بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی و...

پدرم راه تمام زندگیست پدرم دلخوشی همیشگیست

تقدیم به مادرم:

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

تقدیم به همسرم:

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم، همو که حس تعهد و مسئولیت را در زندگی مان تلالویی خدایی داده است

# تقدیر و تشکر

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگار بر خود لازم می دانم سپاس گذار تمام عزیزانی باشم که در برابر سختی ها و ناملایمات روزگار یاریم نمودند. از استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر فردین ساعدپناه که در طول مدت انجام این پایان نامه از رهنمودهای علمی و اخلاقی ایشان بهره مند شدم و درگاه خداوند بزرگ را شاکرم که افتخار شاگردی ایشان را نصیبم نمود، از استاد مشاور گرامیم جناب آقای دکتر مراد احمدنسب و نیز از سایر اساتید محترم گروه ریاضی که در دوره کارشناسی ارشد از راهنمایی های ارزنده این عزیزان بهره گرفته ام تقدیر و تشکر می نمایم.

همچنین از همسرم کسی که با قلبی آکنده از عشق و معرفت محیطی سرشار از سلامت، امنیت، آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است، همدلی که با واژه ی نجیب و مغرور تلاش آشنایی دارد و تلاش راستین را می شناسد و عطر رویایی آن را استشمام می کند و مرا در راه رسیدن به اهداف عالی یاری می رساند صمیمانه تشکر می کنم.

و نیز از پدر و مادر بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آنها بوده ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی ها و مشکلات بوده است کمال تشکر را دارم.

در پایان تشکر خالصانه ای دارم از دو برادر عزیزتر از جانم و تمامی دوستان و همکلاسی هایم که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند.

## چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا نیمه گسسته‌سازی مکانی معادله گرما را، به عنوان یك مثال از مساله سهموی، با استفاده از روش عنصر متناهی و سپس گسسته‌سازی کامل مساله را با روش اویلر پسرو انجام می‌دهیم. در ادامه پس از معرفی بازسازی بیضوی برای تحلیل خطای پسین معادلات نیمه گسسته و کاملا گسسته و بیان تخمین پایداری برای مساله‌ی پیوسته دوگان، تخمین‌های خطای پسین را با استفاده از روش‌های انرژی و دوگان و ترکیب آن‌ها با بازسازی بیضوی بدست می‌آوریم.

**کلمات کلیدی** : بازسازی بیضوی، روش عنصر متناهی، تخمین پایداری، تخمین خطای پسین، معادله گرما

# فهرست مطالب

# مقدمه

روش‌های زیادی برای حل عددی معادلات حاوی مشتقات جزئی، که به عنوان معادلات دیفرانسیل جزئی [۱] (PDE) معرفی می‌شوند، وجود دارند. از جمله می‌توان به روش عنصر متناهی [۲] (FEM) اشاره کرد، که یک روش عددی مهم برای یافتن جواب‌های تقریبی PDE به ویژه معادلات سهموی [۳] و بیضوی [۴] به شمار می‌آید. این روش بر اساس فرم تغییراتی [۵] مساله‌ی مقدار مرزی و تقریب جواب به وسیله‌ی یك تابع تکه‌ای چندجمله‌ای می‌باشد.

تخمین‌های خطای روش عنصر متناهی به دو دسته تقسیم می‌شوند. نوعی از تخمین خطای روش عنصر متناهی که بر حسب جواب دقیق و مجهول مساله می‌باشد، تخمین خطای پیشین [۶] نامیده می‌شود. علت نامگذاری این روش عدم وابستگی آن به جواب تقریبی مساله می‌باشد، که بنا بر آن می‌توان تخمین خطای پیشین را پیش از محاسبه‌ی جواب تقریبی محاسبه کرد.

