فصل اول

تاریخچه

تاریخچه:

در این بخش مروری بر تعدادی از کارهایی که مرتبط با موضوع این رساله هستند، انجام می‌دهیم.

دی بور[۱] در سال ۱۹۶۶ در [۱۶] روش هم‌محلی[۲] اسپلاین‌های مکعبی را برای مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای به کار برد و نشان داد که مرتبه همگرایی از $o(h^2)$ است. ولی بعد از آن آرچر[۳] در سال ۱۹۷۷ در [۵] و دانیل[۴] و شوآرتز[۵] در سال ۱۹۷۵در [۱۵] مرتبه همگرایی این روش را برای مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای از مرتبه $o(h^4)$ به دست آوردند.

در سال ۱۹۸۸ بر پایه‌ی روش‌های ارائه شده در [۵] و [۱۵] هاستیس[۶] و واولیس[۷] و رایس[۸] در [۲۰] این روش را برای حل مسائل مقدار مرزی بیضوی روی مستطیل به دست آوردند.

برای حل معادله‌ی دو هارمونیک با شرایط مقدار مرزی روش‌های زیادی بسط داده شده است، که از جمله‌ی آن‌ها روش تفاضلات متناهی[۹] و عناصر متناهی[۱۰] می‌باشند در هریک از این روش‌ها از دو شیوه‌ی مستقیم و آمیخته استفاده می‌شود. در شیوه مستقیم، معادله‌ی دوهارمونیک به طور مستقیم گسسته سازی می‌شود. برای مثال، فرمول‌های روش تفاضل متناهی برای تقریب u و $D_x u$, $D_y u$ در [۷]، فرمول‌های تفاضل متناهی ۱۳نقطه ای در [۱۱] و [۱۹] و عناصر متناهی

[۱] DeBoor
[۲] collocation
[۳] Archer
[۴] Daniel
[۵] Swartz
[۶] Houstis
[۷] Vavalis
[۸] Rice
[۹] Finite differences
[۱۰] Finite elements

مکعبی هرمیت C^1 در [۲۷] را ببینید.

در شیوه‌ی آمیخته که در [۱۴] ارائه شده است، ابتدا معادله دوهارمونیک به یک دستگاه جفت شده از دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه دوم با مجهولات u و $v = \Delta u$ ساده می‌شود، سپس این دستگاه با روش‌هایی مانند تفاضل متناهی ۵ نقطه ای در[۱۷]، تفاضل متناهی ۹ نقطه ای در [۴]، عناصر متناهی قطعه به قطعه خطی C^0 در [۲۲] و یا عناصر متناهی مکعبی هرمیت C^1 در [۲۱] گسسته سازی می‌شوند.

در [۸] معادله‌ی دوهارمونیک با استفاده از شیوه‌ی مختلط که توسط روش هم‌محلی اسپلاین‌های متعامد گسسته سازی شده، حل شده است و جوابی از مرتبه‌ی ۴ تولید می‌کند.

در این رساله معادله‌ی دوهارمونیک با استفاده از شیوه‌ی مختلط حل می‌شود و دستگاه جفت شده با مجهولات u و $v = \Delta u$ توسط روش‌های هم‌محلی اسپلاین‌های مکعبی گسسته سازی می‌شود.

در [۱۰] یک نوع جدیدی از روش‌های هم‌محلی با استفاده از اسپلاین‌های مکعبی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی فراهم می‌کند که کران‌های خطای به دست آمده بهینه هستند و نشان داده می‌شود که از نظر محاسباتی این روش نسبت به روش‌های دیگر مانند گالرکین [۱۱] با اسپلاین‌های مکعبی موثرتر هستند. هم‌چنین در [۶]، [۱۲]، [۱۸]، [۵]، [۱۵]، [۲۳] روش‌های هم محلی با اسپلاین‌های مکعبی برای معادلات سهموی و بیضوی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که جواب‌های تقریبی از مرتبه‌ی $o(h^4)$ به دست می‌دهند.

در سال ۲۰۰۷ آبیر علی ابوشاما [۱۲] و برنارد بیالکی [۱۳] در [۲] روش هم‌محلی اسپلاین‌های مکعبی را برای حل معادله‌ی دوهارمونیک به کار بردند و جوابی از مرتبه چهار تولید کردند.

