. به [۸] رجوع کنید. □

تعریف ۱۰.۰.۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. در این صورت متریک هاسدورف روی $\mathbf{cb}(X)$ به‌صورت*

$$d^H(A, B) = \max\Big\{ \sup_{x\in A} d(x, B)\ ,\ \sup_{y\in B} d(y, A) \Big\}$$

تعریف می‌شود، که در آن $A, B \in \mathbf{cb}(X)$ و $d(x, B) = \inf_{y\in B} d(x, y)$.

تعریف ۱۱.۰.۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. خود-نگاشت مجموعه مقدار Γ بر X را انقباضی گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$، $\Gamma(x) \in \mathbf{cb}(X)$ و عدد حقیقی $0 \leq k < 1$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم*

$$d^H(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq k d(x, y)$$

k ثابت انقباض Γ نامیده می‌شود. اگر $k = 1$ باشد، آن‌گاه خود- نگاشت مجموعه مقدار Γ را غیرانبساطی گوییم.

قضیه ۱.۰.۱۲. (قضیه نادلر[۱]) هر نگاشت مجموعه مقدار انقباضی، که بر روی یک فضای متریک کامل تعریف شده باشد، دارای نقطه ثابت است.

اثبات. به [۱] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱.۰.۱۳. فرض کنید X یک فضای متریک، $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های بسته غیرتهی X و $\mathcal{F}_d$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و d- کراندار غیرتهی از X باشد. در این صورت

$$(X, d) \text{کراندار کلی است} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{F}, \tau_h) \quad \text{کراندار کلی باشد}$$

$$(X, d) \text{کامل است} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{F}_d, \tau_h) \quad \text{کامل باشد}$$

$$(X, d) \text{فشرده است} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{F}, \tau_h) \quad \text{فشرده باشد}$$

که در آن τ_h توپولوژی متریک هاسدورف بر $\mathcal{F}$ است.

اثبات. به [۱] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱.۰.۱۴. برای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی A از مجموعه‌ی X، تعریف می‌کنیم

$$A^u = \{B \in 2^X \backslash \{\emptyset\} : B \subset A\} \quad \text{و} \quad A^l = \{B \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\}$$

اگر $A = \emptyset$، آن‌گاه $A^u = A^l = \emptyset$.

به‌وضوح برای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی A، $A^u = 2^A \backslash \{\emptyset\} \subset A^l$. هم‌چنین توجه کنید که برای تمام زیرمجموعه‌های A و B از X داریم

$$A^u \cap B^u = (A \cap B)^u \quad \text{و} \quad (A \cap B)^l \subset A^l \cap B^l$$

[۱] Nadler

تعریف ۱.۰.۱۵. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. گردایه‌ای از مجموعه‌ها به شکل*

$$G_0^u \cap G_1^l \cap \cdots \cap G_n^l$$

که در آن $G_0, G_1, \ldots, G_n$ زیرمجموعه‌های باز X هستند، تشکیل یک پایه برای توپولوژی بر مجموعه توانی X می‌دهند. این توپولوژی، توپولوژی نمایی یا توپولوژی ویتوریس [۲] نامیده می‌شود و با τ_V نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۰.۱۶. *توپولوژی که دارای پایه‌ی داده شده توسط مجموعه‌هایی به شکل*

$$(K^c)^u \cap G_1^l \cap \cdots \cap G_n^l$$

که در آن K فشرده و $G_1, \ldots, G_n$ زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیکی X هستند توپولوژی فل [۳] نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۰.۱۷. *فرض کنید X فضایی متریک‌پذیر باشد. در این صورت توپولوژی ویتوریس و توپولوژی متریک هاسدورف بر $\mathbf{k}(X)$ معادل‌اند.*

اثبات. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰.۱۸. *اگر X یک فضای متریک فشرده باشد، آن‌گاه توپولوژی فل با توپولوژی متریک هاسدورف بر $\mathbf{k}(X)$ معادل است.*

اثبات. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰.۱۹. *فرض کنید X فضایی توپولوژیکی باشد. X فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرگردایه از مجموعه‌های بسته X مانند $\mathscr{C}$ که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند مقطع همه اعضای $\mathscr{C}$؛ یعنی، $\bigcap_{c\in\mathscr{C}} c$ ناتهی است.*