نوع دیگر تخمین خطای روش عنصر متناهی، تخمین خطای پسین [۷] نامیده می‌شود که بر حسب جواب تقریبی و داده‌های معلوم مساله بیان می‌شود. این تخمین برای بررسی دقت جواب تقریبی و کنترل خطا به کار می‌رود.

در زمینه‌ی تخمین‌های خطای پسین، پیشرفت‌های مهمی برای معادله‌ی سهموی خطی در سال ۱۹۹۱ توسط

[۱] Partial differential equations
[۲] Finite element method
[۳] Parabolic
[۴] Elliptic
[۵] Variatinal formulation
[۶] A priori error estimate
[۷] A posteriori error estimate

اریکسون [۱] و جانسون [۲] به وجود آمد [۷ و ۸]. سپس ماکریداکیس [۳] و نوچتو [۴] برای اولین بار امکان استفاده از بازسازی بیضوی [۵] و ترکیب آن با تکنیك انرژی را بررسی کردند [۲۰]. بعدها بازسازی بیضوی به عنوان یك ابزار تحلیلی در ترکیب با روش انرژی یا روش‌های دیگر توسط بارتلس [۶]، مولر [۷]، لاکیس [۸]، دملو [۹]، ماکریداکیس، ارن [۱۰] و منویر [۱۱] برای پیدا کردن تخمین‌ها نسبت به نرم‌های گوناگون، برای مسائل سهموی خطی و غیر خطی وابسته به زمان به کار برده شده است [۲، ۵، ۶، ۱۱ و ۱۳].

با این وجود بسیاری از موضوعات در حال بررسی هستند، برای نمونه بدست آوردن تخمین‌های مرتبه‌ی بهینه نسبت به نرم‌های گوناگون از طریق روش انرژی یا روش‌های مستقیم دیگر، که در آن‌ها از تخمینگرها [۱۲] بر پایه‌ی غیر مانده [۱۳] برای کنترل قسمت بیضوی خطا استفاده می‌شود. همچنین بدست آوردن تخمین‌هایی برای روش‌های گسسته‌سازی زمانی گوناگون را می‌توان نام برد.

در این پایان‌نامه، ابتدا در فصل اول مروری بر تعاریف و مفاهیمی که در تئوری تخمین خطای پسین برای مسائل سهموی به کار برده می‌شوند، خواهیم داشت. سپس روش عنصر متناهی را برای گسسته‌سازی مکانی مساله بیضوی در حالت دو بعدی یعنی در صفحه به کار برده و پس از بدست آوردن یك تخمین خطای پیشین برای جواب روش عنصر متناهی، تخمین خطای پسین را نیز برای این جواب بدست آورده و با معرفی این تخمین پسین به عنوان یك تخمین‌گر، در فصل‌های بعد از آن برای کنترل قسمت بیضوی خطا استفاده می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا گسسته‌سازی معادله‌ی گرما تنها نسبت به متغیر مکان را با استفاده از روش عنصر متناهی انجام داده، و پس از معرفی عملگر بازسازی بیضوی با ترکیب روش انرژی و تکنیك بازسازی بیضوی تخمین خطای پسین را برای این معادله بدست می‌آوریم. در انتهای فصل از مساله کمکی دوگان استفاده کرده و با استفاده از آن تخمین خطای پسین دیگری را برای مساله‌ی نیمه گسسته بدست می‌آوریم. در فصل سوم

[۱] Kennet Eriksson
[۲] Claes Johnson
[۳] C. Makridakis
[۴] Nochetto
[۵] Elliptic reconstruction
[۶] S. Bartels
[۷] R. Muller
[۸] O. Lakkis
[۹] A. Demlow
[۱۰] A. Ern
[۱۱] S. Meunier
[۱۲] Estimator
[۱۳] Nonresidual

با استفاده از روش عنصر متناهی گسسته‌سازی مکانی و با استفاده از روش اویلر پسرو گسسته‌سازی زمانی را انجام می‌دهیم و سپس در دو بخش مجزا با استفاده از ترکیب دو روش انرژی و دوگان با تکنیك بازسازی بیضوی، دو تخمین خطای پسین را برای معادله کاملا گسسته‌ی گرما بدست می‌آوریم.

