بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد و اياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم و لا الضالين

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

عنوان پایان نامه:

مشخص سازی رسته ای چند گونا

استاد راهنما:

دکتر شاهین موسوی میرکلائی

مولف:

مهناز شمس

مهر ۱۳۸۸

پیوست شماره‌ی ۲

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی خانم مهناز شمس

تحت عنوان:

«مشخص سازی رسته‌ای چند گونا»

در تاریخ ۸۸/۷/۱۵ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..عالی.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه آقای دکتر سیدشاهین موسوی میرکلائی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- داور داخل از گروه خانم دکتر فیروزه جهانشاهی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۳- داور خارج از گروه آقای سیدناصر حسینی با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۴- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی، آقای دکتر علی دره‌کردی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

تقدیم به:

پدر عزیزم و روان پاک مادرم

و فرزندان دلبندم سینا و هستی

تقدیر و تشکر

با نام و یاد خداوند متعال که الطاف او همیشه در همه مراحل زندگی شامل حال ماست و توفیق تحصیل علم را به من عنایت فرمود.

در ابتدا از زحمات پدر مهربانم کمال تقدیر و تشکر را دارم. همچنین از عنایات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر شاهین موسوی که در طول مدت تحصیل استاد راهنمایم بودند، کمال تشکر را دارم و از کلیه اساتید بخش ریاضی که در تعلیم اینجانب زحمت کشیدند سپاسگزارم.

در ضمن از آقای دکتر سیدناصر حسینی و سرکار خانم دکتر فیروزه جهانشاهی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را به عهده داشته‌اند قدردانی می‌نمایم.

در خاتمه از دوستان بسیار عزیزم خانمها سهیلا باقری، مرضیه رهبانی، رقیه یوسفی و نفیسه کمالی که در ارائه این پایان نامه مرا یاری نمودند تشکر نموده و سعادت همه را از خداوند منان آرزومندم.

مهناز شمس

مهر ۱۳۸۸

چکیده

در این نوشتار رسته ی $Alg\Sigma$ و چند گونه ها را مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین اشـیاء بـه طـور موضـعی متناهیـاً نمایش پذیر را معرفی کرده و برخی خواص آن را بیان می نماییم . سپس روابط در یک رسته را تعریف کرده و روابط هم ارزی را مورد بررسی قرار می دهیم.

فهرست مطالب

صفحه **عنوان**

فصل ۱

نظریه رسته (Category Theory)

در این فصل به برخی از مفاهیم و تعاریف اساسی مربوط به نظریه رسته که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌پردازیم.

۱—۱— تعریف: یک رسته $\mathcal{C}$ شامل گردایه‌ای از اشیاء (که اغلب آنها را با حروف بزرگ $A, B, C, \ldots$ نشان می‌دهند) و یک گردایه‌ای از ریختی‌ها (که اغلب آنها را با حروف کوچک $f, g, \ldots$ نشان می‌دهند) می‌باشد و همچنین شامل چهار عملگر است که دوتا از این عملگرها به هر ریختی f از $\mathcal{C}$ دامنه $d_0(f)$ (یا $domf$) و هم دامنه $d_1(f)$ یا ($codf$) نسبت می‌دهند. ریختی f به صورت $f : A \longrightarrow B$ که A دامنه و B هم دامنه می‌باشند نمایش داده می‌شود.

عملگر سوم به هر شی A از $\mathcal{C}$ ریختی 1_A یا (id_A) از $\mathcal{C}$ نسبت می‌دهد که آن را همریختی همانی روی A می‌خوانند. و عملگر چهارم عملگر ترکیب می‌باشد که به هر زوج (f, g) از ریختی‌های $\mathcal{C}$ که $d_0(f) = d_1(g)$، ریختی دیگری که با نماد fog نشان داده می‌شود نسبت می‌دهد به طوری که اصول زیر برقرار باشد:

I): $d_0(1_A) = d_1(1_A)$

II): $d_0(fog) = d_0(g), d_1(fog) = d_1(f)$

III): $1_B of = fo 1_A = f$

IV): $(fog)oh = fo(goh)$

۱—۲— تعریف: فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته باشد، رسته متقابل $\mathcal{C}$ را با $\mathcal{C}^{op}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

اشیاء $\mathcal{C}^{op}$ همان اشیاء $\mathcal{C}$ و ریختی‌ها در $\mathcal{C}^{op}$ معکوس جهت ریختی‌ها در $\mathcal{C}$ می‌باشد.

