دانشگاه شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه ارشد ریاضی

عنوان

وجود بهترین تقریب همزمان در فضاهای مختلف

نگارش
فاطمه عامری

استاد راهنما
دکتر مهدی ایرانمنش

تاریخ

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

تقدیم به پدربزرگ و مادربزرگ عزیزم؛ این دو عزیز که هستی خودشان را به پای من ریختند و مهربانی را به من آموختند.
تقدیم به پدر عزیزم؛ او که قامت استوارش به زیر بار محبت خمید و وجودش به من توان زیستن داد.
تقدیم به مادر مهربانم؛ او که بهشت را در قلب پر محبتش جای داد. فرشته ای که با جانش روح به تنم دمید.
تقدیم به همسر با محبتم؛ او که در تک تک لحظات در کنارم بود و با تمام وجود در اتمام این پایان نامه کمکم نمود.
تقدیم به تمامی اساتید گرانقدری که در طول دوره تحصیل از خرمن علمشان خوشه چیدم.

با تشکر از استاد راهنما جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش و استاد مشاور جناب آقای دکتر کامران شریفی که با راهنمایی ها و حمایت های ارزشمند خود اینجانب را در انجام صحیح و کامل این پایان نامه یاری رساندند.

چکیده

نظریه بهترین تقریب همزمان در شاخه های مختلفی از ریاضیات از جمله بهینه سازی ، آنالیز عددی و ... به کار برده می شود. مثال ساده این بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه است که نسبت به نقطه ای در فضا دارای کمترین فاصله باشد.

هدف اصلی ما در این پایان نامه معرفی مفهوم بهترین تقریب همزمان در چند فضای مختلف است. همچنین به دنبال بیان شرایطی هستیم که تحت آن شرایط یک مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال باشد.

واژه‌های کلیدی: به طور همزمان پروکسیمینال ، بهترین تقریب همزمان و به طور همزمان چبیشف

پیشگفتار

بهترین تقریب همزمان نقش مهمی در بخش هائی از ریاضیات از جمله بهینه سازی و اقتصاد ایفا می کند. در سال ۱۹۷۴ گول [۱] ، هلند [۲] و نسیم [۳] بهترین تقریب همزمان را در فضای خطی نرمدار X بررسی کردند. بهترین تقریب همزمان در سال ۱۹۷۶ توسط دانهام [۴] ، دیاز [۵] و لاگلین [۶] مورد مطالعه قرار گرفت که X فضای توابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه فشرده $[a,b]$ و G زیرمجموعه ای از X است.

در این پایان نامه مساله بهترین تقریب همزمان را در چند فضا مورد بررسی قرار می دهیم و شرایطی را جستجو می کنیم که تحت آن شرایط یک مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال باشد. همچنین به دنبال آن هستیم که آیا می توان معادلی برای بهترین تقریب همزمان در فضاهای مورد بحث پیدا کرد؟

این پایان نامه شامل شش فصل است. در فصل اول به تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصول بعد پرداخته شده است. در فصل دوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع پیوسته مورد مطالعه قرار می گیرد. در فصل سوم مساله بهترین تقریب همزمان در فضای توابع $L^p(I,X)$ مطرح می شود. فصل چهارم به بررسی این مساله در $L^\infty(I,X)$ پرداخته است. فصل پنجم این موضوع را به طور کلی در توابع و عملگرها مورد بررسی قرار می دهد و در نهایت فصل ششم به نتایجی در مورد مفهوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع $L^p(I,X)$ اشاره می کند.

---

[۱] Geol
[۲] Holand
[۳] Nasim
[۴] Dunham
[۵] Diaz
[۶] Laughlin

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از آنالیز

در این فصل به تعاریف، قضایا و لم های مورد نیاز در فصول بعد اشاره می نماییم که از مراجع [۴] ، [۵] ، [۸] ، [۹] ، [۱۱] ، [۱۲] و [۱۴] برگرفته شده اند.

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک متر روی مجموعه X یک تابع مانند $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ است به قسمی که:

۱. $x = y \Longleftrightarrow \rho(x, y) = 0$

۲. برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

۳. برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

$\rho(x, y)$ را فاصله x از y می نامند. مجوعه ای مانند X که با یک متر مجهز شده باشد را یک فضای متریک می نامند.