# فصل ۱

# مقدمات و پیش نیازها

در این فصل به معرفی تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز تخمین خطای پسین می‌پردازیم. برای این هدف ابتدا مفاهیم فضای خطی (فضای برداری) را تعریف کرده سپس به بیان قضیه‌ی نمایش ریس [۱] و همچنین تعمیم آن یعنی لم لکس-میلگرام [۲] می‌پردازیم. در پایان پس از معرفی فضاهای تابعی، از جمله فضاهای $L_p$ و فضاهای سوبولوف تخمین خطای پیشین و پسین برای مساله بیضوی را ارائه می‌کنیم. مطالب آورده شده از مراجع [۱۲، ۱۹ و ۲۱] می‌باشند.

## ۱.۱ فضاهای خطی

فضای $V$ یک فضای خطی (فضای برداری) نامیده می‌شود، هرگاه

$$\lambda u + \mu v \in V, \quad \forall u, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای خطی باشند، عملگر خطی $B$ روی $V$، یك تابع $B : V \longrightarrow W$ می‌باشد، به طوریکه

$$B(\lambda u + \mu v) = \lambda B(u) + \mu B(v), \quad \forall u, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

عملگر خطی با برد $\mathbb{R}$، یعنی $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$، تابعك خطی نامیده می‌شود.

تبصره ۱.۱.۱ . در تمام این فصل منظور از فضای $V$، فضای خطی $V$ می‌باشد.

[۱] Riesz representation theorem

[۲] Lax-Milgram lemma

فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی $V$ یک تابع $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، به طوریکه نسبت به هر یك از مؤلفه‌هایش خطی باشد، یعنی

$$\begin{aligned} &\forall u, v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (i) \quad & a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w), \\ (ii) \quad & a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v). \end{aligned}$$

فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ متقارن [۱] گفته می‌شود اگر

$$\forall v, w \in V, \quad a(w, v) = a(v, w).$$

و معین مثبت [۲] است، اگر

$$\forall v \in V, v \neq 0, \quad a(v, v) > 0.$$

*تذکر ۲.۱.۱ .* اگر برای فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ داشته باشیم

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq 0.$$

آنگاه آن را نیمه معین مثبت [۳] می‌نامند.

**تعریف ۳.۱.۱.** (۱) فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ که روی $V$ معین مثبت و متقارن باشد، ضرب داخلی روی $V$ نامیده می‌شود.

(۲) فضای خطی $V$ با ضرب داخلی تعریف شده روی آن، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

(۳) اگر $V$ فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد، نرم متناظر آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall v \in V.$$

**تعریف ۴.۱.۱.** نرم روی فضای $V$ تابع $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، به طوریکه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|v\| > 0, && \forall v \in V, v \neq 0, \\ (ii) \quad & \|v\| = 0, \iff v = 0. \\ (iii) \quad & \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, && \forall \lambda \in \mathbb{R},\ v \in V, \\ (iv) \quad & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, && \forall v, w \in V. \end{aligned}$$

[۱] Symmetric
[۲] Positive definite
[۳] Positive semidefinite

تابع $\|\cdot\|$، یک نیم نرم [۱] نامیده می‌شود اگر تمام شرایط نرم برقرار باشد به استثنای شرط دوم، به عبارت دیگر $\forall v \in V \quad \|v\| \geq ۰,$ ، بنابراین $\|v\|$ برای بعضی $v \neq ۰$ می‌تواند صفر شود.

شرط $(iii)$ در تعریف نرم، نامساوی مثلثی نامیده می‌شود.

*یادآوری* ۵.۱.۱. فضای $V$ با نرم تعریف شده روی آن، فضای نرم‌دار نامیده می‌شود.