۱—۳— تعریف: (a) برای دو شی A و B، گردایه ریختی‌ها با دامنه A و هم دامنه B را به صورت $hom(A, B)$ یا $\mathcal{C}(A, B)$ نمایش می‌دهند.

(b) زوج ریختی‌های $f,g : A \longrightarrow B$ را زوج ریختی‌های موازی گویند.

۱—۴— تعریف: رسته $\mathcal{C}$ را رسته متناهی می‌نامند هرگاه گردایه اشیاء $\mathcal{C}$ متناهی بوده و برای هر دو شی A و B در $\mathcal{C}$، $hom(A,B)$ متناهی باشد.

۱—۵— تعریف: رسته I را رسته مجزا می‌نامند هرگاه برای هر $i,j \in I$ داشته باشیم:

$$hom(i,j) = \begin{cases} id_i & i = j \\ \emptyset & i \neq j \end{cases}$$

۱—۶— مثال: (i) رسته Set: اشیاء آن کلاس تمام مجموعه‌ها و ریختی‌های آن تمام توابع بین مجموعه‌ها می‌باشد.

(ii) رسته Grp: اشیاء آن تمام گروهها و ریختی‌های آن تمام همریختی‌های گروهی بین آنها می‌باشد.

(iii) فرض کنید X یک مجموعه و $\leq$ رابطه‌ای پیش‌ترتیب روی X باشد، یعنی $\leq$ خاصیت انعکاسی و تعدی داشته باشد.

رسته‌ی $\mathcal{C}(X,\leq)$، رسته‌ای است که اشیاء آن اعضای X و برای هر ۲ شی x و y، $f : x \longrightarrow y$ یک ریختی است هرگاه $x \leq y$. برای هر شی x، ریختی همانی براساس خاصیت انعکاسی و عمل ترکیب ریختی‌ها براساس خاصیت تعدی تعریف می‌شوند.

(iv) رسته $Prord$: اشیاء آن تمام مجموعه‌های جزئا مرتب و ریختی‌های آن تمام توابع حافظ ترتیب بین آنها می‌باشد.

(v) رسته Top: اشیاء آن تمام فضاهای توپولوژیک و ریختی‌های آن تمام توابع پیوسته بین آنها می‌باشد.

(vi) فرض کنید $\Omega = (\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های Ω_n باشد. (Ω_n را مجموعه‌ی

همه‌ی عملگرنماهای n−تایی می‌نامند).

رسته‌ی $Alg(\Omega)$ شامل Ω−جبرها و Ω−ریختی‌ها به صورت زیر است.

یک Ω−جبر مجموعه‌ی X به همراه عملگر n−تایی $\omega_X : X^n \longrightarrow X$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\omega \in \Omega_n$ می‌باشد، که با نماد $(X, (\omega_X)_{\omega \in \Omega_n, n \in \mathbb{N}})$ یا به طور اختصار $(X, (\omega_X))$ نشان داده می‌شود و ریختی جبرها به صورت تابع $f : X \longrightarrow Y$ $f : (X, \omega_X) \longrightarrow (Y, \omega_Y)$ تعریف می‌شود، به قسمی که دیاگرام زیر جا به جا شود:

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "w_x"'] & Y^n \arrow[d, "w_y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

یعنی $fo\omega_X = \omega_Y o f^n$.

(vii) (معرفی رسته‌ی $Rel\Sigma$) فرض کنیم S مجموعه‌ای از نوعها باشد و Σ مجموعه‌ای از نمادها (علامت‌ها) باشد، نگاشت ar اینگونه تعریف می‌شود:

$$ar : \Sigma \longrightarrow \bigcup_{n \in W} S^n$$

این در حالی است که

$$n \geq ۱ \qquad S^n = \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n \text{ بار}}$$

$$n = ۰ \qquad S^۰ = \{\emptyset\}$$

با توجه به تعریف بالا اگر $n = ۱$ آنگاه σ یک علامت یکانی از نوع $s \in S$ می‌باشد و اگر $n = ۲$ آنگاه σ علامت دوتایی از نوعهای $s_۱$ و $s_۲$ می‌باشد و اگر $n = ۰$ آنگاه $ar\sigma = \emptyset$ به معنای σ یک علامت هیچ‌تایی می‌باشد.