---

[۲] Vietoris

[۳] Fell

اثبات. به [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰۰.۲۰. *اگر X یک فضای هاسدورف فشرده و $\mathscr{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و همبند X باشد، آن‌گاه $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ همبند است.*

اثبات. به [۱۳] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰۰.۲۱. *(قضیه آسکولی[۴]) فرض کنید X یک فضای دلخواه و (Y,d) یک فضای متریک باشد. فرض کنید $\mathscr{F} \subseteq \mathbf{c}(X,Y)$ در شرایط زیر صدق کند:*

(*i*) *$\mathscr{F}$ بر X همپیوسته است.*

(*ii*) *$\{f(x) : f \in \mathscr{F}\}$ برای هر $x \in X$ فشرده نسبی است.*

در این صورت $\overline{\mathscr{F}}$ (بستار $\mathscr{F}$) فشرده است.

$\mathbf{c}(X,Y)$ بیانگر فضای تمام توابع پیوسته از X به‌توی Y است.

اگر X موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه عکس قضیه‌ی فوق برقرار است.

اثبات. به [۵] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۰۰.۲۲. *دو فضای توپولوژی X و Y را همانریخت گویند، هرگاه تابعی دوسویی مانند $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که f پیوسته و وارون پیوسته داشته باشد. تابع f را همانریختی نامند.*

$$f^{-1} \text{ پیوسته است } \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ بسته باشد}$$

تعریف ۱.۰۰.۲۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی و Y زیرفضایی از X باشد. اگر تابع پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $f(y) = y$ برای هر $y \in Y$ آن‌گاه گوییم Y یک درون‌بر X است، و تابع f یک درون‌بری از X بروی Y می‌باشد.*

---

[۴] Askoli

تعریف ۱.۰.۲۴. فضای باناخ X را به‌طور یکنواخت محدب گوییم اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon \in (0,2]$، $\delta(\epsilon) \in (0,1]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هرگاه $\|x\| \leq 1$، $\|y\| \leq 1$ و برای هر $x,y \in X$، $\|x-y\| \geq \epsilon$ باشد، آن‌گاه

$$\Big\|\frac{(x+y)}{2}\Big\| \leq 1-\delta(\epsilon)$$

تعریف ۱.۰.۲۵. فرض کنید C یک زیرمجموعه‌ی محدب بسته از یک فضای باناخ یکنواخت محدب و $\{u_i\}$ یک دنباله‌ی کراندار در C باشد. یک مرکز مجانبی x از $\{u_i\}$ در C نقطه‌ی یکتایی در C است، به‌طوری‌که

$$\limsup_i \|x-u_i\| = \inf\{\limsup_i \|y-u_i\| : y \in C\}$$

عدد $r = \inf\{\limsup_i \|y-u_i\| : y \in C\}$ شعاع مجانبی $\{u_i\}$ در C است.

تعریف ۱.۰.۲۶. فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرمدار باشند. در این صورت نگاشت $F : X \longrightarrow Y$ فشرده است، هرگاه $\overline{F(X)}$ (بستار $F(X)$) فشرده باشد.

تعریف ۱.۰.۲۷. فرض کنید $f,g,h : X \longrightarrow Y$ نگاشت‌هایی بین فضاهای باناخ Y,X باشند. f یک اختلال فشرده از نگاشت g نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر $g = f-h$. که در آن h نگاشتی فشرده است.

تعریف ۱.۰.۲۸. مجموعه‌ی غیرتهی A از فضای خطی (برداری) حقیقی X را ستاره‌گون گوییم، اگر $x_0 \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$ پاره خط از x_0 به x در A باشد؛ یعنی، $[x_0,x] \subseteq A$ برای هر $x \in A$.

تعریف ۱.۰.۲۹. یک عدد ترتیبی به‌صورت یک مجموعه‌ی خوشترتیب α تعریف می‌شود، به‌طوری‌که برای هر ξ در α، $\xi = \{\eta \in \alpha : \eta < \xi\}$.