تعریف ۲.۱.۱. یک گردایه مانند τ از زیرمجموعه های مجموعه X یک توپولوژی در X نامیده می شود اگر سه خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. τ $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$ باشد.

۲. اگر برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$، $V_i \in \tau$ باشد آنگاه $V_۱ \cap V_۲ \cap \cdots \cap V_n \in \tau$ است.

۳. اگر $\{V_\alpha\}$ یک گردایه دلخواه از اعضای τ (متناهی ، شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر) باشد آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$ است.

تعریف ۳.۱.۱. اگر τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت X یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه های باز در X می نامند.

تعریف ۴.۱.۱. گردایه ای مانند m از زیرمجموعه های مجموعه X را یک σ - جبر نامیم اگر در خواص زیر صدق کند:

۱. $X \in m$

۲. اگر $A \in m$ باشد آنگاه $A^{\complement} \in m$ است.

۳. اگر برای $i = ۱, ۲, \cdots$، $A_i \in m$ باشد آنگاه $\cup_{i=۱}^{\infty} A_i \in m$ است.

تعریف ۵.۱.۱. اگر m یک σ - جبر [۱] روی X باشد آنگاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای m را مجموعه های اندازه پذیر در X می نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. هرگاه X یک فضای اندازه پذیر و Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به Y باشد گوییم f اندازه پذیر است اگر هر مجموعه باز در Y توسط $f^{-۱}$ به مجموعه اندازه پذیری در X بازگردد.

تعریف ۷.۱.۱. یک اندازه مثبت ، تابعی مانند μ است که بر یک σ جبر مانند m تعریف شده است که بردش در $[۰, \infty)$ است و جمعی شمارش پذیر است یعنی هرگاه $\{A_i\}$ ها گردایه ای شمارش پذیر و از هم جدا از اعضای

[۱] σ - aljebra

m باشد آنگاه داریم:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

تعریف ۸.۱.۱. هر فضای اندازه، یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه مثبت تعریف شده بر روی σ - جبر مجموعه های اندازه پذیر خود داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. $\chi_E(x)$ را تابع مشخصه مجموعه E می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

تعریف ۱۰.۱.۱. یک تابع مختلط S روی فضای اندازه پذیر X که بردش فقط از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده باشد یک تابع ساده نامیده می شود. برد یک تابع ساده زیرمجموعه ای متناهی از $[0,\infty)$ است.

گردایه ای از مجموعه ها مانند $A_i=\{x:S(x)=\alpha_i\}$ را در نظر می گیریم. هرگاه $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ مقادیر متمایز یک تابع ساده S باشند، آنگاه $S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$ است که در آن χ_{A_i} تابع مشخصه A_i است.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f:X\to[0,\infty)$ اندازه پذیر باشد. در این صورت توابع اندازه پذیر ساده ای چون S_n بر X وجود دارند به طوریکه:

۱. $0\leq S_1\leq S_2\leq\cdots\leq f$

۲. برای هر $x\in X$ وقتی $n\to\infty$ میل می کند آنگاه $S_n(x)\to f(x)$ میل می کند.

اثبات. مرجع [۱۱] قضیه ۱.۱۷.

□

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $S:X\to[0,\infty)$ یک تابع اندازه پذیر ساده به شکل $S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$ باشد که در آن مقادیر $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ متمایزاند و $E\in m$ است. تعریف می کنیم:

$$\int_E Sd\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E)$$

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر $f : X \to [0, \infty)$ اندازه پذیر و $E \in m$ باشد. تعریف می کنیم:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E S d\mu$$

که سوپریمم روی تمام توابع اندازه پذیر ساده S که $0 \leq S \leq f$ است گرفته شده است. $\int_E f d\mu$ را انتگرال لبگ f روی E نسبت به اندازه μ می نامند که عددی در $[0, \infty]$ می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر f یک تابع اندازه پذیر دلخواه و مختلط روی X باشد و $0 < p < \infty$ باشد. تعریف می کنیم:

$$\| f \|_p = [\int | f |^p \, d\mu]^{\frac{1}{p}}$$

و همچنین $L^p(X, m, \mu)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L^p(X, m, \mu) = \{f : X \longrightarrow C, \text{اندازه پذیر است } f, \| f \|_p < \infty\}$$

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید $g : X \to [0, \infty)$ اندازه پذیر باشد و S مجموعه تمامی α های حقیقی باشد به طوریکه $\mu(g^{-1}(\alpha, \infty]) = 0$. حال β را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\beta = \begin{cases} \infty & S = \emptyset \\ \inf S & S \neq \emptyset \end{cases}$$

β را سوپریمم اساسی g می گویند.