اشیاء $Rel\Sigma$ به صورت ساختار رابطه‌ای $\mathbf{A}$ از نوع Σ می‌باشند بدین مفهوم که $\mathbf{A}$ از یک مجموعه S—مرتب شده‌ی $|\mathbf{A}| = (A_s)_{s\in S}$ و خانواده‌ی روابط $(\sigma_{\mathbf{A}})_{\sigma\in\Sigma}$ که به صورت زیر می‌باشد، تشکیل می‌شود:

$$(i) \quad n > 0, \quad ar\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \Longrightarrow \sigma_{\mathbf{A}} \subseteq A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$$

$(ii) \quad n = 0, \quad ar\sigma = \emptyset \Longrightarrow \sigma_{\mathbf{A}} \subseteq A^{\emptyset} = \{*\} = Set$ عنصر پایانی در رسته‌ی

یعنی اشیاء $Rel\Sigma$ به صورت زوج زیر می‌باشد:

$$\mathbf{A} = \left(|\mathbf{A}| = (A_s)_{s\in S}, (\sigma_{\mathbf{A}})_{\sigma\in\Sigma}\right)$$

یک ریختی در این رسته $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ می‌باشد که در آن $s \in S$ $f = (f_s)$ و $f_s : A_s \longrightarrow B_s$ بطوریکه:

(i) اگر $n \neq 0$ و $\sigma_{\mathbf{A}} \subseteq A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$ و $\sigma_{\mathbf{B}} \subseteq B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n}$ آنگاه

$$\begin{array}{cccccc}
\sigma_{\mathbf{A}} \subseteq & A_{s_1}\times & A_{s_2}\times & \ldots\times & A_{s_n} \\
 & \downarrow f_{s_1} & \downarrow f_{s_2} & \ldots & \downarrow f_{s_n} \\
\sigma_{\mathbf{B}} \subseteq & B_{s_1}\times & B_{s_2}\times & \ldots\times & B_{s_n}
\end{array}$$

و

$$(f_{s_1} \times f_{s_2} \times \ldots \times f_{s_n})(\sigma_{\mathbf{A}}) \subseteq \sigma_{\mathbf{B}}$$

(ii) اگر $n = 0$ و $\sigma_{\mathbf{A}} \neq \emptyset$ نتیجه می‌دهد $\sigma_{\mathbf{B}} \neq \emptyset$ یعنی

$$\begin{array}{rcl}
f_{s_0} : A^{\emptyset} & \longrightarrow & B^{\emptyset} \\
\{*\} & \longrightarrow & \{*'\}
\end{array}$$

و باید $f_{s_0}(\sigma_{\mathbf{A}}) \subseteq \sigma_{\mathbf{B}}$.

۱—۷— تعریف: رسته‌ی I را مرتب شده‌ی مستقیم (یا جهت‌دار شده) می‌نامند، هرگاه I یک مجموعه‌ی جزئا مرتب شده باشد و برای هر $i, j \in I$، شی $k \in I$ موجود باشد به قسمی که $i \leq k$ و $j \leq k$.

۱—۸— تعریف: رسته $\mathcal{C}$ و ریختی $f : A \longrightarrow B$ در $\mathcal{C}$ مفروض است.

(i) f را تکریختی می‌نامند هرگاه برای هر شی D از $\mathcal{C}$ و هر زوج از ریختی‌های $g, h : D \longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$، اگر $fg = fh$ آنگاه $g = h$.

(ii) f را برو‌ریختی می‌نامند هرگاه برای هر شی C و برای هر زوج ریختی‌های $g, h : B \longrightarrow C$ در $\mathcal{C}$، اگر $gf = hf$ آنگاه $g = h$.

(iii) f را یکریختی می‌نامند هرگاه ریختی $g : B \longrightarrow A$ موجود باشد بقسمی که $fog = ۱_B$ و $gof = ۱_A$. اگر چنین ریختی موجود باشد، A را یکریخت با B می‌نامیم و آن را با نماد $A \cong B$ نمایش می‌دهند.

