دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان

توابع اسپلاین با درجه متغیر و منحنی‌های متناظر

تدوین

فهیمه قرهی قهی

استاد راهنما

دکتر شهنام جوادی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر فداکارم

همسر عزیزم

و استاد گرامی

جناب آقای دکتر جوادی

بی شک انجام این پایان نامه مرهون زحمات افراد بسیاری است که در اینجا لازم می‌دانم از ایشان تشکر کنم.

در ابتدا از جناب آقای دکتر جوادی که زحمت زیادی برای به ثمر رسیدن این پایان نامه کشیده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از پدر و مادر عزیزم که با همراهی و حمایت خود مشکلات را برایم هموار نمودند، بسیار سپاسگذارم.

بی شک اگر زحمات و همراهی بی‌وقفه همسر عزیزم نبود، قادر به تدوین این پایان نامه نبودم. ایشان در تمام زمینه‌ها خصوصاً طراحی نرم‌افزار **CD – Spline curve** نقش قابل توجهی داشتند.

چکیده

توابع پایه B – اسپلاین چندجمله‌ای‌های تکه‌ای از درجه مساوی،هستند. در این پایان‌نامه نوعی از توابع اسپلاین را معرفی می‌کنیم به طوری که این توابع چندجمله‌ای تکه‌ای، درجات متغیر دارند.(که به اختصار این توابع را توابع CD – اسپلاین می‌نامیم.)

بسیاری از خصوصیات توابع CD – اسپلاین شبیه خصوصیات توابع B – اسپلاین است و توابع B – اسپلاین زیرحالتی از توابع CD – اسپلاین می‌باشند. یکی از کاربردهای توابع B – اسپلاین رسم منحنی‌هایی است که از قطعات منحنی‌های چندجمله‌ای تشکیل شده‌اند. به این منحنی، منحنی B – اسپلاین گفته می‌شود. منحنی پارامتری متناظر توابع CD - اسپلاین، که منحنی‌های CD – اسپلاین نامیده می‌شوند، نیز شبیه منحنی‌های B – اسپلاین هستند و خواص مفید زیادی دارند. اگر برای ایجاد یک منحنی، که از قسمت‌هایی با درجات متفاوت تشکیل شده است، از توابع CD – اسپلاین استفاده کنیم،می‌توانیم تعداد نقاط کنترل را کاهش دهیم.

واژه‌های کلیدی: توابع پایه B – اسپلاین، منحنی B – اسپلاین، پایه نرمال‌شده، تابع چند جمله‌ای تکه‌ای، منحنی چند جمله‌ای تکه‌ای، ماتریس کلاً مثبت، توابع پایه CD – اسپلاین.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: ۶۵D۰۷ ، ۱۴HXX .

پیشگفتار

توابع B – اسپلاین در گرافیک کامپیوتری کاربرد وسیعی دارند. این توابع برای رسم منحنی‌های پیچیده مفید هستند. به این صورت که منحنی موردنظر را به قطعات منحنی چندجمله‌ای تقسیم می‌کنند؛ درجه چندجمله‌ای مربوط به هر قطعه را مشخص می‌کنند و بزرگترین درجه (به عنوان مثال m) را به عنوان درجه توابع B – اسپلاین در نظر می‌گیرند. در این مرحله باید برای هر قطعه منحنی ۱ + m نقطه کنترل مناسب پیدا کنند و به کمک منحنی‌های B – اسپلاین، منحنی مورد نظر را رسم می‌کنند. (فرمول‌ها و قضایای مربوط به این مبحث، به همراه تعدادی مثال در فصل اول گنجانده شده‌است.)

در مرجع [۱۴] چندجمله‌ای‌های پایه با درجه متغیر ساخته شده است. در روش مطرح شده در این مقاله، برای رسم هر قطعه منحنی به چهار نقطه کنترل نیاز داریم.

در منبع [۳]، توابع اسپلاین با درجه چندگانه (MD – اسپلاین) ساخته شده‌اند.درجه این توابع می‌تواند ۱ ، ۲ یا ۳ باشد. در مقاله [۱۵] نوعی از توابع اسپلاین دو درجه‌ای ساخته‌شد.

در این پایان‌نامه، نوعی از توابع اسپلاین را معرفی می‌کنیم که درجه متغیر دارند و آن‌ها را توابع CD – اسپلاین می‌نامیم. توابع CD – اسپلاین برای هر قطعه منحنی از درجه k تابعی با درجه k می‌سازند. بنابراین، این توابع تعداد نقاط کنترل مورد نیاز را کاهش می‌دهند.

مرجع اصلی در این پایان‌نامه، مقاله "Changeable Degree Spline basis functions"اثر W.ShenوG.Wang است که در مجله Computational and Applied Mathematics چاپ شده است. در تدوین فصل دوم و سوم از این مقاله استفاده شده است.

