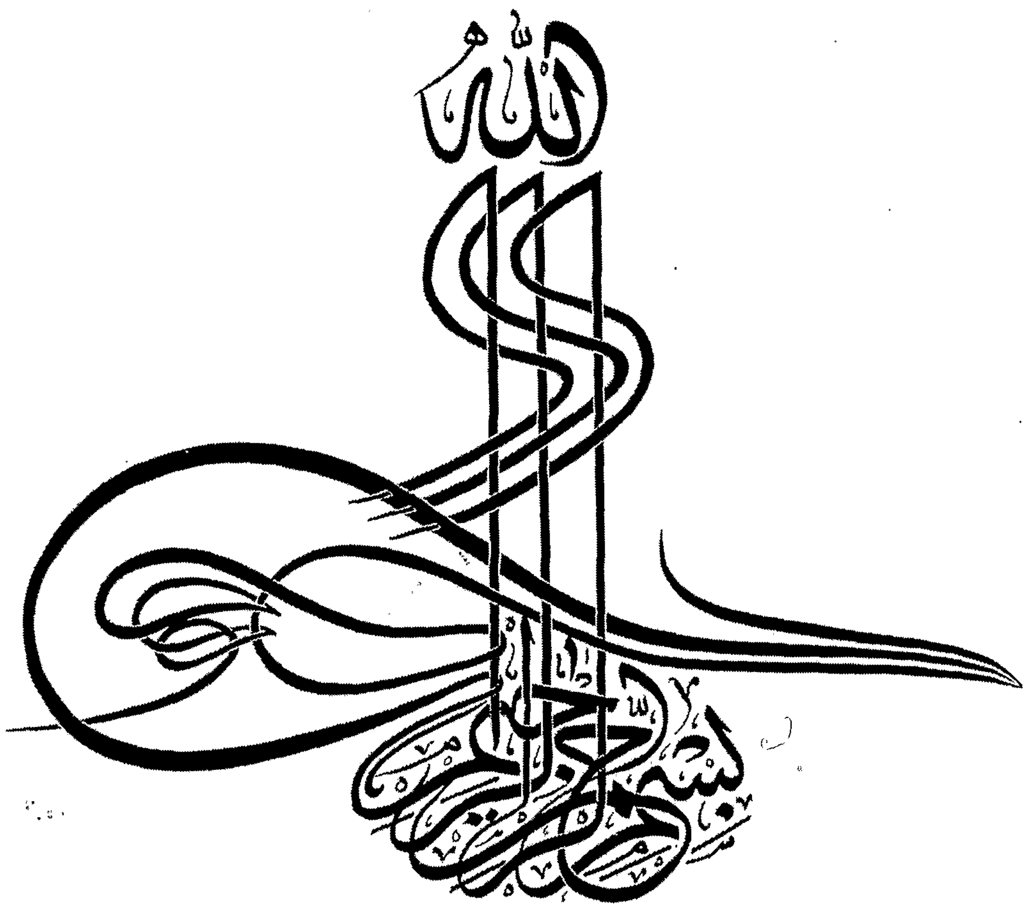
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور مشهد

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

فشرده سازیهای گروههای توپولوژیک

استاد راهنما:

دکتر علی جلیلیان عطار

دانشجو:

مسعود لطفی

شهریور۱۳۸۴

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

تاریخ: ....
شماره: ....
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: فشرده‌سازی‌های گروه‌های توپولوژیک

که توسط آقای مسعود لطفی تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۲۳/۶/۸۴ نمره: ۱۹/۵ نوزده و نیم درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر علی جبلیان عطار	استاد راهنما	استادیار	
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
دکتر فاطمه حلی قانع استادیار سمی	استاد ممتحن	دانشیار	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

هوالعلیم

عبادت به جز خدمت خلق نیست   به تسبیح و سجاده و دلق نیست

حمد و سپاس او را که جاودانه و ابدی است

خداوند بزرگ را سپاس می‌گویم که توفیق تحصیل علم را تا این مقطع به حقیر عطا فرمود و از درگاه متعالش توفیق تحصیل در مراحل بالاتر را خواستارم.

در اینجا لازم می‌دانم از تمام افرادی که به نوعی در این سالها از مساعدتشان برخوردار بوده‌ام و همچنین از اساتید محترمی که زحمت زیادی برای اینجانب کشیده‌اند تشکر کنم.