۱—۹— تعریف: در رسته $\mathcal{C}$، A را زیر شی B می‌نامند هرگاه تکریختی $f : A \longrightarrow B$ موجود باشد.

۱—۱۰— تعریف: فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته‌ی دلخواه باشند، یک تابعگون از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ تابعی مانند F است به طوری که به هر شی A از $\mathcal{A}$ شی $F(A)$ در $\mathcal{B}$ و به هر ریختی f از $\mathcal{A}$ ریختی $F(f)$ در $\mathcal{B}$ نسبت می‌دهد به قسمی که شرایط زیر برقرار باشند:

I): $F(d_۰(f)) = d_۰(F(f))$

II): $F(d_۱(f)) = d_۱(F(f))$

III): $F(۱_A) = ۱_{F(A)}$

IV): $F(fog) = F(f)oF(g)$.

۱—۱۱— تعریف: (a) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک رسته و A یک شی از آن باشد. تابعگون $\mathcal{C}(A, -)$ که

به صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A,-):\mathcal{C} &\longrightarrow Set \\ B &\longmapsto \mathcal{C}(A,B) \\ (f:C\longrightarrow D) &\longmapsto \mathcal{C}(A,f):\mathcal{C}(A,C) \longrightarrow \mathcal{C}(A,D) \\ & \qquad\quad h \qquad\qquad\quad \longmapsto foh \end{aligned}$$

تعریف می‌شود را تابعگون نمایش‌پذیر می‌نامند.

(b) تابعگون $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ تام نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو شی A و B از $\mathcal{A}$ نگاشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A,B) &\longrightarrow \mathcal{B}(F(A),F(B)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

پوشا باشد. هرگاه نگاشت فوق یک به یک باشد تابعگون F وفادار نامیده می‌شود.

۱—۱۲— تعریف: رسته ملموس روی $\mathcal{C}$، زوج $(\mathcal{A},U)$ می‌باشد، به قسمی که $\mathcal{A}$ یک رسته و $U:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ تابعگون وفادار است. در این جا U تابعگون فراموش‌کار (یا اساسی) و $\mathcal{C}$ رسته‌ی پایه برای $(\mathcal{A},U)$ نامیده می‌شود.

۱—۱۳— تعریف: فرض کنید $(\mathcal{A},U)$ رسته ملموس $\mathcal{C}$ باشد.

الف) ریختی جهانی روی شی C در $\mathcal{C}$، ریختی $u:C\longrightarrow U(A)$ با دامنه‌ی C که A یک شی در رسته $\mathcal{A}$ می‌باشد و در خاصیت جهانی زیر صدق کند:

برای هر ریختی $f:C\longrightarrow U(B)$ با دامنه‌ی C که B یک شی در رسته $\mathcal{A}$ می‌باشد، ریختی یکتای $\hat{f}:A\longrightarrow B$ در $\mathcal{A}$ موجود باشد به قسمی که نمودار زیر جابجا شود:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & U(A) \arrow[d, dashed, "u(\hat{f})"] \\ & U(B) \end{tikzcd}$$

یعنی $U(\hat{f})ou = f$.

ب) یک شی آزاد روی شی C در $\mathcal{C}$، شی A می‌باشد به قسمی که ریختی جهانی (u, A) روی C موجود باشد.

۱ـ۱۴ــ تعریف: (a) فرض کنید F و G دو تابعگون از رسته $\mathcal{A}$ به رسته $\mathcal{B}$ باشند، تبدیل طبیعی α از F به G که با نماد $\alpha : F \dot{\longrightarrow} G$ نمایش داده می‌شود، نگاشتی است که به هر شی A از $\mathcal{A}$ ریختی $\alpha_A : FA \dot{\longrightarrow} GA$ نسبت می‌دهد به قسمی که برای هر ریختی $f : A \longrightarrow B$ در $\mathcal{A}$ دیاگرام زیر جابجا شود.

$$\begin{array}{c} A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

یعنی $Gfo\alpha_A = \alpha_B oFf$.

