بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی‌ارشد در رشته‌ی ریاضی کاربردی،

(گرایش آنالیز عددی)

عنوان

الگوریتم‌های جدید برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیر خطی با استفاده از موجک‌های هار

استاد راهنمای اول

دکتر سهراب بزم

استاد راهنمای دوم

دکتر محمد مهدی‌زاده خالسرایی

استاد مشاور

دکتر علی شکری

پژوهشگر

معصومه رشیدی

زمستان ۱۳۹۲

تقدیم به

لبخند زیبای خدا،

مادرم

و کوه صبر و استقامت،

پدرم

ستایش

حمد و سپاس خداوند علیم را،

که مرا توفیق عنایت فرمود تا در راه کسب علم و دانش

گام بردارم.

سپاس

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

در آغاز کلام، تشکر ویژه‌ای از خانواده‌ی عزیزم مخصوصاً **مهربان پدرم** و **نازنین مادرم** دو بیکران، بی‌همتا دو زلال‌اندیش دو سرو قامتی که گوهر وجودشان و نسیم کلامشان را همواره بی هیچ منت و ادعا مرحمی نمودند بر خستگی‌هایم. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت و ققنوس جوانیشان به پای روشنی حیات من سوخت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق و محبت بر دستان پر مهرشان بوسه می‌زنم.

و به پاس احترام به حرمت دانش بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد فرزانه و دلسوزم

جناب آقای دکتر سهراب بزم

که در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بودم و بزرگترین افتخارم در طول تحصیل، شاگردی این استاد بی‌نظیر و بزرگوار می‌باشد، قدردانی بنمایم و سلامتی و سربلندی ایشان را از خالق هستی خواهانم.

از استاد باکمالات و ارجمند جناب آقای **دکتر محمد مهدی‌زاده خالسرایی** ، که استاد راهنمای دوم اینجانب بودند و همچنین افتخار شاگردی ایشان را داشتم کمال تشکر را دارم و سلامتی و پیروزی را برایشان آرزو دارم.

همچنین از استاد با وقار و باتقوا جناب آقای **دکتر علی شکری**، که استاد مشاور اینجانب بودند و از نظرات و راهنمایی‌های ایشان در طول دوره بهره‌مند گردیدم، تشکر و قدرانی می‌نمایم و سلامتی و پیروزی را برایشان آرزو دارم.

از استاد گرامی جناب آقای **دکتر محمد شهریاری**، که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه‌ام را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم و از خداوند یکتا سلامتی و شادکامی ایشان را خواستارم.

معصومه رشیدی

زمستان ۹۲

نام خانوادگی: رشیدی نام: معصومه

عنوان پایان‌نامه: الگوریتم‌های جدید برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیرخطی با استفاده از موجک‌های هار

استاد راهنمای اول: دکتر سهراب بزم
استاد راهنمای دوم: دکتر محمد مهدی‌زاده خالسرایی
استاد مشاور: دکتر علی شکری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی
گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۸۷

کلیدواژه‌ها: موجک هار - معادلات انتگرال فردهلم - معادلات انتگرال ولترا

چکیده: دو الگوریتم جدید براساس موجک‌های هار ارایه شده است. الگوریتم اول برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم و دومی برای حل عددی معادلات انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم به کار برده شده است. این روش‌ها جهت بکارگیری و استفاده از ویژگی‌های خاص موجک‌های هار در هر دو حالت یک و دو بعدی طراحی شده است. فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی ضرایب هار بدون حل دستگاه معادلات به دست آمده‌اند. سپس این فرمول‌ها در روش‌های عددی ارایه شده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مقایسه با سایر روش‌های عددی، مزیت روش ارایه شده در این است که در آن هیچ روش عددی میانی برای محاسبه‌ی انتگرال موجود در معادلات انتگرال استفاده نمی‌شود. کارایی روش ارایه شده برای حل مسایل منتخب مورد تایید می‌باشد و نتایج عددی با نتایج موجود در نوشتارهای دیگر مقایسه شده‌اند.