**تعریف ۶.۱.۱.** (۱) در فضای نرم‌دار $V$ دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ معادل هستند، در صورتی که ثابت‌های مثبت $m$ و $M$ وجود داشته باشند، به طوریکه:

$$m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_a, \quad \forall v \in V.$$

**لم ۷.۱.۱.** *اگر $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی باشد، همه نرم‌های روی $V$ هم‌ارزند.*

(۲) فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی فضای $V$ کران‌دار [۲] نامیده می‌شود، اگر ثابت مثبت $M$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$\forall v, w \in V, \qquad a(v,w) \leq M\|v\|\|w\|.$$

(۳) فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی فضای $V$، $V$-بیضوی [۳] نامیده می‌شود، اگر ثابت مثبت $\alpha$ وجود داشته باشد، به طوریکه:

$$\forall v \in V, \qquad a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^۲.$$

خاصیت $V$-بیضوی یك فرم دوخطی، معین مثبت بودن آن را نتیجه می‌دهد. اما عکس آن در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

(۴) فرض کنیم $a(\cdot,\cdot)$ یک فرم دوخطی متقارن و $V$-بیضوی روی $V$ باشد، آنگاه انرژی نرم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall v \in V, v \neq ۰, \quad \|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}.$$

[۱] Semi norm

[۲] Bounded

[۳] V-elliptic

*تذکر* ۱.۱.۸. اگر در تعریف (۴) فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ کران‌دار نیز باشد، آنگاه داریم

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v) = \|v\|_a^2 \leq M\|v\|_V\|v\|_V = M\|v\|_V^2,$$

با جذر گرفتن از طرفین رابطه‌ی بالا داریم

$$\sqrt{\alpha\|v\|_V^2} \leq \sqrt{\|v\|_a^2} = \|v\|_a \leq \sqrt{M\|v\|_V^2},$$

در نتیجه

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_V \leq \|v\|_a \leq \sqrt{M}\|v\|_V. \tag{۱.۱}$$

بنابراین $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_V$ روی فضای $V$ معادل هستند.

*یادآوری* ۱.۱.۹. (۱) اگر $V$ فضای ضرب داخلی، با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد، نامساوی زیر برقرار است و نامساوی کوشی-شوارتز نامیده می‌شود. و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $w = \lambda v$، که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$|(w,v)| \leq \|w\|\|v\|, \qquad \forall v,w \in V.$$

(۲) دنباله‌ی $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $V$ را یک دنباله‌ی کوشی گوییم، هرگاه:

$$\lim_{i,j\longrightarrow\infty} \|v_i - v_j\| = 0.$$

(۳) فضای نرم‌دار $V$ کامل [1] نامیده می‌شود، اگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد. به عبارت دیگر $v \in V$ وجود داشته باشد، به طوریکه:

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} \|v_i - v\| = 0.$$

**تعریف ۱.۱.۱۰.** (۱) یك فضای نرم‌دار کامل، فضای باناخ [2] نامیده می‌شود.

(۲) فضای ضرب داخلی کامل، فضای هیلبرت [3] نامیده می‌شود.

*تذکر* ۱.۱.۱۱ . هر فضای ضرب داخلی فضای خطی نرم‌دار است، اما همه‌ی فضاهای خطی نرم‌دار فضای ضرب داخلی نیستند. لذا هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ می‌باشد، اما عکس آن در حالت کلی برقرار نیست.

[1] Complete
[2] Banach space
[3] Hilbert space

**تصویر متعامد:** فرض کنیم $V$ یک فضای هیلبرت و $V_0$ یک زیر فضای $V$ باشد، گوییم $V_0$ یك زیر فضای بسته است هرگاه شامل حد تمام دنباله‌های $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V_0$ باشد، یا به عبارت دیگر اگر $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V_0$ باشد و $\lim_{j\longrightarrow\infty} v_j = v_0$ نتیجه دهد که $v_0 \in V_0$ می‌باشد. بنابراین $V_0$ یك فضای هیلبرت با ضرب داخلی تعریف شده روی $V$ است.