اگر $\alpha : F \dot{\longrightarrow} G$ و $\beta : G \dot{\longrightarrow} H$ دو تبدیل طبیعی باشند، ترکیب $\beta o \alpha$ که به ازای هر شی A از $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\beta o \alpha)_A = \beta_A o \alpha_A$$

نیز یک تبدیل طبیعی می‌باشد.

(b) تبدیل طبیعی α یکریختی طبیعی نامیده می‌شود هرگاه برای هر شی C در $\mathcal{C}$، α_C وارون‌پذیر باشد. در این حالت F را یکریخت طبیعی با G نامید و با نماد $F \overset{\alpha}{\cong} G$ نشان داده می‌شود.

۱ـ۱۵ــ تعریف: زوج ریختی‌های موازی $f, g : A \rightrightarrows B$ زوج انعکاسی نامند هرگاه ریختی $d : B \longrightarrow A$ موجود باشد به قسمی که $dof = dog = id_A$.

۱ــ۱۶ــ تعریف: (a) دیاگرام جابجایی

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{(I)}$$

در رسته C عقب کشیدنی نامیده می‌شود هرگاه برای هر شی D' از C و ریختی‌های $A \longrightarrow D' : h_۱$ و $h_۲ : D' \longrightarrow C$ که $foh_۱ = goh_۲$، ریختی منحصر به فرد $\overline{h} : D' \longrightarrow D$ موجود باشد به قسمی که

$$qo\overline{h} = h_۲ \quad , \quad po\overline{h} = h_۱$$

در این صورت دیاگرام (I) را پول‌بک f در امتداد g می‌نامند.

(b) اگر دیاگرام (I) عقب کشیدنی باشد و $f = g$، آنگاه زوج (p, q) را زوج هسته‌ای می‌نامند.

۱ــ۱۷ــ تعریف: دیاگرام جابجایی

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "q"'] & D \end{tikzcd}$$

جلو رفتنی نامیده می‌شود هرگاه

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p^{op}"] \arrow[d, "q^{op}"'] & B \arrow[d, "f^{op}"] \\ C \arrow[r, "g^{op}"'] & A \end{tikzcd}$$

پول بک در C^{op} باشد.

۱ــ۱۸ــ تعریف: (a) ریختی $e : E \longrightarrow A$ را معادل‌ساز (equalizer) برای ریختی‌های $f, g : A \longrightarrow B$ در رسته‌ی C می‌نامند هرگاه $foe = goe$ و برای هر شی D از C و برای هر ریختی $h : D \longrightarrow A$ اگر $foh = goh$ آنگاه ریختی منحصر بفرد $\overline{h} : D \longrightarrow E$ موجود باشد به قسمی که

$$eo\overline{h} = h$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, dashed, "\bar{h}"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

(b) ریختی $C : B \longrightarrow C$ را هم—معادل‌ساز (coequalizer) برای ریختی‌های $f, g : A \longrightarrow B$ می‌نامند، هرگاه $C^{op} : C \longrightarrow B$، معادل‌ساز برای ریختی‌های $f^{op}, g^{op} : B \longrightarrow A$ در C^{op} باشد.

۱—۱۹— مثال: (a) اگر $f, g : A \longrightarrow B$ دو ریختی در Set باشند و مجموعه‌ی E به صورت زیر تعریف شود:

$$E = \{a \in A | f(a) = g(a)\}$$

ریختی شمول از E به A معادل ساز f و g می‌باشد.

(اگر $A \xrightarrow{e'} E'$ ریختی باشد به طوری که $foe' = goe'$، تعریف می‌کنیم، $(\bar{h}(x) = e'(x)$).

(b) در Set هم—معادل‌ساز ریختی‌های $f, g : A \longrightarrow B$ به صورت زیر می‌باشد:

فرض کنید E کوچکترین رابطه هم‌ارزی روی B شامل همه $(f(x), g(x))$ها باشد. ریختی $q : B \longrightarrow B/E$ که به هر $b \in B$ کلاس هم‌ارزی شامل b را نسبت می‌دهد، هم‌معادل‌ساز f و g می‌باشند.

۱—۲۰— تعریف: (a) ریختی $A \xrightarrow{e} E$ تکریختی منظم می‌باشد هرگاه معادل‌ساز زوجی از ریختی‌ها باشد.

(b) ریختی $C \xrightarrow{e} B$ برویختی منظم می‌باشد هرگاه هم—معادل‌ساز زوجی از ریختی‌ها باشد.