فهرست مطالب

تاریخچه

معادلات انتگرال کاربردهای گوناگونی در بسیاری از حوزه‌ها مانند مکانیک پیوسته، نظریه‌ی پتانسیل، ژئوفیزیک، الکتریسیته و مغناطیس، نظریه‌ی جنبشی گازها، پدیده‌ی وراثت در فیزیک و زیست شناسی، نظریه‌ی تجدید و علم پزشکی دارد (مراجع [۲۲] و [۳۰] را ملاحظه فرمایید).

در تحقیقات قرن اخیر در نظریه‌ی کشسانی، این نوع معادلات نقش مهمی را بازی کرده‌اند، به خصوص آن دسته که به معادلات انتگرال منفرد شهرت دارند. معادلات انتگرال برای سال‌های زیادی است که در علوم ریاضی ظاهر شده‌اند و مبدأ آن به تئوری انتگرال فوریه برمی‌گردد.

لیکن توسعه نظریه‌ی معادلات انتگرال در اواخر قرن ۱۹ شروع شد و در محدوده‌ی سال‌های ۱۹۰۳ − ۱۹۰۰ بود که یک ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا [۱] روی این نوع معادلات کار کرد. همچنین یک ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم [۲] در همان سال‌ها روی یک روش جدید جهت حل مسأله دیریکله [۳] سعی بسیاری نمود. از آن زمان تا عصر حاضر معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است، زیرا آن‌ها به طور پیوسته با مسایل جدید و جالبی برخورد می‌کنند.

البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند. به طوری که اگر معادله‌ی دیفرانسیل

[۱] Volterra
[۲] Fredholm
[۳] Dirichlet

مورد نظر به صورت یک مسأله‌ی مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله‌ی انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع معادلات انتگرال فردهلم خواهد بود و اگر معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله‌ی مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله‌ی حاصل یک معادله‌ی انتگرال ولترا خواهد بود. بنابراین یک رویکرد محاسباتی برای حل معادلات انتگرال، یک شاخه‌ی ضروری از تحقیقات علمی می‌باشد [۳۲].

معادلات انتگرال منفرد در اوایل دهه‌ی قرن جاری در ارتباط با دو مسأله‌ی کاملاً متفاوت توسط دو نفر معرفی شد. یکی از آنها هیلبرت [۱] بود که به بعضی مسایل مقدار مرزی در نظریه‌ی توابع تحلیلی برخورد کرد. دیگری پوانکاره [۲] بود که در تئوری عمومی جزر و مد با معادلات انتگرال مواجه شد. نظریه‌ی معادلات انتگرال منفرد در دهه‌ی سوم و چهارم توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام ژیراد [۳] و دو ریاضیدان روسی به نام‌های وکوا [۴] و موسخلیش ویلی [۵] توسعه پیدا کرد.

قضایای فردهلم از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند. این قضایا از ابتدا توسط فردهلم فقط برای هسته‌های پیوسته ارایه شدند، ولی در ادامه افراد دیگری این قضایا را برای هسته‌های کلی‌تری تعمیم دادند. لذا لازم است از اشخاصی نظیر کارلمن [۶] هم که در این راه نقش عمده‌ای داشته‌اند یاد کنیم. البته ریس [۷] با اصلاحات وسیعی که از نظریه‌ی عملگرها داشت قضایای مذکور را به صورت وسیع‌تری تعمیم داد، زیرا او به یک معادله انتگرال به صورت یک عملگر نظر انداخته و قضایای فردهلم را برای یک عملگر فشرده تعمیم داد.

یکی از مسایل خوش‌وضع، معادلات انتگرال نوع دوم می‌باشد که به صورت تحلیلی توسط فردهلم حل شده است و از نظر عددی هم می‌توان با روش‌های نیستروم [۸]، ال جندی [۹]، مسأله کمترین مربعات [۱۰] و گلرکین [۱۱] این رده از مسایل را حل

[۱] D. Hilbert [۲] H. Poincare [۳] Zhirad [۴] Vocva [۵] Mosxlish Vili
[۶] F. Carleman [۷] F. Riesz [۸] Nyström [۹] El-gendi [۱۰] Least square problem
[۱۱] Galerkin

کرد. معادلات نوع اول از مسایل بدوضع هستند و چون ماهیت کامپیوترهای رقمی، خطاپذیر است، به راحتی نمی‌توان این نوع معادلات را حل کرد. گاهی اوقات این نوع مسایل ممکن است جواب نداشته باشد و یا اینکه جواب یکتا نباشد. این رده از مسایل را می‌توان با استفاده از روش‌های بسط، هم‌محلی [۱]، تابع ویژه، منظم سازی [۲]، تکراری و گلرکین سریع [۳] حل نمود.

