دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

(رشته ریاضی محض گرایش آنالیز)

عنوان:

محاسبه سریع موج از طریق عملگر انتگرال فوریه

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر حسین جعفری

نگارش:

نفیسه سلیمانی امیری

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

زیباترین نعمتهای زندگی ام : پدر و مادرم

و برادر عزیزم که در تمامی مراحل تسلای

خاطرم بود

تقدیر و سپاسگزاری:

اکنون که با لطف حق تعالی نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده بر خود لازم می دانم از زحمات استادفرهیخته ام جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی که در طول دوران تحصیلم با راهنمایی ها و کمک های علمی خود اینجانب را بهره مند نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. ایشان در تمام این مدت همواره با روی باز اینجانب را پذیرفتند و با دلسوزی، مسیر موفقیت در پژوهش ها را به بنده نشان دادند. همچنین از زحمات استاد مشاور جناب آقای دکتر حسین جعفری و تمامی عزیزان و دوستانی که در مراحل علمی بنده را مورد راهنمایی و لطف قرار دادند کمال قدردانی و تشکر را دارم.

چکیده:

در این پایان نامه معادله موج ۲ بعدی :

$$\begin{cases}\partial_{tt}u(x,t)-\nabla.(C^{2}(x)\nabla u(x,t))=0 \qquad t>0, x\in[0,1)^{2}\\ u(x,0)=u_0(x) \qquad x\in[0,1)^{2}\\ \partial_t u(x,0)=u_1(x) \qquad x\in[0,1)^{2}\end{cases}$$

توسط روش تبدیل سریع فوریه مورد مطالعه قرار می گیرد. این روش با محاسبات تقریبی در حالت گسسته همراه است لذا نمایش عملگرانتگرال فوریه رابر $\mathbb{Z}^{2}$ گسسته سازی نموده و به منظور محاسبات تقریبی شبکه ای را تعریف می کنیم و تعداد گام را تقریب می زنیم.

در این پایان نامه در ابتدا با تبدیل فوریه در فضاهای شوارتز و D آشنا می شویم، سپس معادله موج را در حالت یک بعدی تعریف نموده و چند روش حل آن را مورد بررسی قرار می دهیم. و در انتها یکی از روش های حل معادله موج به نام روش تبدیل سریع فوریه را که تعداد گام محاسباتی را کاهش می دهد مورد مطالعه قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: معادله موج، تبدیل فوریه، عملگر انتگرال فوریه، محاسبات تقریبی، فضای شوارتز، روش تبدیل سریع فوریه، شبکه.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم یک سری نامتناهی به زمان یونان باستان، وقتی که ارشمیدس(۲۱۲ - ۲۸۷ق.م) مجموع یک سری هندسی را برای محاسبه ی مساحت زیر یک سهمی به کار برد، باز می گردد.

در قرن هجدهم، بسط سری های توانی برای توابعی مثل e^x، $sin(x)$ ، $arctan(x)$،نخستین بار توسط ریاضی دان اسکاتلندی، ماکلورن(۱۶۹۸-۱۷۴۶) منتشر گردید، و ریاضی دان انگلیسی تیلور(۱۶۸۵-۱۷۳۱) کار او را به سری های توانی حول نقاط دیگری غیر از $x = 0$تعمیم داد. در اواسط قرن هجدهم امکان نمایش یک تابع مفروض بر حسب سری های نامتناهی غیر از سری توانی، بسیار مهم تلقی می شد. برنولی(۱۷۰۰-۱۷۸۳) نشان داد توابعی که به صورت یک سری نامتناهی از توابع سینوسی هستند ظاهرا جواب مساله تار مرتعش، با توجه به شرایط ریاضی اعمال شده توسط مفروضات فیزیکی، می باشند. در اوایل قرن نوزدهم، فیزیک دان فرانسوی، فوریه، به نمایش های مشابهی رسید و در مطالعات خود بر روی رسانش گرمایی نشان داد که یک تابع دلخواه را می توان به صورت یک سری سینوسی بسط داد. مقداری از کارهای فوریه فاقد دقت ریاضی بود، اما با این حال او بود که نخستین جرقه واقعی به موضوعی را که اینک به نام او شناخته می شود را زد.