[۱۱] Galerkin
[۱۲] Abeer Ali Abushama
[۱۳] Bernard Bialecki

هم‌چنین آن‌ها در سال ۲۰۰۸ و در [۱] این روش را برای حل معادله‌ی پوآسن به کار برده و جوابی از مرتبه چهار به دست آوردند.

فصل دوم

تعاریف و پیش‌نیازها

۲–۱ . مقدمه‌ای بر روش هم‌محلی:

روش هم‌محلی روشی است که توسط آن می‌توانیم بسیاری از مسائل ریاضیات کاربردی مانند معادلات انتگرال یا معادلات دیفرانسیل را حل کنیم.روند کلی این روش به صورت زیر است:

فرض کنید یک عملگر خطی L (مانند یک عملگر انتگرال یا عملگر دیفرانسیل) داشته باشیم و بخواهیم معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\mathrm{Lu} = \mathrm{w},$$

در این معادله w تابعی معلوم و u تابعی مجهول در فضای تابعی V هستند حال یک پایه مرتب $\{\mathrm{v}_۱, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{n}\}$ برای فضای V در نظر گرفته و سعی می‌کنیم معادله را با فرض اینکه :

$$\mathrm{u} = \mathrm{c}_۱\mathrm{v}_۱ + \cdots + \mathrm{c}_\mathrm{n}\mathrm{v}_\mathrm{n},$$

حل کنیم . با توجه به اینکه L یک عملگر خطی است معادله‌ی فوق به معادله‌ی زیر تبدیل می‌-شود:

$$\mathrm{Lu} = \sum_{\mathrm{j}=۱}^{\mathrm{n}} \mathrm{c}_\mathrm{j}\mathrm{Lv}_\mathrm{j} = \mathrm{w},$$

در حالت کلی حل دستگاه فوق و یافتن ضرایب $\mathrm{c}_۱, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}$ به راحتی ممکن نیست، اما روش هایی برای حل تقریبی این معادله وجود دارد، از جمله روش هم‌محلی که به صورت زیر است.

در روش هم‌محلی بردارهای u، w, v_j, $(۱ \leq j \leq n)$ همگی توابع تعریف شده بر روی یک دامنه مشترک هستند. برای حل دستگاه بالا کافی است ضرایب c_j, $(۱ \leq j \leq n)$ را چنان تعیین کنیم که مقادیر توابع w و Lu در n نقطه از پیش تعیین شده یکسان باشند،یعنی:

$$(Lu)(t_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j (Lv_j)(t_i) = w(t_i), \qquad 1 \le i \le n,$$

دستگاه فوق یک دستگاه معادلات خطی است که از آن می‌توان مقادیر ضرایب مجهول c_j را محاسبه کرد. البته توابع v_j و نقاط t_i می‌بایست به گونه ای انتخاب شوند که ماتریس ضرایب با درایه های $\left((Lv_j)(t_i),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n\right)$ نا منفرد باشند. در زمینه روش‌های هم‌محلی نظریات متفاوت و در نتیجه روش‌های جدیدی مانند روش اسپلاین ارائه شده اند. یک انتخاب مناسب از توابع پایه ای برای کاربرد در روش هم محلی مجموعه توابع اسپلاین‌های مکعبی خواهد بود. در اینجا گره ها را متساوی الفاصله انتخاب کرده و از آن‌ها به عنوان نقاط هم‌محلی استفاده خواهیم کرد.

۲-۲. مقدمه‌ای بر اسپلاین‌های مکعبی:

حال به طور مختصر نکاتی را در مورد درونیابی اسپلاین‌های مکعبی می‌آوریم که جزئیات بیشتر در [۱۳] آمده است.

فرض کنید $\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ یک افراز از بازه‌ی $[a, b]$ باشد، اسپلاین مکعبی S_Δ روی Δ، یک تابع حقیقی $S_\Delta: [a, b] \to R$ است که:

۱) $S_\Delta \in C^2[a, b]$ یعنی S_Δ دو بار مشتق پذیر، با مشتقات پیوسته است.