فصل چهارم ویژگیِ کاهش تغییرات منحنی‌های CD – اسپلاین را مطرح می‌کند که ایده اولیه اثبات آن از منبع [۵] گرفته شده است.همچنین ویژگی B – پایه بودن توابع CD – اسپلاین را ثابت می‌کند که برای اثبات آن از مراجع [۶] و [۱۶] کمک گرفته شده است.

در فصل پنجم نیز علاوه بر مثال‌هایی که در مقاله [۱] بود تعدادی مثال جدید نیز، به کمک برنامه‌ای که با نرم افزار Matlab نوشته‌ایم، به صورت کامل حل شده‌است.

فهرست

فصل اول

مقدماتی بر توابع و منحنی‌های B - اسپلاین

تاریخچه

قبل از دهه ۱۹۵۰ طراحی اشکال هموار بسیار خسته‌کننده بود. ساختن محیط یک شکل با نوار آلومینیوم، الگوهای زمخت با مقیاس واقعی و یک جدول زمان بندی کار، چیزی بود که می‌توانست بیشتر کارخانه‌های مدرن را ویران کند.

در سال ۱۹۵۹ کارمندی در کارخانه اتومبیل‌سازی سیتروئن[۱] به نام "دی کاستل ژو"[۲] فکر ساده‌ای مبنی بر تکرار کردن ترکیبات محدب شبکه‌های چندضلعی به ذهنش رسید که این روش سطوح هموار مناسب را برای مدل‌سازی شاسی اتومبیل به دست می‌داد. (این روش در ضمیمه ۱ توصیف شده است.)

تقریباً به طور همزمان "پیِر بزیِر"[۳]، کارمند کارخانه پژو بر روی قطعات سیلندر، برای به دست آوردن هدفی مشابه، کار می‌کرد.(روش بزیِر را در بخش بعد توضیح می‌دهیم.)

هر دو نسخه، که منحنی‌های برابر ایجاد می‌کردند، اکنون به عنوان منحنی بزیِر شناخته می‌شوند، چرا که "پیِر بزیِر" اولین شخصی بود که مبادرت به نوشتن مقاله‌ای درباره‌ی این موضوع ورزید.

برای مشخص کردن منحنی‌های هموار، در گرافیک کامپیوتری و همچنین در ریاضیات، از فرمول $C(t) = \sum_i f_i(t) p_i$ استفاده می‌کنیم؛ به طوری که $\{p_i\}_i$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است و توابع $f_i(t)$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

---

۱ Citroen

۲ paul de faget de casteljou

۳ Pierre Bezier

- $f_i(t) \geq ۰ , -\infty \leq \mathrm{i} \leq \infty$;
- $\sum_i f_i(t) = ۱$.

منحنی‌های بزیر یک روش معمول برای نمایش منحنی‌ها است که در آن توابع $f_i(t)$ توابع برنشتاین[۴] هستند.

یک منحنی B - اسپلاین نسخه بسط یافته‌ای از منحنی بزیر، شامل قطعاتی می‌باشد که هر یک می‌توانند به صورت جداگانه به عنوان یک منحنی بزیر در نظر گرفته شوند.

همچنین منحنی‌های CD - اسپلاین بسطی از منحنی B- اسپلاین هستند؛ که در این پایان نامه به بررسی آن می‌پردازیم.

۱-۱- منحنی‌های بزیر

۱-۱-۱- توابع بزیر

یک منحنی بزیر به وسیله توابع بزیر از درجه n و تعداد n+۱ نقطه کنترل به دست می‌آید. به عنوان مثال یک منحنی بزیر از درجه ۳، چهار نقطه کنترل دارد که برای قرار دادن منحنی در مختصات مطلوب و اصلاح شکل منحنی به کار می‌روند.

در اکثر مواقع از توابع برنشتاین به عنوان توابع بزیر استفاده می‌کنیم. تابع برنشتاین از درجه n به صورت زیر معرفی می‌شود.($۰ \leq t \leq ۱$)

$$\mathrm{B}_{\mathrm{i,n}}(\mathrm{t}) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}}\mathrm{t}^{\mathrm{i}}(۱-\mathrm{t})^{\mathrm{n-i}} \quad ; \qquad (۱.۱)$$

۱-۱-۲- منحنی بزیر

پس از معرفی توابع بزیر می‌توانیم منحنی بزیر از درجه n را تعریف کنیم:

$$\mathrm{C}(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{i}=۰}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i}\, \mathrm{B}_{\mathrm{i,n}}(\mathrm{t}) \qquad (۲.۱)$$