[۱] Collocation

[۲] Regularizei

[۳] Fast Galerkin

مقدمه

معادلات انتگرال در زمینه‌های مختلفی از جمله فیزیک و مهندسی کاربرد دارند. با این وجود جواب‌های تحلیلی برای این نوع معادلات یا وجود ندارد و یا یافتن آن سخت است. به خاطر همین حقیقت روشهای عددی مختلفی برای به دست آوردن جواب‌های معادلات انتگرال ارایه شده‌اند که از جمله به چندجمله‌ایهای چبیشف [۱] [۳۷] ، روش آشفتگی هموتوپی اصلاح شده [۲] [۲۱] و [۲۹] ، روشهای موجک [۳] [۹]، [۴۷]، [۴۹] و [۵۸] ، توابع پایه شعاعی [۴] $(RBFs)$ [۳] و [۴] ، تقریب برنشتاین [۵] [۴۱] ، روش ماتریس توپلیتس [۲] ، روش چندگامی خطی [۶] [۳۱] و روش تابع مثلثی [۷] [۴۰] می‌توان اشاره کرد. برخی از این روشها تنها برای معادلات انتگرال خطی و برخی دیگر برای حالات خاصی از معادلات انتگرال غیرخطی می‌توانند به‌کار روند. بنابراین برای حل یک نوع کلی از معادلات انتگرال غیرخطی نیاز به یک الگوریتم کلی احساس می‌شود. در این پایان نامه، دو الگوریتم جدید براساس موجک‌های هار ارایه شده است که برای هر دو نوع معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیرخطی در حالت کلی می‌توانند به‌کار روند. بیشترین استفاده از موجک‌ها در دو دهه‌ی اخیر رایج شده است. اخیراً موجک‌ها در نوشتارهای مربوط به تقریب عددی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این

[۱] Chebyshev polynomials
[۲] Modified homotopy perturbation method
[۳] Wavelet Methods
[۴] Radial Basis Functions
[۵] Bernstein’s approximation
[۶] Linear multistep method
[۷] Triangular function method

موضوع عمدتاً به خاطر این است که موجک‌ها یک مکانیسم طبیعی برای تجزیه جواب به یک مجموعه از ضرایب، که به مقیاس و پارامتر مکان بستگی دارند، را فراهم می‌آورند. این ویژگی، موجک‌ها را برای تقریب عددی نسبت به سایر روشها متمایز می‌کند. پژوهشگران روشهای مختلفی را برای تقریب عددی با استفاده از موجک‌ها به‌کار برده‌اند. برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش هم‌محلی موجک [۱] [۵۴] ، روش گلرکین موجک [۲] [۲۸] ، روش عنصر متناهی بر پایه موجک [۳] [۱۹] و روش بدون شبکه موجک [۴] [۳۸] می‌باشند. خلاصه‌ای از کارهایی که اخیراً انجام شده است را می‌توان در [۱۶] پیدا کرد. پژوهشگران موجک‌ها را برای انتگرال گیری عددی [۶]، [۲۴] و [۵۲] و برای حل عددی معادلات انتگرال [۹]، [۴۲]، [۴۷]، [۴۹] و [۵۸] ، معادلات انتگرال-دیفرانسیل [۵] [۵۰] ، معادلات دیفرانسیل معمولی [۱۷]، [۵۳] و [۵۴] ، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی [۶] [۱۵] و [۴۶] ، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری [۷] [۲۷] و [۵۶] به‌کار برده‌اند. در این روش‌ها از انواع مختلف موجک‌ها مانند موجک هار [۷]، [۹]، [۳۳]، [۳۶]، [۴۴]، [۴۵]، [۴۷] و [۴۹] ، لژاندر [۸] [۵۸] ، مثلثاتی [۹] [۲۰] ، CAS [۵۷] ، چبیشف [۱۱] و $Coifman$ [۴۳] استفاده شده است .