۲) S_Δ روی هر زیر بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ که $i = 0, \ldots, n-1$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۳ است.

هر تابع اسپلاین باید حداقل در یکی از شرایط زیر صدق نماید:

$$۱)\ S''_\Delta(y,x_۰) = S''_\Delta(y,x_n)$$

$$۲)\ S_\Delta^{(k)}(y,a) = S_\Delta^{(k)}(y,b), \quad k = ۰,۱,۲$$

$$۳)\ S'_\Delta(y,a) = y'_۰, \quad S'_\Delta(y,b) = y'_n$$

حال قرار می‌دهیم:

$$S''_\Delta(y,x_j) = M_j, \qquad j = ۰,۱,\ldots,n$$

$$S_\Delta(y,x_i) = y_i, \qquad i = ۰,۱,\ldots,n$$

$$S''_\Delta(y,x) = M_j \frac{x_{j+۱} - x}{x_{j+۱} - x_j} + M_{j+۱} \frac{x - x_j}{x_{j+۱} - x_j}, \quad j = ۰,۱,\ldots,n-۱$$

با انتگرال‌گیری از عبارت بالا به دست می‌آوریم:

$$S'_\Delta(y,x) = -M_j \frac{(x_{j+۱} - x)^۲}{۲h_{j+۱}} + M_{j+۱} \frac{(x - x_j)^۲}{۲h_{j+۱}} + A_j,$$

$$x \in [x_j, x_{j+۱}],\ ۰ \le j \le n-۱,$$

بار دیگر از عبارت بالا انتگرال می‌گیریم:

$$S_\Delta(y,x) = \frac{M_j}{۶h_{j+۱}}(x_{j+۱} - x)^۳ + \frac{M_{j+۱}}{۶h_{j+۱}}(x - x_j)^۳ + A_j(x - x_j) + B_j,$$

$$x \in [x_j, x_{j+۱}], \quad ۰ \le j \le n-۱,$$

از آن‌جایی که $S_\Delta(y,x_j) = y_j$ و $S_\Delta(y,x_{j+۱}) = y_{j+۱}$ داریم:

$$\begin{cases} M_j \frac{h_{j+1}^2}{6} + B_j = y_j \\ M_{j+1} \frac{h_{j+1}^2}{6} + A_j h_{j+1} + B_j = y_{j+1} \end{cases}$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j) \\ B_j = y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6} \end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$S_\Delta(y,x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_j) + \gamma_j(x - x_j)^2 + \delta_j(x - x_j)^3, \tag{1.2}$$

به طوری که:

$$\alpha_j = y_j, \quad \beta_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6} h_{j+1}, \quad \gamma_j = \frac{M_j}{2}, \quad \delta_j = \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}},$$

از آن‌جا که هر $S'_\Delta(y,x)$ در هر x_j پیوسته است داریم:

$$S'_\Delta(y, x_j^-) = S'_\Delta(y, x_j^+)$$

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3} h_j + \frac{h_j}{6} h_{j-1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{3} M_j - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1}$$

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

حال از رابطه‌ی بالا به دست می‌آوریم:

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \qquad (2.2)$$

به طوری که:

$$\mu_j + \lambda_j = 1, \quad \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}},$$

$$d_j = \frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left[\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\right],$$

۲– ۳ . تعاریف و پیش‌نیازها:

فضای اسپلاین‌های مکعبی را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$S_3 = \left\{v \in C^2[0,1]: v\,|_{[x_{i-1},x_i]} \in P_3, \ \ i = 1, \dots, N+1\right\}, \qquad (3.2)$$

به طوری‌که P_3 مجموعه‌ی چندجمله‌ای های از درجه‌ی حداکثر۳ است و همچنین داریم:

$$S^D = \{v \in S_3 : v(0) = v(1) = 0\}, \qquad (4.2)$$

مساله‌ی مقدار مرزی دیریکله برای معادله‌ی پوآسن و دوهارمونیک به ترتیب به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (6.2)$$

به طوری‌که Δ لاپلاسین و $\Omega = (۰,۱) \times (۰,۱)$ و $\partial\Omega$ مرز Ω باشد و n بردار نرمال بر u در (x, y) می‌باشد.