تعریف ۱.۰.۰.۳۰. *فرض کنید* Γ *یک عدد ترتیبی باشد. اگر* $\alpha \in \Gamma$ *و* $\{x \in \Gamma : \alpha < x\}$ *غیرتهی باشد، آن‌گاه دارای کوچکترین عضو است که آن را تالی* α *گوییم و با* $\alpha + 1$ *نشان می‌دهیم. عنصر غیرصفری از* Γ *که تالی نباشد، حد ترتیبی نامیده می‌شود.*

قضیه ۱.۰.۰.۳۱. *اگر* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Omega} \subseteq \mathbb{R}$ *کراندار و غیرصعودی یا غیرنزولی باشد، آن‌گاه وجود دارد* β *به‌طوری‌که برای هر* $\alpha \geq \beta$، $x_\alpha = x_\beta$.
Ω *بیانگر نخستین عدد ترتیبی ناشمارا می‌باشد.*

اثبات. به [۷] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰.۰.۳۲. *(اصل استقرای ترامتناهی) فرض کنید* $(A, \leq)$ *مجموعه‌ای خوشترتیب و برای هر* $x \in A$، $P(x)$ *گزاره‌ای درباره* x *باشد. اگر برای هر* $x \in A$، $P(y)$ *که برای هر* $y < x$ *برقرار است، نتیجه دهد که* $P(x)$ *برقرار است، آن‌گاه برای هر* $x \in A$، $P(x)$ *برقرار است.*

اثبات. به [۱۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۰.۰.۳۳. *(قضیه تیخونف[۵]) فرض کنید* $\{Y_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ *خانواده‌ای از فضاها باشد. در این صورت* $\prod_\alpha Y_\alpha$ *فشرده است، اگر و فقط اگر هر* Y_α *فشرده باشد.*

اثبات. به [۵] رجوع کنید. □

[۵] Tychonoff

فصل ۲

قضایای مجموعه ثابت در نظریه‌ی ترتیب

در این فصل با استفاده از [۱۴] ابتدا مشاهده می‌کنیم، وجود نقطه‌ی ثابت، وجود مجموعه‌ی ثابت غیرتهی را نتیجه می‌دهد. سپس نشان می‌دهیم که چگونه قضایای نقطه ثابت در نظریه‌ی ترتیب می‌تواند در مطالعه‌ی وجود مجموعه‌های ثابت برای انواع معینی از خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار (خانواده‌های تعویض‌پذیر) استفاده شود.

۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

ما با تعریف چند مفهوم اساسی که غالباً در نتایج استفاده خواهد شد، شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. *فرض کنید X, Y, Z مجموعه‌هایی غیرتهی باشند. ترکیب دو نگاشت مجموعه مقدار $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ و $\Upsilon : Y \rightrightarrows Z$ نگاشت مجموعه مقدار $\Upsilon \circ \Gamma : X \rightrightarrows Z$ می‌باشد، که به‌صورت $\Upsilon \circ \Gamma(x) := \Upsilon(\Gamma(x))$ تعریف می‌شود. گوییم Γ و Υ جابجایی‌اند*

هرگاه $\Gamma \circ \Upsilon = \Upsilon \circ \Gamma$ و خانواده‌ی غیرتهی $\mathscr{C}$ از خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار بر X تعویض‌پذیر است، اگر هر دو عضو $\mathscr{C}$ جابجایی باشد. گیریم $\Gamma^1 := \Gamma$ و k-امین تکرار Γ را به‌صورت $\Gamma^k := \Gamma^{k-1} \circ \Gamma$ برای هر $k = 2, 3, \ldots$ تعریف می‌کنیم. به‌وضوح $\{\Gamma^k : k \in \mathbb{N}\}$ خانواده‌ای تعویض‌پذیر است.