بسیاری از پژوهشگران موجک‌های هار را به خاطر سادگی آنها برای حل عددی معادلات انتگرال به کار برده‌اند. بابلیان و شهسواران [۱۰] در [۹] ، موجک‌های هار را برای دسته‌ی ویژه‌ای از معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی به‌کار برده‌اند. لپیک و تامی [۱۱] در [۳۶] موجک‌های هار را برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی به کار برده‌اند اما روش آنها تقریبی از

[۱] Wavelet collocation method
[۲] Wavelet Galerkin method
[۳] Wavelet-based finite element method
[۴] Wavelet meshless method
[۵] Integro-differential
[۶] Partial differential
[۷] Fractional partial differential
[۸] Legendre
[۹] Trigonometric
[۱۰] Babolian and Shahsavaran
[۱۱] Lepik and Tamme

انتگرالهای خاص را دربرمی‌گیرد. روشی که در این پایان نامه ارایه می‌شود جدید و متفاوت از همه روشهای موجک هار به کار رفته برای معادلات انتگرال می‌باشد. مزیت عمده این روش این است که می‌تواند برای انواع کلی معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیرخطی به کار برده شود.

مرجع اصلی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته، عبارت است از ([۵])

I. Aziz, Siraj-ul-Islam, New algorithms for the numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets, J. Comput. Appl. Math. 239 (2013) 333–345.

ترتیب ارایه مطالب در این پایان‌نامه بدین صورت است که ابتدا در فصل ۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی و برخی از روش‌های حل معادلات انتگرال را بیان می‌نماییم. در فصل ۲ به بررسی دو الگوریتم برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیرخطی می‌پردازیم. در فصل آخر چند مثال مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج عددی آنها گزارش شده است. همچنین این نتایج عددی با نتایج عددی موجود در مقالات دیگر مقایسه شده است.

فصل ۱

مقدمات و برخی روش‌های حل معادلات انتگرال

در این فصل تعاریف، قضایای مقدماتی (بدون اثبات) و برخی از نمادهایی که در فصل‌های دیگر مورد نیاز است را بیان می‌کنیم و چند روش برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیرخطی معرفی خواهیم کرد. همچنین موجک هار و مفاهیم مربوط به آن را توضیح خواهیم داد. برای جمع‌آوری مطالب این فصل از [۱]، [۱۳]، [۱۸] و [۲۳] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در آنالیز عددی، خیلی اوقات نیاز داریم تا نزدیکی یک جواب عددی به یک جواب دقیق را بررسی کنیم. برای این‌که به این سوال به طور کمّی پاسخ دهیم نیاز داریم تا یک مقیاس از قدر مطلق تفاضل بین جواب عددی و جواب دقیق داشته باشیم. یک نرم از یک بردار در یک فضای برداری چنین مقیاسی را فراهم می‌کند.

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری V یک مجموعه از عناصر $\{u, v, \ldots\}$ به نام نقاط یا بردارها است که تحت جمع $(u + v \in V)$ و تحت ضرب با یک عدد اسکالر (حقیقی یا مختلط) α، $(\alpha v \in V)$ بسته است.

مثال ۲.۱.۱. فضای $C[a, b]$ از توابع حقیقی یا مختلط مقدار پیوسته v که روی $[a, b]$ تعریف شده‌اند با جمع تعریف شده با $(v_۱ + v_۲)(s) = v_۱(s) + v_۲(s)$ و ضرب عددی تعریف شده با $(\alpha v)(s) = \alpha v(s)$ یک فضای برداری است.

تعریف ۳.۱.۱. یک تابع حقیقی مقدار $\|.\|$ تعریف شده روی یک فضای برداری یک نرم نامیده می‌شود اگر در خواص زیر صدق کند:

الف) برای هر $v \in V$، $\|v\| \geqslant ۰$؛

ب) $\|v\| = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$؛

ج) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $v \in V$؛

د) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ برای هر $u, v \in V$.

خاصیت (د) نامساوی مثلثی نامیده می‌شود. اگر خاصیت (ب) برقرار نباشد می‌گوییم $\|.\|$ یک شبه نرم است.

تعریف ۴.۱.۱. یک فضای برداری V که با یک نرم $\|.\|$ تجهیز شده است یک فضای برداری نرمیده، یا به طور ساده یک فضای نرمیده نامیده می‌شود.