انتگرال فوریه نیز نخستین بار توسط فوریه ارائه شد که تلاشی برای تعمیم نتایج بدست آمده از یک بازه متناهی به یک بازه نامتناهی بود. فوریه یکی از ۷۲ نفری است که نام او بر روی برج ایفل تا ابد جاویدان مانده است. مقاله های او، که در سال ۱۸۰۷ ، ۱۸۱۱ به آکادمی علوم پاریس ارائه گردید، به خاطر عدم دقت توسط داوران مورد انتقاد قرار گرفت و در نتیجه در آن زمان به چاپ نرسید.

کاربرد های تبدیل و انتگرال فوریه در عمل بسیار گسترده و فراوان است. بنابراین سعی بر آن نداریم که، موارد استفاده از این انتگرال ها را بیان کنیم، بلکه اشاره مختصری به جنبه های گوناگون کاربرد آن ها خواهیم داشت. هدف اصلی روش تبدیل آن است که مساله داده شده را به مساله آسان تری که قابل حل باشد، تبدیل کند. در مورد معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت، مساله تبدیل شده، جبری می شود. تاثیر تبدیل انتگرال روی یک معادله دیفرانسیل جزئی، خارج کردن موقتی یکی از متغیرهای مستقل و بنابراین داشتن مساله ای با یک متغیر کمتر است.

تبدیل فوریه نمایی می تواند در مورد همه ی مشتق هایی که ممکن است در روند حل یک مساله پدید آیند به کار رود. اما چون در تبدیل این مشتق ها هیچ شرط مرزی اعمال نمی شود، بهتر آن است که در مورد معادلات

دیفرانسیل روی دامنه ی نامتناهی به کار رود که در آنها شرط مرزی معمولا فقط برای جواب های کراندار لازم است.

در این پایان نامه ابتدا تبدیل و انتگرال فوریه مورد بررسی قرار می گیرد، سپس مختصری درباره ی معادله موج و روش های حل آن توضیح داده ، سپس به روش محاسبه ی سریعFFT بر روی معادله موج که یکی از مسائل مرزی است می پردازیم.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف پایه ای

ابتدا به برخی مفاهیم اساسی و نمادگذاری های متداول پرداخته و در ادامه مروری گذرا بر فضای شوارتز و فضای D و دوگان آنها، فضای L^pو قضایای مرتبط به آنها و تعریفی از مسائل مقدار مرزی خواهیم نمود.

- چند اندیس α ، یک مجموعه از اعداد صحیح غیر منفی است که به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}.$$

- اگر αو β چند اندیس باشند، آنگاه$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ و $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$ و

$$\alpha + \beta := \{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + ... + \alpha_n + \beta_n\}.$$

- $\mathbb{R}^n$به عنوان فضای اقلیدسی n بعدی بیان می شود $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و

$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ و $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ مولفه هایی از $\mathbb{R}^n$ می باشند.

- اگر $x \in \mathbb{R}^n$ و α یک چنداندیس باشد آنگاه:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, \qquad \partial_{x_k} := \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_{x_k} := -i\partial_{x_k},$$

$$\partial_x^\alpha := \partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}, \qquad D_x^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha$$

که $i = \sqrt{-1}$.

تعریف ۱.۱.۱. (دامنه) :

فرض کنید $\mathbb{R}^n$ یک فضای اقلیدسی n ـ بعدی با نقاط $x = (x_1, ..., x_n)$ که $x_i \in \mathbb{R}^n$ و

$$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

باشد. در این صورت $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

تعریف ۲.۱.۱. ($\mathrm{C}(\Omega)$) :

مجموعه ی همه ی توابع پیوسته روی Ω را با $\mathbf{C}(\Omega)$ نشان می دهیم. $\mathbf{C}^K(\Omega)$ ، $K \in \mathbb{N}$ نشان دهنده ی توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه K -ام آنها روی Ω موجود و پیوسته است.