از جناب آقای دکتر علی جلیلیان عطار که راهنمایی بنده و سرکار خانم دکتر ثریا طالبی که مشاوره بنده را در نگارش این پایان نامه برعهده داشته اند، کمال تشکر را دارم.

در ادامه از دوست و همکار عزیزم آقای سید علی سعدآبادی که در کار تایپ پایان نامه مرا یاری دادند، صمیمانه سپاسگزارم. همچنین در پایان، از جناب آقای دکتر موسی الرضا شمسیه زاهدی که در مراحل مختلف تحصیل راهنمای اینجانب بوده و هستند، تشکر و قدردانی می نمایم.

مسعود لطفی

مرداد ۱۳۸۴

چراغ خانه دل هست، پدر		نور و امید به دل بست، پدر

گل اگر رست ز سنگ، به دعای مادر است		گل اگر گشت جهان، به هوای مادر است

تقدیم به:

پدر،مادر و خانواده عزیزم

همسر خوبم و خانواده محترمش

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

فصل اول: مفاهیم و تعاریف مقدماتی ۱

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ مفهوم فشرده سازی ۳

۱-۳ معرفی دو رده مهم از گروههای توپولوژیک ۵

۱-۴ نمایش صادق توپولوژیکی از گروه توپولوژیک G ۱۰

فصل دوم: بزرگترین آمبیت S(G) ۱۳

۲-۱ مقدمه ۱۴

۲-۲ بزرگترین آمبیت S(G) ۱۷

فصل سوم: M_G وگروههای بسیار میانگین پذیر ۲۰

۳-۱ مقدمه ۲۱

۳-۲ G- فضای فشرده مینیمال جهانی ۲۱

۳-۳ گروههای بسیار میانگین پذیر ۳۴

فصل چهارم: فشرده سازی رولکه ۳۶

۴-۱ مقدمه ۳۷

۴-۲ فشرده سازی رولکه ۳۸

فصل پنجم: فشرده سازیWAP ۴۶

۵-۱ مقدمه........ ۴۷

۵-۲ فشرده سازی تقریباً دوره ای ضعیف........ ۴۷

فصل ششم: فضای متریک جهانی اوریسون U وگروه Is(U) ۶۲

۶-۱ مقدمه........ ۶۳

۶-۲ گروه توپولوژیک Is(U)........ ۶۴

واژه نامه........ ۸۰

مراجع........ ۹۰

چکیده :

هر گروه توپولوژیک G، تعدادی فشرده سازیهای طبیعی دارد که می تواند ابـزار مفیـدی بـرای مطالعه G باشد. ما در این نوشته، ساختارهای زیر را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم:

۱- بزرگترین آمبیت S(G)، فشرده سازی متناظر با جبر همه توابـع پیوسـته یکنواخـت راسـت روی G است.

۲- فشرده سازی رولکه R(G)، فشرده سازی متناظر با جبر همه توابع پیوسته یکنواخت راست و چپ روی G است.

۳- فشرده سازی تقریباً دوره ای ضعیف W(G)، پوشـاننده نـیم گـروه نـیم توپولوژیـک از G است.

G- فضای فشرده مینیمال جهانی $X = M_G$، توسط خواص زیر توصیف می شود:

۱- X ، زیرگروههای G-پایای بسته سره ندارد.

۲- برای هر G- فضای فشرده Y، یک G- نگاشت $X \to Y$ موجود است.

در این رساله به طور مختصر با گروههای بسیار میانگین پذیر آشنا خواهیم شد. Is(U)، کـه در آن U فضای متریک جهانی اوریسون است، یک مثال خاص از گروههای توپولوژیک است که بسیار میانگین پذیر است.

فشرده سازی رولکه، توسط مگرلیشویلی، برای اثبات این که W(G) می توانـد یـک مجموعـه تک عضوی باشد، مورد استفاده قرار گرفت.

همچنین فشرده سازی رولکه، برای اثبات این که گروههای معین مینیمـال هسـتند، مـی توانـد استفاده شود.

در پایان، با اندکی تغییردرفضای متریک جهانی اوریسون، یک فشرده سازی رولکه از این گروه توپولوژیک به دست خواهیم آورد.

فصل اول

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

فصل اول

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا با مفهوم فشرده سازی[۱] آشنا خواهیم شد؛ سپس بـه معرفـی دو گـروه خاص از گروههای توپولوژیک خواهیم پرداخت. ارائه یک نمایش صادق توپولوژیکی[۲] از یک گروه توپولوژیک G، که به وسیله همیومرفیسم های[۳] یک فضای فشرده، یا ایزومتریهـای[۴] یـک فضای باناخ[۵] حاصل می شود، هدف بعدی ما در این فصل خواهد بود.