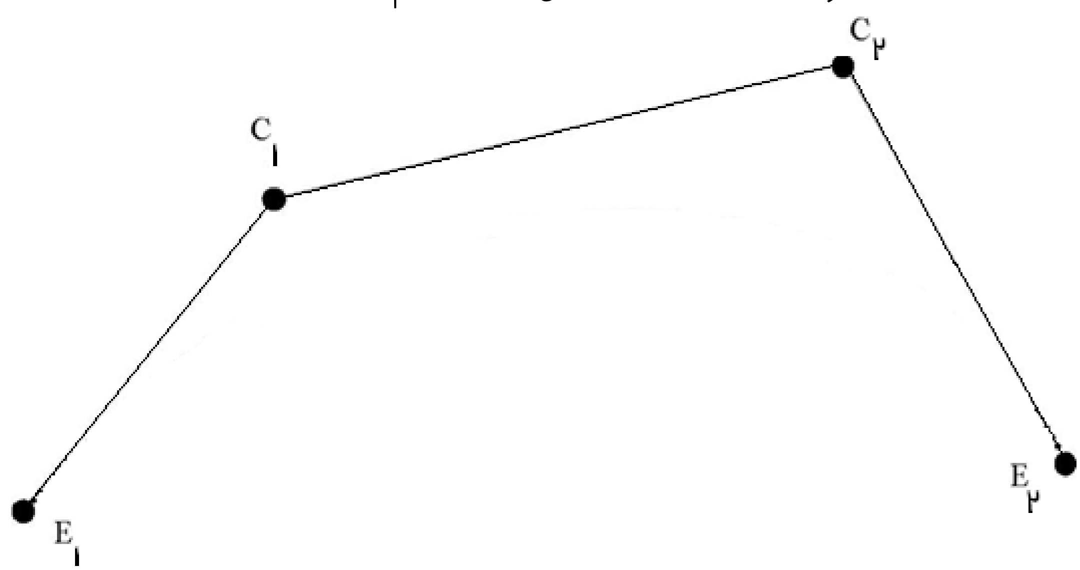
---

[۴] Bernstein

که در اینجا به نقاط p_i ، $i = ۰, \dots, n$ ، نقاط کنترل می‌گوییم و $B_{i,n}(t)$ تابع برنشتاین از درجه n است.

تاکنون تنها نکته‌ای که به آن نپرداخته‌ایم نقاط کنترل هستند.

برای اینکه نقاط کنترل را مشخص کنیم باید نقاط ابتدا و انتهای منحنی و همچنین مشتق منحنی را در این نقاط بدانیم. با توجه به اینکه منحنی‌های بزیر از درجه ۳ نسبت به منحنی‌هایی با درجات دیگر در عین کارا و مفید بودن، محاسباتی ساده‌تر دارند، اغلب از این منحنی‌ها استفاده می‌شود. در اینجا نحوه پیدا کردن نقاط کنترل منحنی‌های بزیر درجه سه را به نقل از [۳] بیان می‌کنیم فرض کنیم دو نقطه انتهایی $E_{۱}$ و $E_{۲}$ و دو نقطه کنترل $C_{۱}$ و $C_{۲}$ را مانند شکل (۱.۱) داریم.



شکل ۱.۱ – نقاط کنترل منحنی بزیر

به کمک فرمول (۲.۱) می‌توانیم یک منحنی هموار درست کنیم که نقاط انتهایی آن $E_{۱}$ و $E_{۲}$ باشد. منحنی ما باید شرط دیگری نیز داشته باشد. شیب خط مماس بر $E_{۱}$ در منحنی باید مانند شیبِ خطِ متصل‌کننده $E_{۱}$ و $C_{۱}$ باشد. در حقیقت دلیل اینکه نقطه $C_{۱}$ یک نقطه کنترل نامیده می‌شود این است که موقعیت $C_{۱}$ نسبت به $E_{۱}$ شیب منحنی را تعیین می‌کند به طوری که منحنی از $E_{۱}$ عبور کند و شروع به خمیدن کند تا به $E_{۲}$ برسد. در حالت کلی نیازی نیست که منحنی از $C_{۱}$ یا $C_{۲}$ و یا حتی از نزدیک آنها عبور کند.