تعریف: ضرب تانسوری $A_{k\times l}$ در $B_{m\times n}$ بدین صورت است که، تک تک درایه های ماتریس A در کل ماتریس B ضرب می‌شود و داریم:

$$A_{k\times l} \otimes B_{m\times n} = C_{mk\times nl} \tag{۷.۲}$$

به عبارت دیگر اگر:

$$\phi = (C_۱ \otimes C_۲)\psi. \tag{۸.۲}$$

آن‌گاه:

$$\varphi_{i,j} = \sum_{m=۱}^{N} c_{i,m}^{(۱)} \sum_{n=۱}^{N} c_{j,n}^{(۲)} \psi_{m,n}\,, \qquad i, j = ۱, \dots, N\,, \tag{۹.۲}$$

به طوری که:

$$C_۱ = \left(c_{i,m}^{(۱)}\right)_{i,m=۱}^{N}, \quad C_۲ = \left(c_{j,n}^{(۲)}\right)_{j,n=۱}^{N}, \varphi = \left[\varphi_{۱,۱}, \dots, \varphi_{N,N}\right]^T,$$

$$\psi = \left[\psi_{۱,۱}, \dots, \psi_{N,N}\right]^T, \tag{۱۰.۲}$$

هم‌چنین توجه کنید که:

$$\left[\varphi_{۱,۱}, \dots, \varphi_{N,N}\right]^T = \left[\varphi_{۱,۱}, \dots, \varphi_{۱,N}, \dots, \varphi_{N,۱}, \dots, \varphi_{N,N}\right]^T,$$

$$\left[\psi_{۱,۱}, \dots, \psi_{N,N}\right]^T = \left[\psi_{۱,۱}, \dots, \psi_{۱,N}, \dots, \psi_{N,۱}, \dots, \psi_{N,N}\right]^T.$$

$\rho_x = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ و $\rho_y = \{y_j\}_{j=0}^{N+1}$، افرازهای یکنواختی از $[0,1]$ به ترتیب در جهت x, y می-باشند که :

$$x_i = ih, \qquad y_j = jh, \qquad i, j = 0, \dots, N+1$$

توجه کنید که در سرتاسر این رساله، $x_i = y_i = ih$ است.

با بسط افراز یکنواخت $\rho_x = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ به خارج از $[0,1]$ و استفاده از :

$$x_i = ih, \qquad i = -3, -2, -1, N+2, N+3, N+4$$

و معرفی $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ برای $i = -2, \dots, N+4$ پایه های S_3 را که با $\{B_m\}_{m=-1}^{N+2}$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$B_m(x) = \begin{cases} g_1[(x - x_{m-2})/h], & x \in I_{m-1}, \\ g_2[(x - x_{m-1})/h], & x \in I_m, \\ g_2[(x_{m+1} - x)/h], & x \in I_{m+1}, \\ g_1[(x_{m+2} - x)/h], & x \in I_{m+2}, \\ 0 & otherwise, \end{cases} \qquad (11.2)$$

به طوری که:

$$g_1(x) = x^3, \qquad g_2(x) = 1 + 3x + 3x^2 - 3x^3 \qquad (12.2)$$

و برای $m = 0, \dots, N+1$ داریم:

$$B_{m-1}(x_m) = 1, \qquad B_m(x_m) = 4, \qquad B_{m+1}(x_m) = 1,$$
$$B''_{m-1}(x_m) = \frac{6}{h^2}, \qquad B''_m(x_m) = \frac{-12}{h^2}, \qquad B''_{m+1}(x_m) = \frac{6}{h^2}, \qquad (13.2)$$

در اینجا برای نمونه چگونگی اثبات دو تا از روابط (۱۳.۲) را نشان می‌دهیم و بقیه به طور مشابه اثبات می‌شوند.