---

۱. compactification

۲. topologically faithful representation

۳. homeomorphisms

۴. isometries

۵. Banach space

۱-۲ مفهوم فشرده سازی

اگر بخواهیم مفهوم فشرده سازی را بهتر درک نماییم، مفیدتر است که تعریف ابتدایی از فشرده سازی ارائه دهیم؛

تعریف ۱-۲-۱ : گوییم فضای توپولوژیک X، در فضای توپولوژیک Y نشانیده شده است اگر X با زیر فضایی از Y همیومرف باشد(دو فضای توپولوژیک X و Y را همیومرف گوییم اگر $f : X \to Y$، یک به یک و پوشا باشد به طوری که f و f^{-1} پیوسته باشند). علاوه بر این، هرگاه Y یک فضای فشرده باشد، آنگاه Y یک فشرده سازی X نامیده می شود.

فشرده سازی X ، اغلب با افزودن یک یا چند نقطه به X و سپس تعریف توپولوژی مناسبی بر مجموعه بزرگ شده انجام می شود، به طوری که فضای بزرگ شده، فشرده و شامل X به عنوان زیر فضا باشد.

به عنوان مثال، خط حقیقی R با توپولوژی معمولی μ را درنظر می گیریم. دو نقطه جدید $+\infty$ و $-\infty$ را به R افزوده و مجموعه بزرگ شده را با $R^* = R \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ نشان داده، آن را خط حقیقی وسعت یافته می نامیم. رابطه ترتیبی در R را می توان با تعریف $-\infty < a < +\infty$ به‌ازای هر $a \in R$ وسعت داد.

رده زیرمجموعه های R^* به شکل زیر است:

$$(a,b) = \{x; a < x < b\}, (a,+\infty] = \{x; a < x\}, [-\infty, a) = \{x; x < a\}.$$

یک پایه برای توپولوژی μ^* بر R^* است. به علاوه (R^*, μ^*) یک فضای توپولوژیک و شامل (R, μ) به عنوان زیرفضاست؛ در نتیجه، یک فشرده سازی (R, μ) است. بدیهی است که R در R^* چگال است و این برای هر فشرده سازی دیگر نیز ممکن است برقرار باشد. [۱]

هر گروه توپولوژیک G نیز، تعدادی فشرده سازیهای طبیعی دارد. این فشرده سازیها می توانند

به عنوان فضای ایده آل ماکسیمال[1] جبرهای توابع معین و یا فشرده سازیهای ساموئل برای یکنواختیهای معین از G توصیف شوند. برخی از فشرده سازیهای G، یک ساختار جبری را منتقل می کنند و ممکن است برای مطالعه G مفید واقع شوند.

۱. maximal ideal space

۱-۳ معرفی دو رده مهم از گروههای توپولوژیک

تعریف ۱-۳-۱ : اگر G،یک گروه ویک فضای توپولوژیک باشد و داشته باشیم:

i) نگاشت $(x,y)\to xy$ از $G\times G$ به توی G، یک نگاشت پیوسته از ضرب دکارتی $G\times G$ به توی G باشد؛

ii) نگاشت $x\to x^{-1}$ یک نگاشت پیوسته از G به توی G باشد؛

آنگاه G یک گروه توپولوژیک نامیده می شود.

فرض کنید X و Y مجموعه های دلخواهی بوده و $A\subset X$ و $B\subset Y$. رده همه توابع از X به توی Y را با $\xi(X,Y)$ نشان داده و رده همه توابع از X به توی Y که A را به توی B می برد، با $F(A,B)$ نمایش می دهیم:

$$F(A,B)=\{f\in\xi(X,Y):f[A]\subset B\}.$$

اعضای δ را به صورت

$$\{f\in\xi(X,Y):f(x)\in G\}$$

درنظر می گیریم که در آن $x\in X$ و G زیرمجموعه بازی ازY است. بنابراین می توان مجموعه δ را به صورت

$$\delta=\{F(x,G):x\in X,\ \text{است Y بازدر G}\}$$

نمایش داد.