فرض کنیم $V_0$ یک زیر فضای بسته از $V$ باشد، در این صورت $v \in V$ را می‌توان به طور یکتایی به صورت زیر نوشت

$$v = v_0 + w,$$

که در آن $v_0 \in V_0, w \in V_0^{\perp}$ می‌باشد. همچنین $v_0$ یکتا و نزدیکترین عضو در $V_0$ به $v$ می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\|v - v_0\| = \min_{u\in V_0} \|v - u\|.$$

این قضیه‌ی تصویر [۱] نامیده می‌شود، که نتیجه‌ای اساسی در نظریه فضای هیلبرت است. $v_0$ را تصویر متعامد [۲] $v$ در $V_0$ می‌نامیم و با نماد $P_{V_0}v$ نشان داده می‌شود.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** فرض کنیم $V, W$ دو فضای هیلبرت باشند، عملگرخطی $B : V \longrightarrow W$ کران‌دار نامیده می‌شود اگر ثابت $C$ وجود داشته باشد، به طوریکه:

$$\|Bv\|_W \leq C\|v\|_V, \qquad \forall v \in V. \tag{۲.۱}$$

نرم متناظر آن به صورت

$$\|B\| = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V},$$

تعریف می‌شود. بنابراین

$$\|Bv\|_W \leq \|B\|\|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

لذا $\|B\|$ کوچکترین ثابت $C$ است، که در تعریف عملگر خطی کران‌دار و رابطه‌ی (۲.۱) صدق می‌کند.

[۱] Projection theorem
[۲] Orthogonal projection

**تعریف ۱۳.۱.۱.** فضای دوگان $V$ که با $V^*$ نمایش داده می‌شود به صورت، مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی کران‌دار $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود و نرم متناظر آن به صورت زیر می‌باشد

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V}.$$

توجه داریم که فضای $V^*$ خطی است، و با توجه به نرم تعریف شده روی آن کامل نیز هست، لذا $V^*$ یك فضای باناخ می‌باشد.

**تعریف ۱۴.۱.۱.** فرض کنیم برای هر عملگر خطی مفروض $B$ روی فضای برداری $V$ عملگر خطی منحصر به فردی مانند $B^*$ روی $V$ وجود داشته باشد به طوریکه به ازای جمیع مقادیر $\alpha, \beta \in V$ داشته باشیم

$$\big(B^*(\alpha), \beta\big) = \big(\alpha, B(\beta)\big),$$

آنگاه $B^*$ را عملگر الحاقی می‌نامند. همچنین $B$ خود الحاقی است هرگاه $B^* = B$ .

**قضیه ۱۵.۱.۱.** ***نمایش ریس :***

*فرض کنیم که $V$ فضای هیلبرت با ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ باشد، لذا برای هر تابعک خطی کراندار $L$ روی $V$، $u \in V$ یکتایی وجود دارد به طوریکه:*

$$(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

*و همچنین داریم*

$$\|L\|_{V^*} = \|u\|_V.$$

*به عبارتی دیگر برای هر $L \in V^*$ وجود دارد $u \in V$ به طوریکه:*

$$(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

*اثبات.* برای اثبات به [۱۹] رجوع شود. □

**کاربردی از قضیه‌ی نمایش ریس :**

گاهی اوقات هدف ما پیدا کردن جواب مساله‌ای به صورت یافتن $u \in V$ است به طوریکه:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{۳.۱}$$