برای اثبات $B_{m+1}(x_m) = 1$ با استفاده از (۱۱.۲) داریم:

$$B_{m+1}(x) = \begin{cases} g_1[(x - x_{m-1})/h], & x \in I_m, \\ g_2[(x - x_m)/h], & x \in I_{m+1}, \\ g_2[(x_{m+2} - x)/h], & x \in I_{m+2}, \\ g_1[(x_{m+3} - x)/h], & x \in I_{m+3}, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

با توجه به $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$1)\ x_m \in I_m \quad \Rightarrow \quad B_{m+1}(x_m) = g_1(x_m - x_{m-1}/h) = g_1(1) = 1$$

$$2)\ x_m \in I_{m+1} \quad \Rightarrow \quad B_{m+1}(x_m) = g_2(x_m - x_m/h) = g_2(0) = 1$$

بنابراین داریم:

$$B_{m+1}(x_m) = 1$$

برای اثبات $B''_{m+1}(x_m) = \frac{6}{h^2}$ با توجه به تعریف (۱۱.۲) داریم:

$$B''_{m+1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{h^2}g_1''[(x-x_{m-1})/h\ ], & x\in I_m,\\ \frac{1}{h^2}g_2''[(x-x_m)/h\ ], & x\in I_{m+1},\\ \frac{1}{h^2}g_2''[(x_{m+2}-x)/h\ ], & x\in I_{m+2},\\ \frac{1}{h^2}g_1''[(x_{m+3}-x)/h\ ], & x\in I_{m+3},\\ 0 & otherwise,\end{cases}$$

با توجه به $I_i=[x_{i-۱},x_i]$ دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$۱)\ x_m\in I_m \quad\Rightarrow\quad B''_{m+۱}(x_m)=\frac{۱}{h^۲}g''_۱(۱)=\frac{۶}{h^۲}$$

$$۲)\ x_m\in I_{m+۱} \quad\Rightarrow\quad B''_{m+۱}(x_m)=\frac{۱}{h^۲}g''_۲(۰)=\frac{۶}{h^۲}$$

بنابراین داریم:

$$B''_{m+۱}(x_m)=\frac{۶}{h^۲}$$

فرض کنید $\{B^D_m\}^{N+۱}_{m=۰}$ پایه برای S^D باشند که به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned}&B^D_۰=B_۰-۴B_{-۱},\qquad B^D_۱=B_۱-B_{-۱},\qquad B^D_m=B_m \qquad m=۲,\dots,N-۱\\ &B^D_N=B_N-B_{N+۲},\qquad B^D_{N+۱}=B_{N+۱}-۴B_{N+۲}\,, \qquad\qquad (۱۴.۲)\end{aligned}$$

از (۱۳.۲) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}&B^D_۰(x_۱)=۱,\qquad B^D_۱(x_۱)=۴,\qquad B^D_۱(x_۲)=۱,\\ &B^D_N(x_{N-۱})=۱,\qquad B^D_N(x_N)=۴,\qquad B^D_{N+۱}(x_N)=۱, \qquad (۱۵.۲)\end{aligned}$$

که ما در اینجا اثبات یکی از روابط (۱۵.۲) را می‌آوریم و بقیه به‌طور مشابه به دست می‌آیند.

$$B_{N+1}^{D}(x_N) = B_{N+1}(x_N) - 4B_{N+2}(x_N) = 1 - 0 = 1$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
&[B_0^D]''(x_0) = -\frac{36}{h^2}, && [B_1^D]''(x_0) = 0, && \\
&[B_0^D]''(x_1) = \frac{6}{h^2}, && [B_1^D]''(x_1) = -\frac{12}{h^2}, && [B_1^D]''(x_2) = \frac{6}{h^2}, \\
&[B_N^D]''(x_{N-1}) = \frac{6}{h^2}, && [B_N^D]''(x_N) = -\frac{12}{h^2}, && [B_{N+1}^D]''(x_N) = \frac{6}{h^2}, \\
&[B_N^D]''(x_{N+1}) = 0, && [B_{N+1}^D]''(x_{N+1}) = -\frac{36}{h^2}. &&
\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

روابط (۱۶.۲) به راحتی اثبات می‌شوند.

از (۱۳.۲)، (۱۴.۲)، (۱۵.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌شود که:

$$B_m^D(x_i) - \frac{h^2}{6}[B_m^D]''(x_i) = \begin{cases} 6, & m = i, \\ 0, & m \neq i, \end{cases} \tag{۱۷.۲}$$

در سراسر این فصل، C یک ثابت مثبت و مستقل از u و h در نظر گرفته می‌شود.