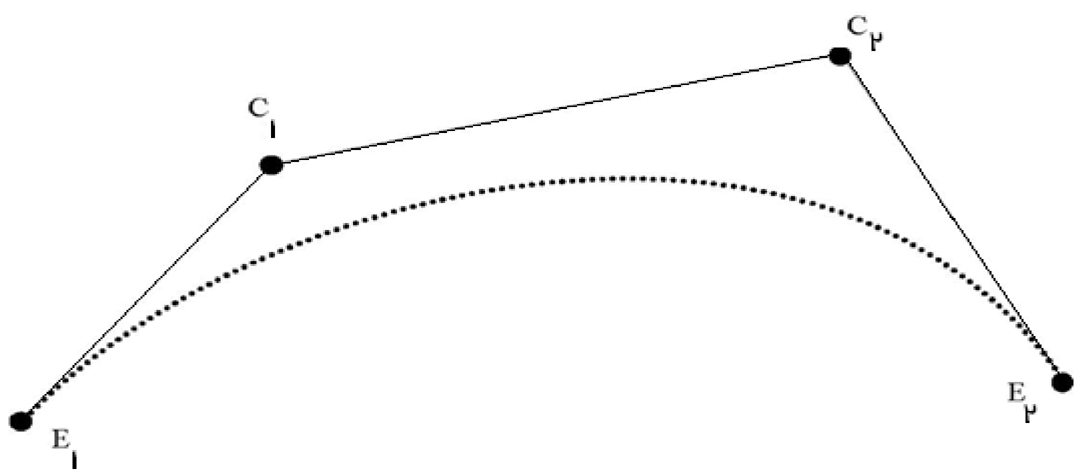
موقعیت $C_{۲}$ نسبت به $E_{۲}$، مانند $C_{۱}$ و $E_{۱}$ است.

نقاط کنترل $C_۱$ و $C_۲$ مستقل از یکدیگر هستند و فقط موقعیت $C_۱$ نسبت به $E_۱$ و همچنین $C_۲$ نسبت به $E_۲$ است که به مشخص شدن شکل منحنی که می‌خواهیم رسم کنیم کمک می‌کند.

البته نقاط کنترل باید در یک خصوصیت صدق کنند. نقاط کنترل باید بر روی پوسته محدب منحنی واقع شوند. بنابراین برای انتخاب $C_۱$ و $C_۲$ باید این شرط در نظر گرفته شود.

خاصیت پوسته محدب یک ویژگی اساسی منحنی بزیر است و می‌توانیم آن‌را به صورت ساده این‌گونه بیان کنیم که منحنی باید به وسیله چندضلعی محدبی که از نقاط کنترل آن عبور می‌کند، احاطه شود.

شکل (۲.۱) یک مثال از یک منحنی است که با نقاط کنترل شکل (۱.۱) ایجاد شده است.



شکل ۲.۱ – منحنی و چندضلعی کنترل بزیر

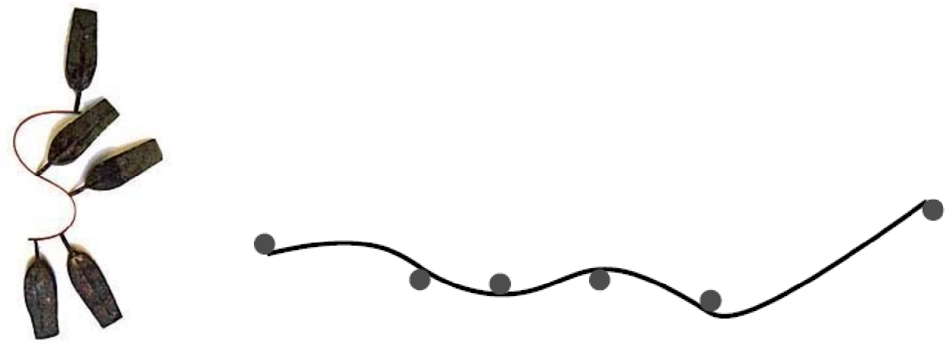
در بخش بعد پس از بررسی منحنی‌های B – اسپلاین، روش دقیق‌تری برای پیدا کردن نقاط کنترل بیان می‌کنیم.

۱-۲- منحنی‌های B - اسپلاین

لغت اسپلاین از صنعت کشتی سازی وارد ریاضیات شد. در اصل "اسپلاین" به نوار باریکی از چوب گفته می‌شود که طراحان به عنوان یک منحنی قابل انعطاف از آن استفاده می‌کنند. وزنه هایی[۵] بر روی

[۵] ducks

سطح طراحی قرار داده می‌شود و اسپلاین در بین این "داک ها" قرار می گیرد .(مانند آنچه در شکل ۳.۱ نشان داده شده است .) و بدین ترتیب منحنی مورد نظر به دست می آید.([۲])



شکل ۳.۱ - اسپلاین (منحنی) و وزنه‌ها (داک)

اکنون در ریاضیات و گرافیک کامپیوتری به نوعی از منحنی‌ها، منحنی B – اسپلاین[۶] می‌گوییم، که برای رسم منحنی‌های پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

منحنی B – اسپلاین دنباله‌ای از منحنی‌ها است که به یکدیگر می‌پیوندند تا یک منحنی پیوسته را تشکیل دهند. مانند دنباله‌ای از منحنی های بزیر که با پیوستن به یکدیگر یک منحنی پیوسته تشکیل می‌دهند با این تفاوت که انتخاب نقاط کنترل و همچنین محاسبات در منحنی B – اسپلاین نسبت به منحنی های بزیر ساده است.