$\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ کلاس همه ی توابعی است که برای هر عدد طبیعی K ،متعلق به $\mathbf{C}^k(\Omega)$ باشد.

$\mathbf{C}_b(\mathbb{R}^n)$ فضای خطی مختلط از توابع پیوسته کراندار مختلط $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$ که فضای نرمدار کامل $\|.\|_\infty$ می باشد .

تعریف ۳.۱.۱. (فضای خطی نرمدار،فضای باناخ) :

فضای برداری X را یک «فضای خطی نرمدار» نامیم، هرگاه نرم روی فضای برداری X که با نگاشت $\begin{cases} \| \,.\, \| : X \to \mathbb{R} \\ x \to \| x \| \end{cases}$ معرفی می‌شود دارای شرایط ذیل باشد:

۱) $\| x \| \geqslant 0$ برای هر $x \in X$ و $\| x \| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۲) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

۳) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ برای هر $x, y \in X$.

روشن است یک فضای خطی نرمدار X ، تحت متر تعریف شده در ذیل یک فضای متریک می‌باشد:

$$d(x,y)=\parallel x-y\parallel \quad ; \quad \forall x,y\in X$$

در نتیجه یک دنباله $\{x_n\}\subset X$ همگرا به عنصر $x\in X$ است، هرگاه

$$\parallel x_n-x\parallel\rightarrow \circ \quad as \quad n\rightarrow\infty.$$

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است هرگاه $\parallel x_m-x_n\parallel\rightarrow\circ$ وقتی که $m,n\rightarrow\infty$.

فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد، یعنی هر دنباله کشی در X با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه‌ای از X همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱.

اگر X یک فضای توپولوژیک و Y یک فضای برداری ، و $f:X\rightarrow Y$ تابع باشد، آنگاه

$$Supp\ f=\overline{\{x\in X: f(x)\neq\circ\}}=K$$

را محمل f نامند. نیز $C_\circ(\Omega)$ نشان‌دهنده توابع پیوسته روی Ω می باشد که محمل آنها یک زیرمجموعه فشرده از Ω است.

تعریف ۵.۱.۱. (تابع آزمون) :

تابع f ، تعریف شده روی مجموعه باز غیرتهی $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ را یک تابع آزمون نامند ، هرگاه $f\in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K\subset\Omega$ ، موجود باشد به طوری که محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه این توابع را با $C_\circ^\infty(\Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. (مجموعه و توابع اندازه پذیر) :

اندازه μ تابعی است(یا به عبارتی نگاشتی است) که بر روی Ω بر زیرمجموعه اندازه پذیر X تعریف می شود و مقادیر بین $[0,\infty]$ می پذیرد و دارای خصوصیات زیر است:

$$\mu(\Phi) = 0$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

در اینجا Φ مجموعه تهی و $E_1, E_2, \ldots$ تعداد شمارایی از مجموعه هایی در Ω هستند، که اشتراک هر کدام از آنها با دیگری تهی است (مجموعه ها مجزا هستند). در این حالت به (X, Ω, μ) فضای اندازه و به اعضای Ω ، مجموعه های اندازه پذیر گفته می شود .

فرض کنیم f تابعی باشد که بر فضای اندازه پذیر X تعریف شده است و مقادیرش در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی اند. تابع را اندازه پذیر گوییم هرگاه مجموعه

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > a\}$$

به ازای هر aی حقیقی اندازه پذیر باشد.

تعریف ۷.۱.۱. (فضای $L^P(\Omega)$) :

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^n$ و $1 \leq p < \infty$ ، همچنین u یک تابع اندازه‌پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega | u(x) |^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ را متشکل از همه uهایی می‌گیریم که برای آنها داشته باشیم:

$$\| u \|_p < \infty.$$

$\| u \|_p$ را نرم L^p تابع u می‌نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می‌گیریم که به طور تقریباً همه جا، با هم برابر باشند. یعنی اندازه مجموعه نقاطی که با هم برابر نیستند، برابر صفر باشد. گوییم $u = 0$ در $L^p(\Omega)$ ، هرگاه