لم (۲–۱): $\{B_m^D\}_{m=0}^{N+1}$ که در (۱۴.۲) تعریف شده‌اند، در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\max_{x\in[0,1]}\left|B_m^D(x)\right| \le C, \qquad m = 0, \dots, N+1$$

اثبات: با توجه به $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ برای هر ثابت $m = -1, \dots, N+2$ داریم:

$$x \in I_{m-۱} \;\Rightarrow\; x_{m-۲} \le x \le x_{m-۱} \;\Rightarrow ۰ \le \frac{x - x_{m-۲}}{h} \le \frac{x_{m-۱} - x_{m-۲}}{h} \;\Rightarrow$$

$$۰ \le \frac{x - x_{m-۲}}{h} \le ۱$$

به همین طریق روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$۰ \le (x - x_{m-۲})/h \le ۱,\;\; x \in I_{m-۱}, \quad ۰ \le (x - x_{m-۱})/h \le ۱, \;\; x \in I_m,$$

$$۰ \le (x_{m+۱} - x)/h \le ۱,\;\; x \in I_{m+۱},\;\; ۰ \le (x_{m+۲} - x)/h \le ۱,\;\; x \in I_{m+۲}, \qquad (۱۸.۲)$$

می‌دانیم:

$$۰ \le x \le ۱ \quad \Rightarrow \quad ۰ \le ۱ - x \le ۱$$

بنابراین:

$$|۱ + ۳x + ۳x^۲ - ۳x^۳| \le ۱ + |۳x| + ۳|x^۲ - x^۳| \le ۱ + ۳|x| + ۳x^۲|۱ - x| \le ۷$$

با توجه به رابطه‌ی بالا و (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به دست می‌آوریم:

$$|g_۱[(x - x_{m-۲})/h]| \le ۱, \qquad x \in I_{m-۱},$$

$$|g_۲[(x - x_{m-۱})/h]| \le ۷, \qquad x \in I_m,$$

$$|g_۲[(x_{m+۱} - x)/h]| \le ۷, \qquad x \in I_{m+۱},$$

$$|g_۱[(x_{m+۲} - x)/h]| \le ۱, \qquad x \in I_{m+۲}, \qquad (۱۹.۲)$$

حال با استفاده از (۱۱.۲) و (۱۹.۲) می‌بینیم که:

$$\max_{x\in[۰,۱]}|B_m(x)| \le C, \qquad m = -۱, \dots, N+۲$$

و از آنجا که هر B_m^D یک ترکیب خطی از حداکثر دو تابع $\{B_n\}_{n=-۱}^{N+۲}$ است، نامعادله‌ی مورد نظر از (۱۴.۲) به دست می‌آید.

ماتریسهای $A_{N\times N}$ و $B_{N\times N}$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$A = (a_{i,m})_{i,m=۱}^{N}, \ \ a_{i,m} = [B_m^D]''(x_i), \qquad B = (b_{j,n})_{j,n=۱}^{N}, b_{j,n} = B_n^D(y_j), \qquad (۲۰.۲)$$

به راحتی از (۱۳.۲)، (۱۴.۲)، (۱۵.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌شود که:

$$A = ۶h^{-۲}T, \qquad B = T + ۶I, \qquad (۲۱.۲)$$

به‌طوری که I ماتریس همانی و $T_{N\times N}$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad (۲۲.۲)$$

تعریف: ماتریس $B_{n\times n}$ را قطری-غالب اکید گوییم هرگاه برای $۱ \le i,j \le n$ داشته باشیم:

$$b_{i,i} - \sum_{i\ne j} b_{i,j} \ge ۰$$

لم (۲-۲): اگر $B[u_۱, \dots, u_N]^T = [v_۱, \dots, v_N]^T$ و B در (۲۰.۲) تعریف شده باشد، سپس داریم:

$$\max_{۱\le i\le N}|u_i| \le C\max_{۱\le i\le N}|v_i|$$

اثبات: از (۲۰.۲)، (۲۱.۲) و (۲۲.۲) به وضوح داریم:

$$\left|b_{i,i}\right| - \sum_{i\neq j}\left|b_{i,j}\right| \ge ۲$$

از طرفی قرار می‌دهیم:

$$\|v\| = \|Bu\| = \max\left|\sum_{j=۱}^{N} b_{i,j}u_{i,j}\right| \ge \left|\sum_{j=۱}^{N} b_{i,j}u_{i,j}\right| \ge \left[\left|b_{i,i}\right| - \sum_{i\neq j}\left|b_{i,j}\right|\right]\|u\| \ge ۲\|u\|$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\max_{۱\le i\le N}|u_i| \le C\max|v_i|$$