در مطالعه ما از معادلات انتگرال، مثال اساسی از فضای نرمیده، فضای برداری $C[a, b]$ (که در مثال (۲.۱.۱) تعریف شد) می‌باشد که یا با نرم ماکسیمم

$$\|v\|_\infty = \max_{t \in [a,b)} |v(t)|, \tag{۱.۱}$$

یا نرم مربع میانگین

$$\|v\|_{۲} = \left(\int_a^b |v(t)|^{۲} dt\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

تجهیز شده است .

تعریف ۵.۱.۱. یک فضای برداری نرمیده V کامل است اگر هر دنباله کشی $\{v_n\}$ در آن همگرا باشد. این که یک فضای برداری کامل است یا نه ممکن است به نرم انتخاب شده برای آن بستگی داشته باشد. برای مثال، فضای برداری $C[a,b]$ با نرم ماکسیمم کامل است ولی با نرم مربع میانگین کامل نیست.

نشان می‌دهیم که فضای برداری $C[a,b]$ با نرم مربع میانگین کامل نیست. کافی است یک دنباله کوشی پیدا کنیم که حد آن ناپیوسته شود. برای این کار دنباله تابع چندضابطه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$x_m(t) = \begin{cases} ۰, & ۰ \le t < \frac{۱}{۲}, \\ \frac{۲}{a_m - ۱}, & \frac{۱}{۲} \le t < a_m, \\ ۱, & a_m \le t \le ۱, \end{cases} \tag{۲.۱}$$

که در آن، $a_m = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{m}$. نشان می‌دهیم که این دنباله، یک دنباله کوشی با نرم $\|.\|_{۲}$ است ولی با این نرم همگرا نیست.

$$\forall \epsilon > ۰ \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n,m \geq \mathbb{N} \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_{۲}^{۲} = \int_{۰}^{۱} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid^{۲} dt = \frac{(n-m)^{۲}}{۳n^{۲}m}$$

$$\le \frac{۱}{۳m} - \frac{۱}{۳n} < \epsilon \qquad \text{(خاصیت ارشمیدسی)}.$$

حال فرض می‌کنیم (فرض خلف) که این دنباله به تابعی پیوسته مانند $x(t)$ روی بازه $[۰,۱]$ همگرا باشد در این صورت

$$\|x_m - x\|_{۲}^{۲} = \int_{۰}^{۱} \mid x_m(t) - x(t) \mid^{۲} dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \mid x(t) \mid^{۲} dt + \int_{\frac{۱}{۲}}^{a_m} \mid x_m(t) - x(t) \mid^{۲} dt + \int_{a_m}^{۱} \mid ۱ - x(t) \mid^{۲} dt,$$

اگر $x_m \longrightarrow x$ آنگاه $\|x_m - x\|_{۲}^{۲} \longrightarrow ۰$. اما تمام جملات انتگرال‌ها نامنفی‌اند و در صورتی صفر می‌شوند که تک تک

جملات صفر شوند یعنی

$$x(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}<t\le 1,\end{cases}$$

که با پیوسته بودن $x(t)$ در تناقض است زیرا در نقطه $t=\frac{1}{2}$ ناپیوسته است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

تعریف ۶.۱.۱. ضرب درونی. یک ضرب درونی، یک تابع دو متغیره عددی مقدار (حقیقی یا مختلط) با خواص زیر است:

الف) $(u,v)=(v,u)^*$؛

ب) $(u,\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha(u,v_1)+\beta(u,v_2)$؛

ج) $(v,v)\geqslant 0$؛

د) $(v,v)=0$ اگر و تنها اگر $v=0$،

برای هر $u,v,v_1,v_2\in V$ و هر $\alpha,\beta\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$. علامت ستاره، مزدوج مختلط را نشان می‌دهد.

تعریف ۷.۱.۱. یک فضای ضرب درونی یک فضای برداری V است که در آن (u,v) برای هر جفت از اعضای u و v در V تعریف شده است.

مثال ۸.۱.۱. فضای برداری $C[a,b]$ نسبت به

$$(u,v)=\int_a^b u^*(s)v(s)ds.$$

یک فضای ضرب درونی است.