اعداد حقیقی $t_۱ \leq t_۲ \leq \cdots \leq t_m$ را در نظر می‌گیریم که t_i، i امین گره است. به دنباله غیر نزولی $T = \{t_۱, \dots, t_m\}$ یک بردار گره می‌گوییم.

نقاط گره در حقیقت نقاطی هستند که در آنجا دو قطعه منحنی به یکدیگر متصل می‌شوند. همچنین برای رسم منحنی B – اسپلاین باید نقاط کنترل $P_۱, \dots, P_{\wp}$ را تعریف کنیم؛ که $\wp$ تعداد نقاط کنترل است. در این حالت درجه منحنیB – اسپلاین (درجه چند جمله‌ای‌های B – اسپلاین مورد استفاده)، $n = m - \wp - ۱$ خواهد بود. در این معادله n درجه منحنی، m تعداد گره‌ها، و $\wp$ تعداد نقاط کنترل است. (اثبات این تساوی در ادامه بیان خواهد شد)

توابع پایه B – اسپلاین را به صورت بازگشتی ذیل تعریف می‌کنیم:

$$F_{i,۰}(t) = \begin{cases} ۱; & t_i \leq t < t_{i+۱}, \\ ۰\,; & o.w\,, \end{cases}$$

---

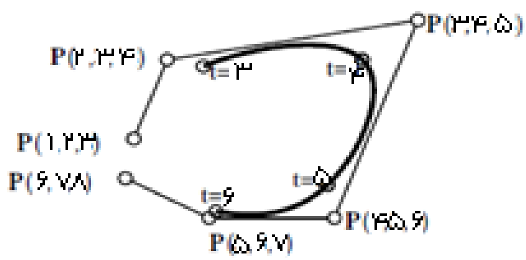
۶ B-spline curve

$$F_{i,j}(t) = \frac{t - t_j}{t_{i+j} - t_j} F_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1} - t}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} F_{i+1,j-1}(t) ; \quad 1 \le i \le m - n - 1 \text{ و } 1 \le j \le n . \qquad (۳.۱)$$

توابع نهایی در این رابطه، یعنی $\{F_{i,n}(t)\}_{i=1}^{m}$ توابع پایه B – اسپلاین هستند.
با در نظر گرفتن مطالب فوق، منحنی که به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود یک منحنی B – اسپلاین است:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i F_{i,p}(t). \qquad (۴.۱)$$

در [۹] نمایشی به نام نمایش قطبی برای نشان دادن منحنی ها و نقاط گره منحنی های B - اسپلاین بیان شده است. نمایش قطبی درک مفهوم منحنی B - اسپلاین و همچنین نقاط گره را ساده تر می کند. اکنون این نوع نمایش نقاط و منحنی را به اختصار بیان می‌کنیم.
فرم قطبی (یا نمایش قطبی) روشی برای نامگذاری نقاط گره است. در این روش نقاط کنترل بر حسب نقاط گره نامگذاری می شوند. در فرم قطبی منحنی B – اسپلاین، نمایش نقطه کنترل p_i به صورت $p(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n-1})$ است.



شکل ۴.۱ – نمایش قطبی

در اینجا چند خصوصیت از نمایشی که دکتر "رامشاو"[۷] در مقاله‌اش آن‌ها را بیان و اثبات کرده است، مطرح می‌کنیم.[۹]

۱. تغییر دادن ترتیب آرگومان های فرم قطبی، مقدار قطبی(یعنی مختصات $p(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n-1})$ را تغییر نمی‌دهد مثلا:

$$p(1,0,0,2) = p(0,1,0,2) = p(0,0,1,2) = p(2,1,0,0) = \cdots$$

۲. $p(t, t, \dots, t)$ یک نقطه روی منحنی است.

---

[۷] Lyle Ramshaw

۳. اگر دو نقطه کنترل $p(u_1, \ldots, u_{n-1}, a)$ و $p(u_1, \ldots, u_{n-1}, b)$ را داشته باشیم، می‌توانیم نقطه $p(u_1, \ldots, u_{n-1}, c)$ را که c عددی دلخواه است؛ به کمک فرمول زیر به دست می آوریم:

$$p(u_1, \ldots, u_{n-1}, c) = \frac{(b-c)p(u_1, \ldots, u_{n-1}, a) + (c-a)p(u_1, \ldots, u_{n-1}, b)}{b-a}.$$

به نقطه $p(u_1, \ldots, u_{n-1}, c)$ یک ترکیب آفین از $p(u_1, \ldots, u_{n-1}, a)$ و $p(u_1, \ldots, u_{n-1}, b)$ می‌گوییم.

ویژگی سوم در حقیقت به جایگذاری گره c مربوط می شود.

اکنون درستی رابطه $\wp = m - n - 1$ را بررسی می‌کنیم.