$u(x) = \circ$ به طور تقریباً همه جا در Ω. به وضوح اگر $u \in L^p(\Omega)$ و $c \in \mathbb{R}$ آنگاه $cu \in L^p(\Omega)$. به علاوه اگر $u, v \in L^p(\Omega)$ داریم:

$$| u(x) + v(x) |^p \leq (| u(x) | + | v(x) |)^p \leq ۲^{p-۱}(| u(x) |^p + | v(x) |^p),$$

یعنی $u + v \in L^p(\Omega)$. لذا $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.[۲۰]

تعریف ۸.۱.۱. (انتگرال پذیری موضعی تابع f روی دامنه Ω) :

الف- مجموعه همه توابع اندازه پذیر تعریف شده روی Ω که انتگرال آنها تعریف شده و متناهی باشد را توابع انتگرال پذیر می نامیم. اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند مواجه می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω ، انتگرال پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال پذیر باشند، مجموعه همه چنین توابعی را با $L^۱_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم. مطلب شناخته شده ای است[۲۷] ،

$$\begin{cases} C_\circ(\Omega) \subset L_۱(\Omega) \\ C(\Omega) \subset L^۱_{loc}(\Omega). \end{cases}$$

ب- برای $۱ \leq p \leq \infty$ ، $L^p_{loc}(\Omega)$ عبارتست از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به طوری که برای هر زیرمجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_K | u(x) |^p \ dx < \infty.$$

تعریف ۹.۱.۱. (سوپریمم اساسی) :

فرض کنید u یک تابع اندازه‌پذیر روی Ω باشد. گوییم u به طور اساسی کراندار است، هرگاه یک ثابت $k \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $| u(x) | \leq k$ به طور تقریباً همه جا در Ω برقرار باشد. به بزرگترین کران پایین (اینفیمم) چنین kهایی سوپریمم اساسی می‌گوییم و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$ess \sup_{x \in \Omega} | u(x) | = inf\{k : \mu(\{x : | u(x) | > k) = \circ\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۰. تعریف (فضای $L^\infty(\Omega)$) :

$L^\infty(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابع اندازه پذیر است که سوپریمم اساسی آنها کراندار باشد. نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\| u \|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} | u(x) | \,.$$

تعریف ۱.۱.۱۱. (فضای ضرب داخلی و هیلبرت) :

فضای برداری (حقیقی) H را یک فضای ضرب داخلی نامیم، هرگاه به هر زوج مرتب از بردارهای x, y در H یک عدد حقیقی مانند $\langle x, y\rangle$ به نام حاصلضرب داخلی x, y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشد:

۱) برای هر $x, y \in H$ ؛ $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$،

۲) برای هر $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ و هر $x_1, x_2, y \in H$ داشته باشیم:

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle$$

۳) برای هر $x \in H$، $\langle x, x\rangle \geq 0$،

۴) $x = 0$ اگر و تنها اگر $\langle x, x\rangle = 0$.

بنابر (۳) می توان $\| x \|$، یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نامنفی $\langle x, x\rangle$ تعریف کرد، یعنی:

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \forall x \in H$$

در این صورت به وضوح شرایط (۱) و (۲) در تعریف (۱.۲.۱۲) برقرارند.

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای خطی نرمدار برقرار می‌باشد، لذا فضای ضرب داخلی H یک فضای خطی نرمدار نیز است. هرگاه این فضای ضرب تام (کامل) باشد آن را یک فضای هیلبرت می‌گویند.

قضیه ۱۲.۱.۱. **(*کامل بودن* L^p) :**

$L^p(\Omega)$ *به ازای* $1 \leq p \leq \infty$ *و هر دامنه* Ω *در* $\mathbb{R}^n$ *یک فضای باناخ است، به علاوه اگر* $p = 2$ *آنگاه* $L^2(\Omega)$ *یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر می‌باشد:*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv\, dx.$$

تعریف ۱۳.۱.۱.

اگر دو تابع f *و* g *حقیقی- مقدار باشند،برآورد* o *و* O *را چنین تعریف می کنیم:*

(آ) $f(x) = o(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ، **وقتیکه** $x \to \infty$.