که درآن $V$ یك فضای هیلبرت، $L$ یك تابعك خطی کران‌دار روی فضای $V$ و $a(\cdot,\cdot)$ فرم دوخطی متقارن و $V$-بیضوی و در نتیجه معین مثبت می‌باشند. بنابراین $a(\cdot,\cdot)$ یك ضرب داخلی روی $V$ است، پس قضیه‌ی نمایش ریس برای هر $L \in V^*$ وجود جواب یکتای $u \in V$ را نتیجه می‌دهد. همچنین با فرض $v = u$ در (۳.۱) و با توجه به خاصیت $V$-بیضوی فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ داریم:

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u,u) = L(u) \leq \|L\|_{V^*} \|u\|_V.$$

در نتیجه داریم

$$\|u\|_V \leq C \|L\|_{V^*}, \quad C = \frac{1}{\alpha}.$$

که این مثالی از تخمین انرژی است.

*تذکر* ۱۶.۱.۱ . اگر $a(\cdot,\cdot)$ فرم دوخطی نامتقارن، معین مثبت وکران‌دار روی $V$ باشد، آنگاه وجود جوابی یکتا برای (۳.۱) با استفاده از لم لکس -میلگرام اثبات می‌شود، که تعمیمی از قضیه‌ی نمایش ریس می‌باشد.

**لم لکس-میلگرام :**

فرض کنیم $V$ یك فضای هیلبرت، $L$ یك تابعك خطی کران‌دار و $a(\cdot,\cdot)$ یك فرم دوخطی کران‌دار و $V$-بیضوی روی $V$ باشند در این صورت $u \in V$ یکتا وجود دارد به طوریکه:

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

و همچنین داریم

$$\|u\|_V \leq C \|L\|_{V^*}, \quad C = \frac{1}{\alpha}.$$

**وجود و یکتایی جواب برای معادلات خطی در فضای با بعد متناهی:** فرض کنیم $V = \mathbb{R}^N$ یك فضا با بعد متناهی باشد، معادلات خطی در شکل ماتریسی به فرم $Au = b$ در نظر می‌گیریم که در آن $A$ یك ماتریس $N \times N$ و $u, b$ بردارهایی $N$ بعدی باشند. واضح است که معادله دارای جواب یکتای $u = A^{-1}b$ است، در صورتی که ماتریس $A$ نامنفرد باشد، یعنی $det(A) = |A| \neq 0$. بنابراین در حالتی که بعد متناهی باشد، اگر یکتایی را اثبات کنیم آنگاه وجود جواب را در همان لحظه داریم.

## ۲.۱ فضاهای توابع

### ۱.۲.۱ فضاهای $\mathcal{C}^k$

برای $M \subset \mathbb{R}^d$، فضای $\mathcal{C}(M)$ را فضای خطی توابع پیوسته روی $M$ تعریف می‌کنیم. توجه داریم که

$$\mathcal{C}(\bar{M}) = \{v \in \mathcal{C}(M) \mid \text{کران‌دار } v\},$$

یک زیر فضای خطی از $\mathcal{C}(M)$ می‌باشد، با نرم متناظر

$$\|v\|_{\mathcal{C}(M)} = \sup_{x \in M} |v(x)|.$$

در صورتی که $M$ مجموعه‌ای بسته و کراندار (فشرده [۱] ) باشد، نرم متناظر مجموعه‌ی $\mathcal{C}(M)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|v\|_{\mathcal{C}(M)} = \max_{x \in M} |v(x)|.$$

در این حالت نرم، نرم-ماکسیمم [۲] نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۲.۱.** برای تابع $v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق جزئی [۳] تابع $v$ از مرتبه‌ی $|\alpha|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}}, \tag{۴.۱}$$

که در آن $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ یک بردار چند-اندیس [۴] $d$ مولفه‌ای با مولفه‌های $0 \leq \alpha_i \in \mathbb{Z}$ و از مرتبه‌ی $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ می‌باشد.