تعریف ۹.۱.۱. فضای هیلبرت. فضای هیلبرت یک فضای ضرب درونی کامل است.

۱.۱.۱ فضای توابع $L^۲([a,b])$

در بحث‌های همگرایی که در روش‌های عددی پیش می‌آیند، معمولاً همیشه یک مجموعه از فرض‌های محدود کننده روی توابع و هسته‌های موجود قرار می‌دهیم. اغلب اوقات این فرض‌ها قوی هستند؛ برای مثال وجود مشتقات پیوسته از مرتبه p یا به طور مربع انتگرال پذیر بودن روی یک مربع. با این وجود، به خصوص در حالتهای مرتبط با روش‌های بسط، آنالیز همگرایی به نرخ‌های همگرایی بسط‌های متعامد بستگی دارد. این نرخ‌های همگرایی به طور ضمنی با خواص پیوستگی توابعی که این بسط‌ها را نمایش می‌دهند مربوط می‌شوند. با این حال، وجود و همگرایی خود این بسط‌ها به برخی فرض‌های نسبتاً محدود کننده روی توابع نیاز دارد. در اینجا ما بحث خود را به توابعی که در تعریف ۱۰.۱.۱ معرفی می‌شوند معطوف می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. توابع $L^۲([a,b])$. یک تابع مختلط مقدار (یا حقیقی مقدار) x از متغیر حقیقی t روی بازه $[a,b]$ یک تابع $L^۲$ نامیده می‌شود اگر در بازه $[a,b]$ اندازه‌پذیر باشد و

$$\int_a^b |x(t)|^۲ dt < \infty. \qquad (۳.۱)$$

در رابطه (۳.۱) انتگرال‌گیری به مفهوم لبگ انجام می‌شود. مجموعه چنین توابعی یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که به عنوان فضای $L^۲([a,b])$ شناخته می‌شود. به عبارت دیگر:

$$L^۲([a,b]) = \Big\{ x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{اندازه پذیر است } [a,b] \text{ روی } x\ ,\ \int_a^b |x(t)|^۲ dt < \infty \Big\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. دو تابع x و y درفضای $L^۲([a,b])$ را معادل یا تقریباً همه جا مساوی می‌گوییم هرگاه این دو تابع برای همه مقادیر t، به جز برای مقادیری از t که اندازه لبگ صفر دارند، مساوی باشند و می‌نویسیم $x =^\circ y$. بنابراین x و y

معادل هستند اگر

$$\int_a^b [x(t)-y(t)]^{۲} dt = ۰.$$

ما در فضای توابع $L^{۲}([a,b])$ فقط با همگرایی تقریباً همه جا سر و کار داریم. مجموعه‌های با اندازه صفر را بدون اهمیت تلقی می‌کنیم و تفاوت بین تساوی $(x(t)=y(t), \forall t)$ و معادل بودن را نادیده می‌گیریم. بنابراین می‌نویسیم:

$$x(t)=y(t) \Longleftrightarrow \int_a^b [x(t)-y(t)]^{۲} dt = ۰.$$

در این حال بین یک تابع $z(t)$ که تقریباً همه جا صفر است (تابع پوچ) و تابع صفر هیچ تفاوتی قایل نخواهیم شد. به عبارت دیگر داریم:

$$z=۰ \Longleftrightarrow \int_a^b z^{۲}(t) dt = ۰.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} x_n(s)$ از توابع $L^{۲}([a,b])$ را همگرای یکنواخت نسبی به $x(s)$ می‌گوییم هرگاه دنباله جمع‌های جزیی آن یعنی $\left\{\sum\limits_{i=۱}^{n} x_i(s)\right\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرای یکنواخت نسبی به $x(s)$ باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} x_n(s)$ از توابع $L^{۲}([a,b])$ را همگرای مطلق یکنواخت نسبی گوییم هرگاه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} |x_n(s)|$ همگرای یکنواخت نسبی باشد.

۲.۱.۱ نرم‌های توابع $L^{۲}([a,b])$

نرم $L_{۲}$ روی فضای $\mathrm{L}^{۲}([a,b])$ را به صورت

$$\| x \|_{۲} = \left(\int_a^b |x(t)|^{۲} dt\right)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۴.۱)$$