هر زیرمجموعه S از X، به‌طوری‌که $S = \Gamma(S)$ باشد، مجموعه ثابت Γ نامیده می‌شود. مجموعه تمام مجموعه‌های ثابت Γ را با $Fix(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathscr{C}$ مجموعه‌ای غیرتهی از خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار بر X باشد، می‌نویسیم $\mathscr{C}(S) = \{\Gamma(S) : \Gamma \in \mathscr{C}\}$. مجموعه تمام مجموعه‌های ثابت مشترک عناصر $\mathscr{C}$ را با $Fix(\mathscr{C})$ نشان می‌دهیم؛ یعنی،

$$Fix(\mathscr{C}) := \bigcap\{Fix(\Gamma) : \Gamma \in \mathscr{C}\}$$

طبق تعریف $\emptyset$ مجموعه‌ای ثابت از هر خود-نگاشت مجموعه مقدار است. در اینجا به بررسی وجود مجموعه ثابت غیرتهی برای انواع مختلفی از خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار خواهیم پرداخت.

به عنوان اولین مسئله، گزاره‌ی زیر را بیان می‌کنیم. این گزاره، پلی بین نظریه‌ی نقطه ثابت و مجموعه‌های ثابت می‌سازد.

گزاره ۲.۱.۲. *فرض کنید X مجموعه‌ای غیرتهی و $\Gamma : X \rightrightarrows X$ خود-نگاشتی مجموعه مقدار باشد. اگر مجموعه‌ی غیرتهی A در X به‌طوری‌که $A \subseteq \Gamma(A)$ وجود داشته باشد آن‌گاه $Fix(\Gamma) \neq \{\emptyset\}$. بنابراین اگر Γ نقطه ثابت داشته باشد، آن‌گاه Γ دارای مجموعه ثابت غیرتهی است.*

اثبات. طبق فرض

$$\mathscr{A} := \{A \in 2^X \backslash \{\emptyset\} : A \subseteq \Gamma(A)\} \neq \{\emptyset\}$$

بنابراین $S := \bigcup \mathscr{A} \neq \emptyset$ و $S \subseteq \Gamma(S)$ زیرا

$$\Gamma(S) = \Gamma(\bigcup \mathscr{A}) = \bigcup\{\Gamma(A) : A \in \mathscr{A}\}$$

و چون برای هر $A \in \mathscr{A}$، داریم $A \subseteq \Gamma(A)$ بنابراین $S \subseteq \Gamma(S)$.

ادعا می‌کنیم S مجموعه ثابت غیرتهی Γ است. فرض کنیم $x \in \Gamma(S)\backslash S$ باشد، $S\cup\{x\}$ را در نظر می‌گیریم. $S \supseteq \{x\} \cup S \neq \emptyset$ و $\Gamma(S\cup\{x\}) \supseteq \Gamma(S) = \Gamma(S)\cup\{x\} \supseteq S\cup\{x\}$ بنابراین $S \cup \{x\} \in \mathscr{A}$، در نتیجه $S \cup \{x\} \subseteq S$ یک تناقض است. پس $\Gamma(S) \subseteq S$. در نتیجه، S مجموعه ثابت Γ می‌باشد.

حال اگر Γ نقطه ثابت داشته باشد، پس نقطه‌ی $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in \Gamma(x)$. می‌دانیم $\{x\} \subseteq X$ و از این‌که $x \in \Gamma(x)$ داریم، $\{x\} \subseteq \Gamma(\{x\})$، در نتیجه طبق قسمت اول، Γ دارای مجموعه ثابت غیرتهی است. □

حال نشان می‌دهیم که وجود مجموعه ثابت غیرتهی برای یک خود-نگاشت مجموعه مقدار، لزوماً وجود نقطه ثابت را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۳.۱.۲. *خود-نگاشت $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ را به‌صورت*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

در نظر بگیرید. این نگاشت فاقد نقطه ثابت است، در حالی‌که $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$.