تعریف ۱-۳-۲ : فرض کنید X وY فضاهایی توپولوژیک بوده و Γ رده زیرمجموعه های فشرده X و Λ رده زیرمجموعه های باز Y باشد. توپولوژی τ بر $\xi(X,Y)$ تولید شده توسط

$$\delta=\{F(A,G):A\in\Gamma,G\in\Lambda\}$$

توپولوژی فشرده- باز[1] بر $\xi(X,Y)$ نامیده می شود و δ زیر پایه معرف برای τ است.

تعریف ۱-۳-۳ : گوییم فضای (X,d) با فضای متریک (Y,e) ایزومتر است اگروتنها اگر یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f:X \to Y$ موجود باشد که فاصله را حفظ نماید؛ یعنی به ازای هر $p,q \in X$؛

$$d(p,q)=e(f(p),f(q))$$

تبصره ۱-۳-۴ : ایزومتری یک رابطه هم ارزی است.

فرض کنید F یک میدان و E یک گروه آبلی باشد. فرض کنید برای هر $\alpha \in F$ و $x \in E$ عنصر αx،حاصلضرب α و x نامیده شود. اگر برای هر $x,y \in E$ و $\alpha,\beta \in F$ داشته باشیم:

i) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$؛

ii) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$؛

iii) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$؛

iv) $1x=x$؛

در این صورت E یک فضای خطی(یا فضای برداری) و F میدان اسکالر E نامیده می شود.

اگر E یک فضای خطی(یا فضای برداری) روی میدان اعداد حقیقی(R)یا میدان اعداد مختلط(C)باشد، یک نرم روی E یک تابع با مقدار حقیقی است که دارای خواص زیر است:

i) $\|x\|>0$ اگر $x \neq 0$؛

ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$ برای هر $x\in E,\alpha\in F$؛

iii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ برای هر $x,y\in E$؛

در این صورت E یک فضای خطی نرمدار[2] است.

---

۱. compact-open topology

۲. normed linear space

تعریف ۱-۳- ۵ : یک ایزومتری خطی[1] T، یک نگاشت خطی T از یک فضای خطی نرمدار E به توی فضای خطی نرمدار N است که حافظ نرم است؛ بدین معنی که برای هر $x \in E$ داریم $\|Tx\| = \|x\|$.

تعریف ۱-۳-۶ : یک فضای خطی نرمدار، کامل نامیده می شود اگر هر دنباله کُشی[2] در فضا همگرا باشد؛ یعنی برای هر دنباله $\{f_n\}$ در یک فضا، یک عنصر f در فضا موجود باشد به طوری که $f_n \to f$.

تعریف ۱-۳-۷ : یک فضای خطی نرمدار کامل، یک فضای باناخ نامیده می شود.

فرض کنید Y^X گردایه ای از همه توابع از X به توی Y باشد. به ازای هر عنصر $x \in X$، نگاشت e_x از Y^X به توی Y که با $e_x(f) = f(x)$ تعریف شده است، نگاشت ارزیابی[3] در x نامیده می شود. اگر $x_0 \in X$ و G زیرمجموعه بازی از Y باشد، جمیع توابعی که نقطه $x_0 \in X$ را به توی مجموعه باز G از Y می نگارند، یک توپولوژی حاصلضربی است که توپولوژی نقطه- باز نامیده می شود.به صورت دیگر، می توان توپولوژی نقطه- باز بر Y^X را کوچکترین توپولوژی بر Y^X تعریف کرد که توابع ارزیابی $e_x : Y^X \to Y$ نسبت به آن پیوسته هستند.

تعریف ۱-۳-۸ : دنباله $\{f_n\}$ در Y^X همگرا به $g \in Y^X$ نسبت به توپولوژی نقطه- باز بر Y^X است اگروتنهااگر $\{f_n\}$ نقطه وار همگرا به g باشد.در پرتو این مسأله، توپولوژی نقطه- باز بر Y^X، توپولوژی همگرایی نقطه وار[4] نیز نامیده می شود.

تعریف ۱-۳-۹ : اگر X مجموعه ای از نقاط باشد و F گردایه ای از توابع حقیقی روی

---

۱. linear isometry

۲. Cauchy

۳. evaluation mapping

۴. pointwise convergence topology

X باشد، همیشه ضعیف ترین توپولوژی روی X موجود است بـه طـوری کـه هـر تـابع در F پیوسته است. این توپولوژی، توپولوژی ضعیف[1] تولید شده توسط F نامیده می شود.

توجه ۱-۳-۱۰ : اگر X یک فضای باناخ باشـد، منظـور از توپولـوژی ضـعیف بـر X، همیشـه توپولوژی ضعیف القاء شده توسط خانواده تمام تابعک های خطی و کراندار بر X است.