**تعریف ۲.۲.۱.** فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه باشد، یعنی یک مجموعه‌ی باز و همبند [۵]. برای هر عدد صحیح $k \geq 0$، $\mathcal{C}^k(\Omega)$, را فضای خطی همه‌ی توابع $v$ که $k$ بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، تعریف می کنیم، به عبارتی دیگر

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in \mathcal{C}(\Omega), \ \ |\alpha| \leq k\},$$

[۱] Compact
[۲] Maximum-norm
[۳] Partial derivative
[۴] Multi-index
[۵] Connected and open set

فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه‌ی کران‌دار باشد $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ را به صورت، مجموعه‌ی همه توابع در $\mathcal{C}^k(\Omega)$ به طوریکه $D^\alpha v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ برای همه $|\alpha| \leq k$، تعریف می‌کنیم، به عبارت دیگر

$$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) = \{v \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid D^\alpha v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad |\alpha| \leq k\}.$$

که یک فضای باناخ می‌باشد. همچنین در آن $D^\alpha v$ مشتق جزئی تابع $v$ تعریف شده در (۴.۱) است. نرم و نیم نرم متناظر آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha v(x)| = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)|,$$

$$|v|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| = k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| = k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha v(x)| = \max_{|\alpha| = k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)|.$$

### ۲.۲.۱ فضاهای $L_p$

فرض کنیم که $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه باشد. گاهی اوقات با انتگرال توابعی مانند $v = v(x)$ در $\Omega$، که کلی‌تر از توابع $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ هستند، یعنی لزوما پیوسته نیستند، کار می‌کنیم. لذا برای تابع نامنفی $v$ انتگرال زیر را که انتگرال لبگ [۱] نامیده می‌شود تعریف می‌کنیم، که برای $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$، همان انتگرال ریمان است.

$$I_\Omega(v) = \int_\Omega v(x)dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}).$$

**تعریف ۳.۲.۱.** تابع نامنفی $v$ انتگرالپذیرمی‌باشد اگر $I_\Omega(v) < \infty$ ، همچنین تابع حقیقی یا مختلط مقدار انتگرالپذیر است اگر $|v|$ انتگرالپذیر باشد.

**تعریف ۴.۲.۱.** برای معرفی فضای $L_p$ ، ابتدا نرم زیر را تعریف می‌کنیم

$$\|v\|_{L_P} = \|v\|_{L_P(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \\ ess_\Omega \ sup|v(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

حال فضای $L_p$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_p = \{v \mid \|v\|_{L_P} < \infty \ : \ \text{اندازه‌پذیر} \ v\}.$$

در اینجا $ess\ sup$ به معنی سوپریمم اساسی [۲] می‌باشد، که مقادیر را روی مجموعه‌های با اندازه‌ی صفر نادیده می‌گیرد.

[۱] Lebesgue integral
[۲] Essential supremum

**نکته ۵.۲.۱.** فضای $L_p\,(p \geq ۱)$ ، بر روی دامنه‌ی $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یك فضای باناخ می‌باشد.

*تذکر ۶.۲.۱.* برای حالتی که $p = ۲$ باشد، فضای تابعی $L_۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_۲ = \Big\{ v \mid (\int_\Omega |v(x)|^۲ dx)^{\frac{۱}{۲}} < \infty \Big\}.$$

این فضا یک فضای ضرب داخلی است، که ضرب داخلی متناظر آن به صورت زیر می‌باشد:

$$(v, w) = \int_\Omega v(x) w(x) dx.$$

بنابراین فضای $L_۲$ با نرم متناظر زیر یك فضای هیلبرت است،

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{۱}{۲}} = \Big( \int_\Omega |v(x)|^۲ dx \Big)^{\frac{۱}{۲}}.$$

### ۳.۲.۱ فضاهای سوبولوف

برای معرفی این فضاها ابتدا مفهوم مشتق جزئی ضعیف [1] را بیان کرده و سپس فضاهای سوبولوف را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۷.۲.۱.** مجموعه‌ی توابع به طور موضعی انتگرالپذیر را که با $L^۱_{loc}(\Omega)$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L^۱_{loc}(\Omega) = \Big\{ v \mid v \in L_۱(K),\ \Omega \text{ برای هر زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی } K \text{ از نقاط درونی} \Big\}$$