(ب) $f(x) = O(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ، **وقتیکه** $x \to \infty$.

۲.۱ فضای شوارتز

در ادامه برخی مفاهیمی را که در فصول بعد به آن ها نیاز داریم آورده ایم.

تعریف ۱.۲.۱. *فضای شوارتز به قرار ذیل تعریف می شود:*

$$\mathbf{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : |||f|||_{\alpha,\beta} := sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta f(x)| < \infty \textbf{\textit{برای}} \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+\}$$

گزاره ۲.۲.۱. [۱۰]

فضای شوارتز دارای ویژگی های ذیل می باشد:

۱ - $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ *فضای خطی است.*

۲- **برای هر** $\alpha \geq \circ$ $\quad \partial^\alpha : \mathbf{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbb{R}^n) \qquad (\partial^\alpha)(x) := \partial^\alpha(f(x));$

۳- **برای هر** $\beta \geq \circ$ $\quad x^\beta : \mathbf{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbb{R}^n) \qquad x^\beta(f) := x^\beta f(x);$

توابع خطی اند.

۴- *اگر* $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ *باشد، آنگاه* $|f(x)| \leq C_m(\text{۱} + |x|)^m$ *برای هر* $m \in \mathbb{N}$ *و برای یک* C_m *مثبت.*

مثال ۱. *تابع* $f(x) = x^m e^{-x^\text{۲}}$ *به* $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ *تعلق دارد.*

حل. *بنا به تعریف (۱.۲.۱) نشان خواهیم داد که* $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ *کراندار می باشد، بایستی توجه داشت که در فضای* $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ *منظور از* ∂^β *همان* $\frac{d^\beta}{dx^\beta}$ *است. لذا* $x^\alpha \partial^\beta f(x) = x^\alpha \partial^\beta (x^m e^{-x^\text{۲}})$ *از طرفی*

$$\begin{aligned}\partial(x^m e^{-x^\text{۲}}) &= m x^{m-\text{۱}}.e^{-x^\text{۲}} + (-\text{۲}x)e^{-x^\text{۲}} x^m \\ &= m.x^{m-\text{۱}} e^{-x^\text{۲}} + (-\text{۲}x^{m+\text{۱}})e^{-x^\text{۲}} \\ &= e^{-x^\text{۲}}(\textbf{چندجمله ای}).\end{aligned}$$

بنابر استقرا گوییم برای جمله $k-$ *ام نیز برقرار است لذا:*

$$x^\alpha \partial^\beta (x^m e^{-x^\text{۲}}) = e^{-x^\text{۲}} P(x).$$

منظور از $P(x)$ *، چندجمله ای از درجه* l *است. بنابراین*

$$x^\alpha \partial^\beta (x^m e^{-x^\text{۲}}) = x^\alpha e^{-x^\text{۲}} P(x) = e^{-x^\text{۲}} q(x).$$

که $q(x) = x^\alpha P(x)$ *چندجمله از درجه* $l+n$ *می باشد. بطوریکه برای* x*های بزرگ یعنی* $M < |x|$ *تابع* $e^{-x^\text{۲}}$ *رشدش از* $q(x)$ *بیشتر است ، پس*

$$|q(x)e^{-x^{۲}}| \leq ۱ \qquad |x| > M$$

از طرفی $q(x)$در $[-M, M]$ بنا به قضیه هاینه - برل فشرده است تابع پیوسته است پس فشرده را به فشرده می برد و در نتیجه برد تابع در این فاصله کراندار می شود. بنابراین $x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)$ کراندار می باشد. $\square$

تعریف ۳.۲.۱. دنباله (f_n) به f در فضای $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ همگرا می باشد یعنی:

$|||f_n - f|||_{\alpha,\beta} \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty,$ برای هر دو چند اندیس α, β.

تعریف ۴.۲.۱. دنباله (f_n) در $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$، دنباله کشی در فضای $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ نامیده می شود، یعنی:

$|||f_n - f_m|||_{\alpha,\beta} \longrightarrow ۰$ وقتی که$n, m \longrightarrow \infty$، برای هر دو چنداندیس α, β.