- حال پس از بیان مقدمات بالا، دو رده مهم از گروههای توپولوژیک را در زیـر معرفـی خواهیم کرد:

گروههایی به شکل $H(K)$ که K فشرده است و گروههـایی بـه شـکل $Is(M)$ کـه M متریـک اسـت. بـرای یـک فضـای فشـرده K، فـرض کنیـد $H(K)$ گـروه توپولوژیـک از همـه خود- همیومرفیسم های K همراه با توپولوژی فشرده- باز باشد.برای یک فضـای متریـک M، فرض کنید $Is(M)$ گروه توپولوژیک از همه ایزومتریهای به توی خودش باشد. توپولوژی کـه روی $Is(M)$ درنظر می گیریم، توپولوژی فشرده- باز یا بـه طـور معـادل توپولـوژی همگرایـی نقطه وار است.

اگر B یک فضای بانـاخ باشـد، نمـاد $Is_0(B)$ را بـرای نشـان دادن گـروه توپولوژیـک از همـه ایزومتریهای خطی به کار می بریم. توپولوژی که روی $Is_0(B)$ درنظـر مـی گیـریم، توپولـوژی همگرایی نقطه وار است که این توپولوژی، توپولوژی عملگری قوی[2] نیز نامیده می شود.

اگر بخـواهیم توپولـوژی عملگـری ضـعیف[3] را روی $Is_0(B)$ معرفـی کنـیم، ایـن توپولـوژی، توپولوژی اکتسابی از ضرب $(B_\omega)^B$ است که در آن B_ω، B با توپولوژی ضعیف اسـت. $(B_\omega)^B$ به تعبیری تمامی توابع $B \to B_\omega$ است و یا ضرب دکارتی B_ω هاست که به اندازه عدد اصـلی

۱. weak topology

۲. strong operator topology

۳. weak operator topology

B در یکدیگر ضرب می شوند. اگر B را با توپولوژی ضعیف درنظر بگیریم و β خانواده همه ضربهای دکارتی $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ باشند که هر یک از $V_1, V_2, \ldots, V_n$ زیرمجموعه های باز از B_ω و n به اندازه عدد اصلی B است، اشتراک هر دو عضو از β یک عضو از β است؛ چراکه

$$(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n) \bigcap (R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n) = (V_1 \bigcap R_1) \times (V_2 \bigcap R_2) \times \ldots \times (V_n \bigcap R_n)$$

و β پایه ای برای یک توپولوژی از $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ است.[۶]

قضیه ۱-۳-۱۱ : یک خانواده β از مجموعه ها، یک پایه برای یک توپولوژی از مجموعه $X = \bigcup\{B : B \in \beta\}$ است اگروتنهااگر برای هر دو عضو U و V از β و هر نقطه x در $U \bigcap V$، Wای در β موجود باشد به طوری که $x \in W$ و $W \subset U \bigcap V$. [۶]

بنابراین با توجه به تعریف توپولوژی حاصلضربی، توپولوژی $(B_\omega)^B$ یک توپولوژی حاصلضربی است.

توپولوژی ضعیف روی $Is_0(B)$، با ساختار گروه سازگار نیست. به عبارت دیگر اگر B انعکاسی[۱] باشد($B = B^{**}$) توپولوژی های ضعیف و قوی روی $Is_0(B)$ موافق هستند. در فصل پنجم به تفصیل در این مورد صحبت خواهیم کرد. [۹]

۱. reflexive

۱-۴ نمایش صادق توپولوژیکی از گروه توپولوژیک G

تعریف ۱-۴-۱ : اگر X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد، توپولوژی ضعیف از X^*، ضعیف ترین توپولوژی از X^* است به طوری که همه تابعک ها در X^{**} پیوسته هستند. این توپولوژی w^*- توپولوژی[۱] بر X^* نامیده می شود.

تعریف ۱-۴-۲ : یک فیلتر[۲] N در یک مجموعه X، یک خانواده از زیر مجموعه های غیرتهی X است به طوری که:

i) اشتراک هر دو عضو از N همواره به N تعلق داشته باشد.

ii) اگر $A \in N$ و $A \subset B \subset X$ در این صورت $B \in N$ باشد.