تذکر ۴.۱.۲. *هر خود-نگاشت مجموعه مقدار Γ بر یک مجموعه‌ی متناهی غیرتهی X دارای مجموعه ثابت غیرتهی است. (در حقیقت $\Gamma^{|X|-1}(X)$ چنین مجموعه‌ای است.)*

فرض کنیم $|X| = n$ باشد. اگر $\Gamma(X) = X$، آن‌گاه مسئله حل است. در غیر این صورت، فرض کنیم $\Gamma(X) \subsetneqq X$. در نتیجه

$$|\Gamma(X)| \leq n - 1$$

اگر $\Gamma(X) = \Gamma(\Gamma(X))$، آن‌گاه مسئله حل است. در غیر این صورت، فرض کنیم $\Gamma^2(X) \subsetneqq \Gamma(X)$. پس

$$| \Gamma^2(X) | \leq n - 2$$

با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت

$$| \Gamma^{n-1}(X) | \leq 1$$

چون X غیرتهی است، داریم

$$| \Gamma^{n-1}(X) | = 1$$

فرض کنیم $\Gamma^{n-1}(X) = \{a\}$. از طرفی از رابطه‌ی $\Gamma(X) \subseteq X$ نتیجه می‌گیریم که

$$\Gamma^n(X) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(X)) \subseteq \Gamma^{n-1}(X)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\Gamma(\Gamma^{n-1}(X)) = \{a\} = \Gamma^{n-1}(X)$$

بنابراین Γ دارای مجموعه ثابت $\Gamma^{n-1}(X)$ می‌باشد.

اگر X نامتناهی باشد، مسئله‌ی وجود مجموعه ثابت بدیهی نیست. یک نگرش طبیعی این مسئله این است که یک خود-نگاشت مجموعه مقدار را به‌صورت یک خود-نگاشت بر مجموعه‌ی مناسبی از مجموعه‌ها در نظر بگیریم و سپس نقاط ثابت این نگاشت را بررسی کنیم. به علت فقدان ساختار محدب طبیعی بر مجموعه‌ای از مجموعه‌ها این نگرش بهتر است در نظریه‌ی ترتیب یا نظریه‌ی نقطه ثابت متریک مورد استفاده قرار گیرد.

ما در بخش زیر نشان می‌دهیم که چگونه قضایای نقطه ثابت در نظریه‌ی ترتیب می‌تواند در مطالعه‌ی وجود مجموعه‌های ثابت برای انواع معینی از خود-نگاشت‌های مجموعه مقدار (خانواده‌های تعویض‌پذیر) استفاده شود.

۲.۲ مجموعه‌های ثابت از $\mathscr{P}_X$ - نگاشت‌های مجموعه مقدار

تعریف ۱.۲.۲. *مجموعه‌ی جزئاً مرتب P را بالایی گوییم، هرگاه دارای بزرگترین عنصر باشد. اگر P بالایی و $\wedge L$ برای هر مجموعه‌ی مرتب خطی L در P وجود داشته باشد آن‌گاه P را یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب کامل گوییم.*
نگاشت $f \in P^P$ را ایزوتون گوییم، هرگاه برای هر $p, q \in P$ به‌طوری‌که $p \succeq q$ داشته باشیم

$$f(p) \succcurlyeq f(q)$$

که $\succeq$ ترتیب جزئی بر P است.
اگر P مجموعه‌ای جزئاً مرتب کامل و $f \in P^P$ نگاشتی ایزوتون باشد به‌طوری‌که برای هر مجموعه‌ی مرتب خطی L در P، $f(\wedge L) = \bigwedge\{f(l) : l \in L\}$، آن‌گاه f را پیوسته مرتب گوییم.

قضایای نقطه ثابت زیر برای مطالعه‌ی مجموعه‌های ثابت استفاده می‌شوند:

قضیه ۲.۲.۲. (i) *اگر P مجموعه‌ای جزئاً مرتب کامل و $\mathscr{F}$ خانواده‌ای تعویض‌پذیر از نگاشت‌های ایزوتون در P^P باشد، آن‌گاه عنصر مینیمال $p \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که $p = f(p)$ برای هر $f \in \mathscr{F}$.*

اثبات. به [۳] رجوع کنید. $\square$

(ii) *اگر P مجموعه‌ای جزئاً مرتب کامل با بزرگترین عنصر l و $f \in P^P$ ایزوتون باشد آن‌گاه f دارای بزرگترین نقطه ثابت است. اگر f پیوسته مرتب باشد، آن‌گاه بزرگترین نقطه ثابت f برابر است با $\bigwedge_{n\geq 1} f^n(l)$.*