با دقت در فرمول توابع پایه B - اسپلاین $F_{i,n}(t)$ و با توجه به وجود جمله t_{i+n+1} در این فرمول می‌بینیم که در محاسبه توابع B - اسپلاین، هیچگاه $i = m - n, \ldots, m$ نمی‌تواند باشد. پس در محاسبه توابع B - اسپلاین نهایی، نقاط گره $t_m, \ldots, t_{m-n}$ مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

با مشاهده فرمول (۴.۱) می‌بینیم که هر نقطه کنترل ضریب یک تابع B - اسپلاین است. پس تعداد نقاط کنترل با تعداد توابع B - اسپلاینِ مورد استفاده برابر است. در پاراگراف قبل مشاهده نمودیم که تعداد توابع $F_{i,n}(t)$ ،برابر با $m - (n + 1)$ است. پس اگر تعداد نقاط کنترل را با $\wp$ نمایش دهیم، داریم $\wp = m - n - 1$ و به این ترتیب تساوی مورد نظر ثابت می‌شود.

هر منحنی بزیر از درجه دلخواه یک منحنی B – اسپلاین است و هر منحنی B – اسپلاین می‌تواند به یک یا چند منحنی بزیر تبدیل شود.

منحنی‌های B – اسپلاین ممکن است از هیچ یک از نقاط کنترل خود عبور نکند، در صورتی که منحنی بزیر از نقاط کنترل انتهایی خود عبور می‌کند. البته می‌توانیم با دستکاری کردن نقاط گره کاری کنیم که منحنی B – اسپلاین از تمام نقاط کنترل خود عبور کند و با توجه به این‌که چند ضلعی کنترل (چند ضلعی حاصل از به هم پیوستن نقاط کنترل) تقریبی برای منحنی است، عبور منحنی از تمام نقاط کنترل باعث می‌شود چند ضلعی کنترل، تقریب دقیق‌تری برای منحنی باشد و این مطلب یکی از دلایل برتری منحنی B – اسپلاین نسبت به منحنی بزیر است و کمک می‌کند که کار کردن با منحنی B – اسپلاین ساده‌تر از منحنی بزیر باشد.

برای اینکه مفهوم نقاط کنترل را بهتر درک کنیم به توصیفی که در مرجع [۵] ارایه شده است، اشاره می‌کنیم.

با توجه به اینکه توابع B – اسپلاین از درجه n پایه‌ای برای فضای توابع چندجمله‌ای از درجه n هستند، پس هر قطعه از منحنی C(t) را می‌توانیم به صورت یک ترکیب خطی از توابع B – اسپلاین بنویسیم.

قطعه i ام از منحنی f(t) را در نظر می‌گیریم:($1 \le i \le m - n - 1$)

$$f(t) = \sum_{j=i-n+1}^{i} \alpha_j F_{i,n}(t); \qquad t_i \le t < t_{i+1}.$$

حال t_{jn} را به صورت $t_{jn} = \frac{t_{j+1}+\dots+t_{j+n-1}}{n-1}$ ، $j = 0, \dots, m-n$ تعریف می‌کنیم.

و در نهایت نقطه کنترل p_j را با مختصات $p_j = (t_{jn}, \alpha_j) \in \mathbb{R}^2$ تعریف می‌کنیم.

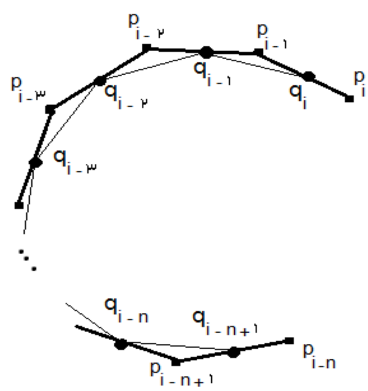
۱-۲-۱- جایگذاری گره

مفهوم "جایگذاری گره" اضافه کردن یک گره به دنباله گره T ، بدون تغییر شکل منحنی است. این گره ممکن است با یکی از گره های دنباله T برابر باشد؛ که در این صورت چندگانگی گره مورد نظر یک واحد افزایش می‌یابد؛ (به تعداد دفعاتی که گره t در دنباله T قرار دارد، چندگانگی گره t می‌گوییم.) و یا امکان دارد یک گره جدید به دنباله گره T اضافه کنیم. با توجه به معادله $m = n + \wp + 1$ ، اضافه کردن یک گره، باعث افزایش m به اندازه یک واحد می شود. بنابراین برای حفظ تساوی در معادله $m = n + \wp + 1$ لازم است که مقدار n و یا $\wp$ نیز یک واحد افزایش یابد. برای اینکه شکل منحنی تغییر نکند، ناگزیر به ثابت نگه داشتن n هستیم. پس باید $\wp$ یک واحد زیاد شود. در حقیقت تعدادی از نقاط کنترل تغییر می‌کنند و در این بین یک نقطه به دنباله نقاط کنترل اضافه می شود.