۱—۲۱— تعریف: (a) فرض کنیم $F : A \longrightarrow B$ یک تابعگون باشد. F، هم—معادل‌سازها را حفظ می‌کند هرگاه $Ff : FB \longrightarrow FC$، هم—معادل‌ساز ریختی‌های موازی $Fg, Fh : FA \longrightarrow FB$ در B باشد، در حالی که $f : B \longrightarrow C$، هم—معادل‌ساز زوج ریختی‌های موازی $g, h; A \longrightarrow B$ در A می‌باشد.

(b) در رسته‌ی $\mathcal{C}$، هم—معادل‌ساز $g : A \longrightarrow B$ را هم—معادل‌ساز مطلق نامند، هرگاه توسط هر تابعگون $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ حفظ شود.

۱—۲۲— تعریف: فرض کنید A یک رسته و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء در $\mathcal{C}$ باشد. ضرب خانواده فوق، شی‌ای مانند p از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریختی‌های $\{\pi_i : \rho \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ می‌باشد به قسمی که برای هر شی دلخواه B و خانواده $\{\varphi_i : B \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ از ریختی‌ها، ریختی منحصر به فرد $\varphi : B \longrightarrow \rho$ موجود باشد به قسمی که

$$\pi_i o\varphi = \varphi_i \qquad (\forall\ i \in I)$$

در این صورت P را با نماد $\prod\limits_{i\in I} A_i$ نمایش می‌دهند و ریختی‌های π_i را ریختی‌های کانونی ضرب A_iها می‌نامند.

دوگان ضرب، هم—ضرب نامیده می‌شود و با نماد $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ نشان داده می‌شود.

۱—۲۳— مثال: (i) در رسته‌ی Set ضرب خانواده‌ی $(A_i)_{i\in I}$ به صورت مجموعه‌ی

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f | f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \ \ s.t.\ \ f(i) \in A_i\}$$

همراه با ریختی‌های کانونی $\pi_i : \prod A_i \longrightarrow A_i$ که به صورت $\pi_i(f) = f(i)$ تعریف می‌شود، می‌باشد.

(ii) هم—ضرب در رسته‌ی Set از خانواده‌ی A_i به صورت مجموعه‌ی

$$\coprod_{i\in I} A_i = \{f | f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} (A_i \times \{i\}) \ \ s.t.\ \ f(i) \in A_i \times \{i\}\ \}$$

همراه با تکریختی‌ها $l_i : A_i \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} A_i$ که به صورت $l_i(a) = (a, i)$ تعریف می‌شود، می‌باشد.

(iii) در رسته Grp، هم—ضرب برای خانواده‌ی دو به دو مجزا فرض کنید $\{G_i; i \in i\}$ از گروه‌ها به صورت زیر ساخته می‌شود. فرض کنید $X = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ و $\{1\}$ مجموعه‌ای تک‌عضوی جدا از X باشد. یک

کلمه در X دنباله‌ای مانند $(a_1, a_2, \ldots)$ است به قسمی که $a_i \in X \cup \{1\}$ و برای هر $n \in N^*$ و $i \geq n$، $a_i = 1$، کلمه‌ی $(a_1, a_2, \ldots)$ تحویل‌یافته است هرگاه:

۱) $a_i \in X$ عنصر همانی در گروه G_i نباشد.

۲) به ازای هر $i \geq 1$، a_i و a_{i+1} در یک گروه G_i نباشند.

۳) $a_k = 1$ ایجاب کند که برای هر $i \geq k$، $a_i = 1$.

و به خصوص $(1, 1, \ldots) = 1$ تحویل یافته است. به اختصار هر کلمه تحویل‌یافته را به صورت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\coprod^* G_i$ مجموعه‌ی تمام کلمات تحویل‌یافته برای X باشد. عمل ضرب در آن را به صورت پهلوی هم‌گذاشتن تعریف نمایید. در این صورت $\{1\}$ عنصر همانی است و برای هر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ در $\coprod^* G_i$ معکوس آن $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ می‌باشد. لذا $\coprod^* G_i$ یک گروه می‌باشد.