**تعریف ۸.۲.۱.** فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $v \in \mathcal{C}^۱(\bar{\Omega})$، فضای $C^۱_\circ(\Omega)$ را مجموعه همه توابع $v \in \mathcal{C}^۱(\bar{\Omega})$ که در آن $v$ روی مرز $\Omega$ به صفر می‌رسد، در نظر می‌گیریم. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi dx = -\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \phi \in C^۱_\circ = C^۱_\circ(\Omega).$$

تابع $v \in L^۱_{loc}(\Omega)$ را دارای مشتق جزئی ضعیف گوییم، هرگاه تابع $w \in L^۱_{loc}(\Omega)$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega w \phi dx, \quad \forall \phi \in C^۱_\circ(\Omega).$$

[1] Weak partial derivative

که در آن مشتق جزئی ضعیف با $w=\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ نمایش داده شده است. توجه داریم که اگر $v\in\mathcal{C}^{۱}(\Omega)$ باشد، آنگاه مشتق جزئی ضعیف وجود دارد و همان مشتق جزئی کلاسیك می‌باشد.

به طور مشابه برای تابع $v\in L^{۱}_{loc}(\Omega)$ و بردار چند-اندیسی $\alpha$، مشتق جزئی ضعیف را به صورت زیر داریم

$$\int_\Omega vD^\alpha\phi dx=(-۱)^{|\alpha|}\int_\Omega w\phi dx,\quad \forall\phi\in C_{۰}^{|\alpha|}.$$

حال برای $k\geq ۰$ فضای تابعی $H^k=H^k(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H^k=H^k(\Omega)=\{v\in L_{۲}\mid D^\alpha v\in L_{۲},\quad |\alpha|\leq k\}.$$

ضرب داخلی متناظر با این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(v,w)_k=(v,w)_{H^k}=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega D^\alpha vD^\alpha wdx=\sum_{|\alpha|\leq k}\Big(D^\alpha v,D^\alpha w\Big).$$

و نرم متناظر با این فضا و ضرب داخلی تعریف شده روی آن عبارتست از

$$\|v\|_k=\|v\|_{H^k}=(v,v)_{H^k}^{\frac{۱}{۲}}=\Big(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega(D^\alpha v)^{۲}dx\Big)^{\frac{۱}{۲}}.$$

و نیم نرم نظیر به شکل زیر می‌باشد

$$|v|_k=|v|_{H^k}=\Big(\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega(D^\alpha v)^{۲}dx\Big)^{\frac{۱}{۲}}.$$

با استفاده از این که $L^{۲}$ یك فضای کامل است، می‌توان نشان داد که $H^k$ نیز یك فضای کامل است، پس یك فضای هیلبرت می‌باشد.

*تذکر* ۹.۲.۱. فضای $H_{۰}^{۱}(\Omega)$ به صورت $H_{۰}^{۱}(\Omega)=\{v\in H^{۱}(\Omega)\mid v\mid_\Gamma=۰\}$ تعریف می‌شود، که در آن $\Gamma$ نشان دهنده مرز $\Omega$ است.

فضاهای $H^k$ مثالی از فضاهای توابع کلی‌تر می‌باشند، که فضاهای سوبولوف [۱] نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** اکنون برای ثابت $۱\leq p\leq\infty$ و عدد صحیح نامنفی $k$، فضای سوبولوف $W^{k,p}(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\mid u\in L^{۱}_{loc}(\Omega),\ D^\alpha u\in L_p(\Omega),\ |\alpha|\leq k\}.$$

که در آن $D^\alpha u$ بیانگر مشتق جزئی ضعیف تابع $u$ می‌باشد.

[۱] Sobolev Spaces