هر گروه توپولوژیک G دارای یک نمایش صادق توپولوژیکی است که به وسیله همیومرفیسم های یک فضای فشرده یا ایزومتریهای یک فضای باناخ حاصل می شود. این بدین معناست که G (به عنوان یک گروه توپولوژیک) با یک زیرگروه از $H(K)$ برای یک Kی فشرده، ونیز با یک زیرگروه از $Is_0(B)$ برای یک فضای باناخ B، یکریخت است.

تعریف ۱-۴-۳ : نگاشت $G \to H(K)$ یک نمایش صادق توپولوژیکی از G است، اگر یک نشاننده یکریخت باشد.

برای اینکه یک نمایش صادق توپولوژیکی از G ارائه دهیم، B را فضای باناخ $RUC^b(G)$، متشکل از همه توابع مختلط کراندار پیوسته یکنواخت راست روی G درنظر می گیریم. نرمی که روی $f \in RUC^b(G)$ درنظر می گیریم، سوپریمم نرم یا $\|f\| = Sup|f(x)|$ است.

---

۱. weak*-topology

۲. filter

تعریف ۱-۴-۴ : تابع f روی G، پیوسته یکنواخت راست است اگر:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V \in \mathrm{N}(G) \forall x, y \in G\, (xy^{-1} \in V \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$$

که در آن N یک فیلتر از همسایگی های یکه درG است.

تعریف ۱-۴-۵ : گوییم گروه توپولوژیک G روی یک فضای توپولوژیک X عمل می کند، اگر یک نگاشت پیوسته $\tau : G \times X \to X$ وجود داشته باشد که در آن تصویر (g,x) که $(g,x) \in G \times X$ معمولاً به وسیله $\tau_g \cdot x$ یا $g \cdot x$ نشان داده می شود و دارای خواص زیر است:

$$e_G \cdot x = x, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall g, h \in G.$$

نشاننده $G \to Is_0(B)$ از عمل G روی B تعریف شده با $gf(x) = f(g^{-1}x)$ که $g, x \in X$ و $f \in B$ به دست می آید.عمل G روی B، نگاشتی پیوسته است که با $gf(x) = f(g^{-1}x)$ تعریف می شود. اما می توان نگاشت $\varphi : G \to Is_0(B)$ را با $g \mapsto \varphi(g)$ که $\varphi(g) : B \to B$ یک ایزومتری خطی است، با ضابطه $\varphi(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$ معرفی کرد که درآن $g, x \in G$ و $f \in B$ است. دیاگرام زیر به وضوح روابط بالا را نشان می دهد:

$$\varphi : G \to Is_0(B)$$
$$g \mapsto \varphi(g) : B \to B$$

$$\varphi(g)(f)(x) = gf(x) = f(g^{-1}x)$$

بنابراین $G \to Is_0(B)$ به وضوح یک به یک و یک نشاننده است.

فرض کنید K گوی واحد از فضای دوگان B^* باشد، یعنی $K = \{h : B \to C; \|hx\| \le 1, \forall x \in B\}$. ضعیف ترین توپولوژی از B^* را به طوری که همه تابعکهای در B^{**} پیوسته باشند، درنظر می گیریم. همان طور که مشخص است، توپولوژی تعریف شده روی B^*، w^*- توپولوژی است.

قضیه ۱-۴-۶ :(باناخ- آلاقلو)[۱]

اگر V یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و اگر $K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \le 1, \forall x \in V\}$ در این صورت K، w^* - فشرده[۲] است.

با توجه به قضیه بالا، K فشرده است. نگاشت طبیعی $\varphi : Is_0(B) \to H(K)$ را با $f \mapsto \varphi(f)$ درنظر می گیریم که $\varphi(f) : K \to K$ با ضابطه $\varphi(f)(h) = h(f)$ تعریف می شود ودر آن $f \in Is_0(B)$ و $h \in K$ است. به راحتی تحقیق می شود که φ یک به یک و همریختی است. بنابراین φ یک نشاننده یکریخت است. دیاگرام زیر روابط بالا را به خوبی نشان می دهد:

$$\varphi : Is_0(B) \to H(K)$$
$$B \xrightarrow{f} B \mapsto \varphi(f) : K \to K$$
$$\varphi(f)(h) = h(f)$$

بنابراین یک نمایش صادق توپولوژیکی از G توسط همیومرفیسم های K به دست آوردیم.

از این به بعد تمامی نگاشتها پیوسته فرض می شوند و خاصیت فشرده بودن وهاسدورف[۳] بودن را نیز شامل می شوند.

۱. Banach-Alaoglu

۲. weak*- compact

۳. Hausdorff