و به ازای هر $k \in I$، نگاشت $l_k : G_k \longrightarrow \coprod^* G_i$ با تعریف:

$$a \longmapsto a = (a, 1, 1, \ldots)$$
$$e \longmapsto 1$$

تکریختی گروهی می‌باشد.

۱—۲۴— تعریف: (a) یک دیاگرام در رسته $\mathcal{C}$، تابعگون $D : I \longrightarrow \mathcal{C}$ با هم—دامنه‌ی $\mathcal{C}$ می‌باشد. دامنه‌ی I طرح (یا نقشه) دیاگرام نامیده می‌شود.

(b) یک دیاگرام مستقیم شده در رسته $\mathcal{C}$، دیاگرام $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$ با هم—دامنه‌ی $\mathcal{C}$ می‌باشد که I یک رسته مستقیم شده می‌باشد.

۱—۲۵— تعریف: (a) فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته و $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک تابعگون باشد. یک مخروط روی F خانواده‌ای از ریختی‌ها در $\mathcal{B}$ به صورت $(\rho_A : B \longrightarrow FA)_{A \in \mathcal{A}}$ می‌باشد، به قسمی که

B یک شی در $\mathcal{B}$ و برای هر ریختی $d : A \longrightarrow A'$ در رسته‌ی $\mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$F(d)o\rho_A = \rho_{A'}.$$

(b) مخروط $(\rho_A : B \longrightarrow FA)_{A\in\mathcal{A}}$ جهانی نامیده می‌شود هرگاه برای هر مخروط $(q_A : C \longrightarrow FA)_{A\in\mathcal{A}}$ که C یک شی در $\mathcal{B}$ باشد، ریختی منحصر به فرد $f : C \longrightarrow B$ موجود باشد به قسمی که برای هر $A \in \mathcal{A}$:

$$\rho_A of = q_A.$$

خانواده‌ای از ریختی‌ها در $\mathcal{B}$ به صورت $(\pi_A : FA \longrightarrow C)_{A\in\mathcal{A}}$ که C یک شی در $\mathcal{B}$ می‌باشد را یک هم—مخروط روی F گویند هرگاه $(\pi_A^{op} : C \longrightarrow FA)_{A\in\mathcal{A}}$ یک مخروط روی F^{op} باشد.

۱—۲۶— تعریف: (a) فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته و $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک تابعگون باشد. زوج $(B, (\rho_A)_{A\in\mathcal{A}})$ که در آن B شیئی در $\mathcal{B}$ و $(\rho_A : B \longrightarrow FA)_{A\in\mathcal{A}}$ مخروط جهانی باشد، حد تابعگون F نامیده می‌شود و آنرا به اختصار با نماد $\lim\limits_{\leftarrow} F = B$ نشان می‌دهند. اگر رسته $\mathcal{A}$ متناهی باشد، حد تابعگون F روی $\mathcal{A}$ را در صورت وجود حد متناهی گویند.

(b) همچنین زوج $(C, (\pi_A : FA \longrightarrow C)_{A\in\mathcal{A}})$ در $\mathcal{B}$ را هم—حد تابعگون F می‌نامند و آن را به اختصار با نماد $\lim\limits_{\rightarrow} F = C$ نمایش می‌دهند هرگاه $(\pi_A : FA \longrightarrow C)_{A\in\mathcal{A}}$ یک هم—مخروط جهانی روی F باشد. (معمولا هم—حد تابعگون F با $colimF$ نشان داده می‌شود.)

۱—۲۷— تعریف: (a) تابعگون $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$، حد $\mathcal{L} = (L \xrightarrow{l_i} D_i)$ از دیاگرام $D : I \longrightarrow \mathcal{A}$ را حفظ می‌کند هرگاه $F\mathcal{L} = (FL \xrightarrow{Fl_i} FD_i)$، حد دیاگرام $FoD : I \longrightarrow \mathcal{B}$ باشد.

(b) تابعگون $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$، حد را ایجاد می‌کند در صورتی که برای هر دیاگرام $D : I \longrightarrow \mathcal{A}$ و هر حد $\mathcal{L}$ از FoD، منبع منحصر به فرد $S = (L \xrightarrow{f_i} D_i)$ در $\mathcal{A}$ موجود باشند به قسمی که $F(S) = \mathcal{L}$ و