فرض کنیم برای یک منحنی از درجه n، دنباله گره برابر $T = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ و مجموعه نقاط کنترل برای این منحنی به صورت $\{p_0, p_1, \dots, p_\wp\}$ باشند. نقطه گره جدید t را به نقاط گره اضافه می‌کنیم.

فرض کنیم $t \in [t_i, t_{i+1})$، $1 \leq i < m$ است. با توجه به ویژگی پوسته محدب منحنی‌های B – اسپلاین، قطعه منحنی $C(t)$ که به بازه $[t_i, t_{i+1})$ مرتبط است، در پوسته محدب تعریف شده به وسیله نقاط کنترل $p_i, p_{i-1}, \ldots, p_{i-n}$ قرار دارد. پس از قرار دادن نقطه گره جدید t در دنباله T، باید n نقطه کنترل q_i را طوری بیابیم که:

q_i روی ضلع $p_{i-1}p_i$ و q_{i-1} روی ضلع $p_{i-2}p_{i-1}$ و … و q_{i-n+1} روی ضلع $p_{i-n}p_{i-n+1}$ قرار بگیرد. به طوری که نقاط کنترل جدید $q_i, \ldots, q_{i-n+1}$ به جای نقاط کنترل $p_{i-1}, \ldots, p_{i-n+1}$ قرار گیرند و سایر نقاط گره، در صورت لزوم، فقط تغییر اندیس داشته باشند.



شکل ۵.۱

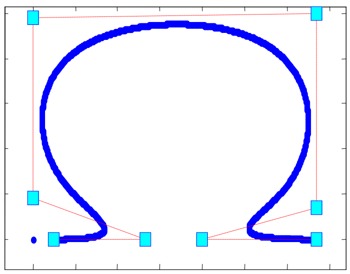
مقدار عددی نقاط کنترل جدید به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید:

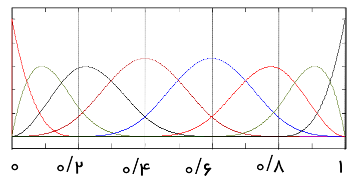
$$a_j = \frac{t - t_j}{t_{j+n} - t_j} \;; \qquad i - n + 1 \leq j \leq n,$$
$$q_j = (1 - a_j)p_{j-1} + a_j p_j.$$

مثال – دنباله گره $T = \{0,0,0,0,0/2,0/4,0/6,0/8,1,1,1,1\}$ را برای رسم یک منحنی B- اسپلاین از درجه سه در نظر می‌گیریم. گره $t = 0/5$ را در دنباله گره جایگذاری می‌کنیم. نقاط کنترل p_3 و p_4 با نقاط q_3 و q_4 و q_5 جایگزین می‌شوند.

$$a_3 = \frac{t - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{0/5 - 0}{0/6 - 0} = \frac{5}{6}$$
$$a_4 = \frac{t - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{0/5 - 0/2}{0/8 - 0/2} = \frac{1}{2}$$
$$a_5 = \frac{t - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{0/5 - 0/4}{1 - 0/4} = \frac{1}{6}$$

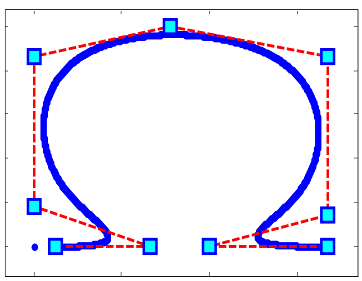
$$q_{۳} = \left(۱ - \frac{۵}{۶}\right) p_{۲} + \frac{۵}{۶} p_{۳}$$
$$q_{۴} = \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right) p_{۳} + \frac{۱}{۲} p_{۴}$$
$$q_{۵} = \left(۱ - \frac{۱}{۶}\right) p_{۴} + \frac{۱}{۶} p_{۵}$$

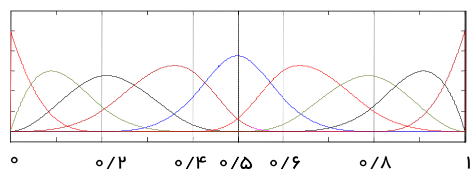




توابع B – اسپلاین $F_{i,۳}(t)$ قبل از جایگذاری

a) قبل از جایگذاری گره





توابع B – اسپلاین $F_{i,۳}(t)$ بعد ازجایگذاری

b)بعد از جایگذاری گره $t = ۰/۵$

شکل ۶.۱ – جایگذاری گره

اکنون جایگذاری گره را با نمایش قطبی نشان می دهیم.