به عبارت دیگر از آن‌جایی که $\left|b_{i,i}\right| - \sum_{i\neq j}\left|b_{i,j}\right| \ge ۲$ است، نتیجه می‌گیریم که این قضیه برای هر ماتریس قطری-غالب اکید نیز درست است که اثبات آن در [۲۵] آمده‌است.

لم (۲-۳): اگر $u = \left[u_{۱,۱}, \dots, u_{N,N}\right]^T$ و $v = \left[v_{۱,۱}, \dots, v_{N,N}\right]^T$ باشند و $(B \otimes B)u = v$ سپس داریم:

$$\max\left|u_{i,j}\right| \le C\max\left|v_{i,j}\right|$$

اثبات: از آن جایی که $(B \otimes B) = (B \otimes I)(I \otimes B)$ به دست می‌آوریم:

$$v = (B \otimes I)w, \qquad\qquad w = (I \otimes B)u$$

چون B یک ماتریس قطری-غالب اکید است، $I \otimes B$ و $B \otimes I$ نیز قطری-غالب می‌شوند و با استفاده از لم $(۲-۲)$ نتیجه می‌گیزیم که:

$$\max|u_{i,j}| \leq C\max|w_{i,j}|, \qquad \max|w_{i,j}| \leq C\max|v_{i,j}|$$

بنابراین نا معادله‌ی مورد نظر به دست می‌آید.

فرض کنید T_m همان ماتریس تعریف شده در (۲۲.۲) باشد و برای هر عدد حقیقی θ و عدد صحیح k داشته باشیم:

$$C_k = \cos(k\theta), \qquad S_k = \sin(k\theta),$$

اتحادهای مثلثاتی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_{k-۱} = C_۱S_k - S_۱C_k, \qquad S_{k+۱} = C_۱S_k + S_۱C_k$$
$$C_{k-۱} = C_۱C_k + S_۱S_k, \qquad C_{k+۱} = C_۱C_k - S_۱S_k$$

با اضافه کردن اولین معادله به دومی و سومین معادله به چهارمی داریم:

$$S_{k-۱} - ۲C_۱S_k + S_{k+۱} = ۰, \tag{۲۳.۲}$$
$$C_{k-۱} - ۲C_۱C_k + C_{k+۱} = ۰, \tag{۲۴.۲}$$

لم (۲–۴): فرض کنید$\theta \in R$ باشد،اگر

$$S_k = \sin(k\theta), \qquad C_k = \cos(k\theta), \qquad k = ۰, \ldots, m+۱$$

آنگاه داریم:

$$T_m \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ . \\ . \\ . \\ S_{m-1} \\ S_m \end{bmatrix} = -4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ . \\ . \\ . \\ S_{m-1} \\ S_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ S_{m+1} \end{bmatrix}, \qquad (۲۵.۲)$$

$$T_m \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ . \\ . \\ . \\ C_{m-2} \\ C_{m-1} \end{bmatrix} = -4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ . \\ . \\ . \\ C_{m-2} \\ C_{m-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ C_m \end{bmatrix}, \qquad (۲۶.۲)$$

اثبات: با توجه به تعریف T_m داریم:

$$T_m \begin{bmatrix} S_1 \\ . \\ . \\ . \\ S_k \\ . \\ . \\ . \\ S_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 - 2S_1 + S_2 \\ S_{k-1} - 2S_k + S_{k+1} \\ S_{m-1} - 2S_m \end{bmatrix}$$

حال (۲۳.۲) نتیجه می‌دهد که:

$$S_{k-1} - 2S_k + S_{k+1} = S_{k-1} - 2C_1S_k + S_{k+1} + 2(C_1 - 1)S_k$$

بنابراین داریم: