بسم الله الرحمن الرحيم

۳۹۸۱۴

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

۱۳۸۰ /۱۲/ ۲۸

عنوان :

برونیابی روش COLLOCATION گسسته درمعادله انتگرال HAMMERSTEIN

نگارش :

016510

رضا احمدی

استاد راهنما :

دکتر خسرو مالک نژاد

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

شهریور ۱۳۸۰

۳۹۸۱۴

چکیده

این پایان نامه برداشتی از مقاله ارائه داده شده توسط **Han Guoqiang**
[Department of Computer Science,South China Univ.of Tech.]
است. که در آن بسط خطای حدی از یک روش *Collocation* گسسته برای معادلات انتگرال از نوع *Hammerstein* بدست آمده است.

درآنجا نشان داده شده است کەوقتی برای تقریب انتگرال معین دراین روش ازچندجمله ایهای قطعه قطعه ای ازدرجه *P-1* وکوادراتور عددی استفاده شود،جواب تقریبی شامل توانهایی از گام هایی به طولh از بسط خطا خواهد بود.

علی الخصوص به ازای انتخاب های خاصی از نقاط *Collocation* وقانون کوادراتور عددی،جملات پیشرو در بسط خطا برای جواب *Collocation* شامل فقط توانهای زوج ازh ،باشروع از جمله h^{2p}،خواهد بود.

جهت افزایش دقت جواب عددی از برونیابی ریچاردسون استفاده شده است.

تقدیر و تشکر

منت خدای را عزّوجل که طاعتش موجب قربتست وبه شکر اندرش مزید نعمت.

عنایات حق تعالی در تتمیم این پایان نامه شامل حال من شد.ومراقوت بخشید.

امید دارم نوشتار خویش را به شکلی جاذب و اسلوبی زیبا پرورانده باشم و آنرا با صفای اثیر و درخشندگی نور و چاشنی روح بر بازار علم و اندیشه رواج داده باشم.

مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد عزیز و بزرگوارم جناب آقای دکتر مالک نژاد که بحق راهنمایی ایشان همچون شمع نورانی.روشنی بخش نوشته هایم بود. ابراز می دارم.

از جناب آقای دکتر رشیدی نیا استاد مشاورم که نظرات ارزنده ایشان در باب مطالب این پایان نامه مرا یاری نمود.کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوارم جناب آقایان دکتر امامی زاده.دکتر هادی زاده.دکتر مختارزاده و سرکار خانم دکتر مستقیم که وقت گرانبهایشان را برای پاسخگویی به سوالات اینجانب صرف کردند.بی نهایت سپاسگزارم.

همچنین از سرکار خانم یوسفی.مسئول محترم دفتر تحصیلات تکمیلی.وسرکار خانم کُرد بچه.مسئول محترم کتابخانه ریاضی.به خاطر ارائه کتب ارزنده تشکر و قدردانی می نمایم.

در خاتمه.اهل علم و دانش را به خواندن این پایان نامه دعوت کرده.توفیق تمامی اساتیدودانشجویان را ازپروردگارعلم ومعرفت خواستارم.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

مقدمه

۱-۱- تاریخچه ای از معادلات انتگرال

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه های آنالیز ریاضی است.واهمیت اصلی آن بواسطه تبدیل یک مساله مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی به این دسته از معادلات است .

در واقع در بررسی پاره ای از معادلات دیفرانسیل به معادلاتی برخورد می کنیم که در آنها مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می گردد.

در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می شد،لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال توسط «ریموند»[1] پیشنهاد شد. «لاپلاس»[2] در سال ۱۸۷۲،معادله انتگرال را برای تابع f ارائه داد:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$$

«فوریه»[3] در سال ۱۸۱۱،روی نظریه حرارت کار کرد.

و تئوری انتگرال فوریه در این سالها شکل گرفت .

لذا معمولاًگفته می شود که مبدأمعادلات انتگرال به تئوری انتگرال فوریه برمی گردد.

«آبل»[4] نیز در مسائل مکانیکی خود با این نوع معادلات روبرو شد.در سال ۱۸۲۶«پواسن»[5] در نظریه مغناطیس خود معادله انتگرال را مطرح نمود.«لیوویل»[6] در سال ۱۸۳۲ بطور مستقل دسته خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط وی برداشته شد.

1-Du Bois Reymond 2-Laplace 3-Fourier 4-Abel 5-Poisson 6-Liouville

و آن چگونگی حل بعضی معادله دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

در سال ۱۹۷۰«نیومن»[1] با تبدیل مسئله «دیریکله»[2] به یک معادله انتگرال از دیگرکسانی بودکه نقش موثری در تکامل نظریه معادله انتگرال داشت.

در سال ۱۸۹۶«پوانکاره»[3] معادله انتگرالی را در رابطه با یک معادله دیفرانسیل جزئی مطرح نمود.اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در مورد معادلات انتگرال بکار می رود،اولین بار توسط «هیلبرت»[4] پیشنهاد شد،البته قبل از کارهای هیلبرت ،معادلات آبل و لیوویل به فرم های زیرمطرح بود:

معادله آبل:

$$g(x) = \int_a^x k(x,y) f(y) dy$$

معادله لیوویل:

$$f(x) = g(x) + \int_a^x k(x,y) f(y) dy$$

در اواخر قرن نوزدهم،دانشمندی به نام «ولترا»[5] از ایتالیا اولین بار نظریه عمومی معادله انتگرال را مطرح کرد.صورت کلی معادله وی عبارتست از:

$$h(x) f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y) f(y) dy$$

در حدود سالهای ۱۹۰۳–۱۹۰۰ریاضیدانی سوئدی به نام «فردهلم»[6] جهت بدست آوردن جواب مساله فوق تحقیقاتی را انجام داد .یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی بصورت

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

1-Neuman 2-Dericlet 3-Poincare 4-Helbert
5-Volterra 6-Fredholm

می باشد .تحقیقات وی منجر به ارائه قضایای فردهلم که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند،گردید.ارائه یک سخنرانی توسط « اریک هولمگر »[1] درسال ۱۹۰۷ روی کارهای فردهلم ،علاقه هیلبرت را به تحقیق در مورد معادلات انتگرال برانگیخت و اودر بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت . یکی از کارهای مهم وی فرموله کردن مسائل مقدار مرزی به صورت یک معادله انتگرالی است.

ارتباط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال ویا مثالهای دیگری در ریاضی فیزیک ،یک تکنیک مهم را جهت حل مسائل مقداراولیه و مقدار مرزی در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی بوجود می آورد که یکی از دستاوردهای مهم مطالعه معادلات انتگرال است .

ابتدا،قضایای فردهلم برای هسته های پیوسته ارائه شد،لیکن بعدها توسط افراد دیگری نظیر «کارلمان»[2] و«ریس»[3] برای هسته های کلی تر تعمیم یافت .

در اوایل نیمه دوم قرن اخیر،تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال بوسیله «هرمن ویل»[4] ارتباط با اینکه به ازاءِ چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد ،صورت گرفت،لیکن از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرالی که در عمل با آنها مواجه می شویم ،نیستیم لذا از همین سالها نیاز به روش تقریبی وعددی جهت حل معادلات انتگرال آشکار شد.

۱-۲- تعریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف: یک معادله انتگرال معادله ایست که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چندعلامت انتگرال ظاهر می گردد باتوجه به توسعه معادلات انتگرال وکاربردهای وسیع آن یک تقسیم بندی جامع برای آنها ضرورت دارد.

1-Erick Holmger 2-F.Carleman 3-Riesz 4-Harmann weyl

بـه خصوص از یک طرف درمسائل مختلف فیزیک و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می شوند واز طرف دیگر راههایی که جهت حل‌انواع مختلف این نوع معادلات‌ارائه‌شده است،متفاوت هستند.

بـا توجـه بـه موارد بالا لازم است که دسته بندی برحسب منفرد بودن یا نبودن هسته معادله انتگرال،توان تابع مجهـول درزیر علامت انتگرال،حد متغیر مورد نظردر انتگرال گیری،وجود یا عدم وجود تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال گیری انجام گیرد.

ابتدا معادلات انتگرال را به دو نوع عمده تقسیم می کنیم که قبلاً در مورد آنها توضیح داده شده است.

الف)معادلات انتگرال ولترا

ب)معادلات انتگرال فردهلم

هر یک از معادلات انتگرال فردهلم یا ولترا به دو نوع زیر تقسیم می شوند:

الـف)معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهرمی شوندکه این نوع معادلات را،معادلات انتگرالی خطی می گوییم،نظیر:

$$g(s) = 2s + \lambda\int_0^1 (s+t)g(t)dt$$

که جواب دقیق مساله فوق بصورت:

$$g(s) = [12(2-\lambda)s + 8\lambda]/(12 - 2\lambda - \lambda^2)$$

خواهد بود.

ب)معـادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال به صورت غیر خطی ظاهر می شوند که این نـوع معـادلات را ،معـادلات انـتگرال غیـر خطـی مـی گوییـم نظیـر: $f(x) = \lambda\int_a^b F(x,y,f(y))dy$

که در آن $F(x,y,z)$ نسبت به z غیر خطی است.

معادلات انتگرال خطی و غیر خطی دسته مهمی ازمعادلات انتگرال را تشکیل می دهند،لیکن از آنجا که بسیاری‌ازمعادلات دیفرانسیل معمولی ومعادلات با مشتقات جزئی به معادلات انتگرالی غیرخطی‌تبدیل می شوند،لذا این دسته از معادلات از اهمیت ویژه ای برخوردارند. هر یک از معادلات انتگرال فردهلم یا ولترا،از نوع خطی یا غیر خطی به دو نوع زیر تقسیم می شوند:

الف)معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول به غیر از زیر علامت انتگرال،در جای دیگر ظاهر نشده است که این معادلات به معادلات انتگرال نوع اوّل موسومند، نظیر:

$$g(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

ب)معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول خارج از علامت انتگرال گیری هم ظاهر می شود که به این نوع از معادلات، معادلات انتگرالی نوع دوّم گویند،نظیر:

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

هر یک از معادلات انتگرالی نوع اول یا دوم به دو نوع زیر تقسیم می شوند :

الف)معادلات انتگرالی که هسته آنها نامحدود ویا دامنه انتگرالگیری در آنها بی کران است.

که این نوع معادلات را معادلات انتگرالی منفرد می گوییم نظیر:

$$f(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}f(y)dy$$

ب)معادلات انتگرالی که هم هسته آنها کرانداراست وهم دامنه انتگرال گیری در آنها متناهی است که این نـوع معادلات،به معادلات انتگرالی نامنفرد موسومند،نظیر:

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_0^1 (x+y)f(y)dy$$

حل معادلات انتگرالی منفرد، در حالت کلی بسیار مشکل تر است، مگر اینکه هسته آنها تابع خاصی باشد.

معادلات‌انتگرالی‌غیرخطی،آنقدرمتنوع وگوناگون هستند که طبقه بندی‌خاصی‌برای آنها موجودنیست،مع الوصـف دو دسته بندی مهم آنها به صورت زیراست:

الف)معادلاتی که در آنها یکی از دو تابع زیر علامـت انتگـرال یـا خـارج از علامـت انتگـرال یـا هـر دو،بطـور غیرخطی به تابع مجهول $\varphi(x)$ وابستگی دارند،یعنی معادلاتی بفرم:

$$\int_0^1 H[x,y,\varphi(y)]dy=g[x,\varphi(x)]$$

ب)معادلاتیکه شامل یک تابع غیر خطی هستند، نظیر:

$$\int_0^1\int_0^1 k(x,y,z)\varphi(y)\varphi(z)dydz$$

معادلات نوع (الـف) انـواع جـالبی دارنـد،بـه خصـوص حـالتی کـه تـابعH ، بـه صـورت حـاصلضرب دو تـابع $L(y,\varphi(x)),k(x,y)$ باشد،

یعنی معادله ای بصورت:

$$g(x,\varphi(x)]=\int_0^1 k(x,y)L[y,\varphi(y)]dy$$

A.Hammerstein تحقیقات وسیعی روی این گونه معادلات انجام داده است

در حالت خاص اگر بتوانیم معادله: $g[x,\varphi(x)] = \psi(x)$ را برای تابع مجهول $\varphi(x)$ حل کنیم،

آنگاه می توانیم معادله زیر را داشته باشیم:

$$\psi(x) + \int_0^1 k(x,y) f[y,\psi(y)]dy = 0$$

که معادله فوق را،شکل استاندارد معادلات Hammerstein می نامیم.

فرم غیر همگن معادله فوق را به عنوان معادله انتگرال غیرخطی Hammerstein معرفی می کنیم:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s) g(s, y(s)) ds \quad , \quad a \le t \le b$$

که در آن $-\infty < b < \infty$ و g,k,f توابع معلوم و y تابع مجهول(جواب معادله)است

۱-۳- هسته یک معادلهٔ انتگرال

اگر معادلات انتگرال نوع اول نظیر:

$$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

یا فرم غیر خطی Hammerstein نظیر:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s) g(s, y(s)) ds$$

را در نظر بگیریم،همانطوریکه می دانیم تابع دو متغیره k را هسته این معادلات می نامیم.

در حالت کلی $k : IR^2 \to C$ مگر خلاف این تصریح شود.در همه بحث های مر بوط به یک معادلهٔ انتگرال،اعم از نظریهٔ آنها ویا روشهای عددی جهت حل آنها،هسته نقش مهمی را ایفاء می کند.

بر حسب اینکه هستهٔ معادله انتگرال تبهگن،متقارن،هرمیتی یا نرمال باشد،حل معادله جزئیات بیشتری را طلب می کند.

هر یک از ویژگیهای مذکور می تواند، تأثیر مهمی در سرنوشت جواب معادله بگذارد،یکی از ویژگیهایی که هسته در صورت دارا بودن آن،به معادله انتگرال مورد نظر،زیبائی قابل توجهی را می بخشدوحل معادله را راحت تر می کند ویژگی تبهگن بودن است که بصورت زیر تعریف می شود:

تعریف:هستهk را یک هسته تبهگن(degenerate) گوییم ،هرگاه هسته مذکور را بتوان به صورت مجموع حاصلضرب های توابع یک متغیره نوشت یعنی:

$$k(s,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(s)b_i(t)$$

جایی که مجموعه توابع $\{a_i,1\le i\le n\}$ ، $\{b_i,1\le i\le n\}$

مستقل خطی اند،لذا هسته تبهگن از آن جهت نقش مهمی را در معادلات انتگرالی ایفاءِ می کند که معادله انتگرال نظیر آن می تواند،توسط یک دستگاه متناهی از معادلات حل شود و لذا جواب معادله را به طور دقیق بدست خواهد داد، در سایر موارد ،ناگزیر به استفاده از یک روش تقریبی جهت حل دستگاه خواهیم بود.

مثال: معادله انتگرال $g(s)=s+\lambda\int_0^1(st^2+s^2t)g(t)dt$ دارای هسته تبهگن است .

تعریف:هستهٔ k را یک هسته هرمیتی گوییم اگر $k(t,s)=\overline{k(s,t)}$،که در آن (ــ) علامت مزدوج مختلط است.

نکته:حالت خاص هسته های هرمیتی، هسته های حقیقی و متقارن است.

تعریف: هسته حقیقی $k(s,t)$ را یک هسته متقارن گوییم اگر: $k(t,s)=k(s,t)$

تعریف: هسته k را نرمال گوییم هرگاه $kk^*=k^*k$ که منظور از $k^*(t,s)$ همان $\overline{k(s,t)}$ است.