فرض کنیم گره t را در دنباله گره T طوری جایگزین کنیم که $t \in [t_i, t_{i+۱})$. در این صورت یکی از نقاط کنترل جدید به صورت :

$$p(t_{i-n+۱}, \dots, t_{i-۱}, t) = \frac{(t_{i+n} - t)p(t_{i-n+۱}, \dots, t_{i-۱}, t_i) + (t - t_i)p(t_{i-n+۱}, \dots, t_{i-۱}, t_{i+n})}{t_{i+n} - t_i}$$
$$= (۱ - a_i)p_i + a_i p_{i-۱}$$

به دست می‌آید. سایر نقاط کنترل را نیز می‌توان به همین ترتیب محاسبه کرد.

۱-۲-۲-رسم منحنی B – اسپلاین و نقاط کنترل

برای رسم یک منحنی B – اسپلاین دو حالت وجود دارد. حالت اول حالتی است که نقاط کنترل را داریم و تصمیم داریم منحنی را طوری رسم کنیم که این نقاط کنترل تقریب مناسبی برای آن باشند.

در حالت دیگر، مختصات چند نقطه از منحنی را داریم و باید پس از پیدا کردن نقاط کنترل، منحنی را رسم کنیم.

ابتدا حالت اول را در نظر می‌گیریم:

حالت I - فرض کنیم دنباله گره T را داریم و توابع B – اسپلاین متناظر را با $F_{i,n}(t)$ نمایش می‌دهیم.

برای دنباله T سه حالت وجود دارد([۸]):

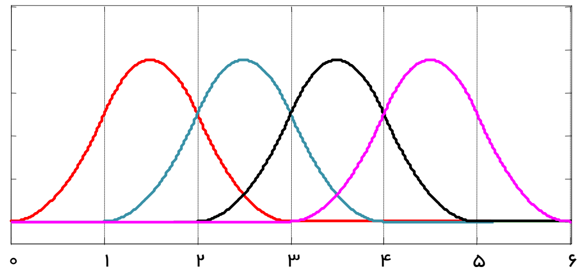
۱- دنباله گره یکنواخت – در این دنباله فاصله گره‌ها یکسان است. مثلاً {۳و۲و۱و۰ }

۲- دنباله گره یکنواخت باز – در تابع B – اسپلاین با درجه n، دنباله‌ی گره یکنواخت باز، دنباله یکنواختی است که گره اول و آخر، به تعداد $n + ۱$ مرتبه تکرار شده‌اند. مثلاً اگر درجه تابع B – اسپلاین دو باشد، {۳و۳و۳و۲و۱و۰و۰و۰ }

۳- دنباله گره غیریکنواخت – دنباله گره‌ای که تنها شرط غیرنزولی بودن را دارد و هیچ شرط دیگری بر آن حاکم نیست، دنباله گره غیریکنواخت است. {۵و۴و۲و۱و۰و۰ }

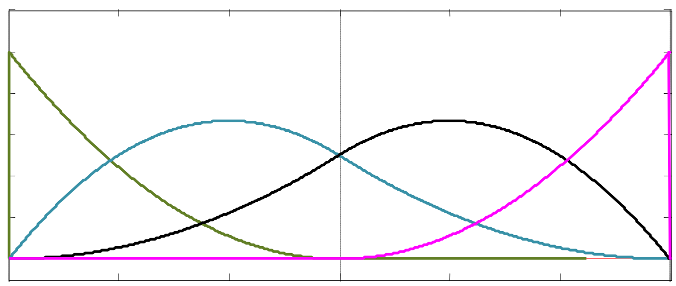
فرض کنیم نقاط کنترل یک منحنی B – اسپلاین معلوم هستند. برای اینکه شکل منحنی را به صورت مطلوب در بیاوریم، چندین راه وجود دارد:

- عوض کردن نوع دنباله گره، (یکنواخت، یکنواخت باز، غیریکنواخت)
- عوض کردن درجه توابع B – اسپلاین،
- تغییر دادن محل نقاط کنترل،
- استفاده از گره تکراری (گره چندگانه) در دنباله گره.
- استفاده از نقطه کنترل تکراری



شکل ۷.۱ – دنباله گره یکنواخت

دو شکل ۷.۱ و ۸.۱ اثر تغییر دادن نوع دنباله گره را نشان می‌دهند و شکل ۹.۱ علاوه بر آن تأثیر گره‌های تکراری، روی شکل منحنی را نیز نشان می‌دهد.



شکل ۸.۱ - دنباله گره یکنواخت باز

همانگونه که در شکل ۹.۱ می‌بینیم، اگر گره t_i در دنباله گره تکرار شود، منحنی در t_i نوک تیز می‌شود.

شکل **۱۰.۱** تاثیر عوض کردن درجه B – اسپلاین را نشان می‌دهد. در این شکل‌ها درجه تابع B – اسپلاین $k-۱$ است.

شکل ۱۱.۱ نتیجه تغییر دادن محل نقاط کنترل را به خوبی مشخص می‌کند