قضیه ۵.۲.۱. $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ کامل است، یعنی هر دنباله کشی در $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ همگرا در$\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ می باشد.

اثبات. ابتدا نشان می دهیم که این قضیه برای $d = ۱$ برقرار می باشد. با فرض اینکه (f_n) یک دنباله کشی در $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ باشد، بنا به تعریف کشی بودن به ازای هر دو چنداندیس α, β

$$|||f_n - f_m|||_{\alpha,\beta} \longrightarrow ۰$$

وقتی که$n, m \longrightarrow \infty$ ، به عبارت دیگر، هر دنباله از $x^{\alpha}\partial^{\beta} f_n(x)$ یک دنباله کشی با نرم$\|.\|_{\infty}$ و همگرا به تابع $g_{\alpha,\beta}$ می باشد، حال نشان خواهیم داد $x^{\alpha}\partial^{\beta} g = g_{\alpha,\beta}$ است. طبق قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$f_n(x) = f_n(۰) + \int_{۰}^{x} f_n'(t)dt.$$

در حقیقت $f'_n = \partial f_n \to g_{0,1}$ روی $\mathbb{R}$ می باشد لذا

$$g_{0,0} = g_{0,0} + \int_0^x g_{0,1}(t)dt$$

وقتی که $n \to \infty$ ، از اینرو $g_{0,0}$ مشتق پذیر است و $g'_{0,0} = g_{0,1}$. با ادامه این روند نتیجه می شود $g_{0,0}$ بی نهایت بار مشتق پذیر و $\partial^\beta g_{0,0} = g_{0,\beta}$ است. حال داریم، $\partial^\beta f_n \longrightarrow g_{0,\beta} = \partial^\beta g_{0,0}$ یکنواست و $x^\alpha \partial^\beta f_n(x) \longrightarrow x^\alpha \partial^\beta g_{0,0}(x)$ به صورت نقطه وار همگراست. از طرفی $x^\alpha \partial^\beta f_n \longrightarrow g_{\alpha,\beta}$ یکنواست لذا $g_{\alpha,\beta} = x^\alpha \partial^\beta g_{0,0}$ می باشد. با توجه به این که $g_{\alpha,\beta}$ کراندار است لذا $g_{0,0} \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ می باشد، از اینرو $f_n \longrightarrow g_{0,0}$ در $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ بوده، لذا $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ کامل است.

حال نشان می هیم برای $n = d$ نیز این قضیه برقرار است، با توجه به فرض (f_n) دنباله کشی در $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$ می باشد، لذا برای هر دو چنداندیس α, β ، دنباله $x^\alpha \partial^\beta f_n$ یک دنباله کشی در $\mathbf{C}_b(\mathbb{R}^n)$ بوده و همگراست. $x^\alpha \partial^\beta f_n \longrightarrow g_{\alpha,\beta}$ روی $\mathbb{R}^d$ برای $g_{\alpha,\beta} \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}^d)$ یکنواست.

با ثابت نگه داشتن $(x_2, x_3, ..., x_d)$ ، برای هر دو چنداندیس α_1, β_1 (همه ی مشتقات جزئی موجود است و)

$$x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} f_n(x_1, x_2, ..., x_d) \longrightarrow g_{(\alpha_1, 0, ..., 0)(\beta_1, 0, ..., 0)}(x_1, x_2, ..., x_d) = x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} g_{0,0}(x_1, x_2, ..., x_d)$$

با در نظر گرفتن $x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} f_n(x_1, x_2, ..., x_d) \longrightarrow x_2$ ، به طور مشابه

$$x_2^{\alpha_2} \partial_{x_2}^{\beta_2} x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} f_n(x_1, x_2, ..., x_d) \longrightarrow g_{(\alpha_1, \alpha_2, 0, ..., 0)(\beta_1, \beta_2, 0, ..., 0)}(x_1, x_2, ..., x_d)$$

$$= x_2^{\alpha_2} \partial_{x_2}^{\beta_2} x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} g_{0,0}(x_1, x_2, ..., x_d)$$

برای هر دو چنداندیس α_2, β_2.