تعریف ۱.۱.۱۶. اگر f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد. $\| f \|_\infty$ را سوپریمم اساسی $| f |$ تعریف کرده و فرض می کنیم $L^\infty(\mu)$ مجموعه تمامی f هایی باشد که $\| f \|_\infty < \infty$. اعضای $L^\infty(\mu)$ را توابع اندازه پذیر به طور اساسی کراندار بر X می نامند.

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر (X, m, μ) یک فضای اندازه باشد. مجموعه $A \in m$ یک اتم برای اندازه μ نامیده می شود اگر و فقط اگر $0 < \mu(A) < \infty$ و برای هر $C \subseteq A$ که $C \in m$ داشته باشیم $\mu(C) = 0$ یا $\mu(C) = \mu(A)$. یک اندازه که فاقد اتم باشد غیر اتمی [۲] نامیده می شود.

[۲] Non-atomic

تعریف ۱۸.۱.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار می گوییم اگر برای هر $x \in X$ یک عددحقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد به قسمی که در موارد زیر صدق کند:

۱. برای تمامی $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

۲. اگر $x \in X$ و α یک عدد ثابت باشد آنگاه

$$\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$$

۳. $\| x \| = ۰ \iff x = ۰$

هر فضای خطی نرمدار را می توانیم به عنوان یک فضای متریک در نظر بگیریم که در آن فاصله بین هر دو نقطه x و y یا $d(x,y)$ ، همان $\| x - y \|$ است و توپولوژی آن را توپولوژی حاصل از نرم یا توپولوژی یکنواخت می گوییم.

تعریف ۱۹.۱.۱. روی فضای برداری X با استفاده از تابع $d(x,y) = \| x - y \|$ متریکی بر حسب نرم تعریف می کنیم. با توجه به ویژگی های نرم ، $d(\cdot,\cdot)$ یک متریک روی X است. این متریک را متریک القائی به وسیله نرم می نامیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. هر فضای نرمدار مانند X را که نسبت به متریک القایی به وسیله نرم، فضایی تام باشد یک فضای باناخ [۳] می نامیم. به عبارت دیگر هر دنباله کشی در این فضای نرمدار همگرا است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد. برای هر زیر مجموعه غیر تهی W از X و هر $x \in X$ تعریف می کنیم:

$$d(x, W) = \inf_{w \in W} \| x - w \|$$

[۳] Banach

$w_\circ \in W$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می شود اگر

$$\| x - w_\circ \| = d(x, W)$$

اگر برای هر $x \in X$ ، حداقل یک بهترین تقریب $w \in W$ موجود باشد. در این صورت W ، یک زیر مجموعه پروکسیمینال از X نامیده می شود.

اگر برای هر $x \in X$ ، یک بهترین تقریب یکتا در W موجود باشد W یک زیر مجموعه چبیشف از X نامیده می شود.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد و W زیر مجموعه ای از X باشد. برای هر $x \in X$ ، $P_W(x)$ به مجموعه تمامی بهترین تقریب های X از W اشاره می کند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_W(x) := \{w \in W : \| x - w \| = d(x, W)\}$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد. W زیرمجموعه ای از X و S یک مجموعه کراندار از X باشد، تعریف می کنیم:

$$d(S, W) := \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \| s - w \|$$

عنصر $w_\circ \in W$ یک بهترین تقریب همزمان S از W نامیده می شود هرگاه:

$$d(S, W) = \sup_{s \in S} \| s - w_\circ \|$$

مجموعه تمامی بهترین تقریب های همزمان S از W با S_W نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_W := \{w \in W : \sup_{s \in S} \| s - w \| = d(S, W)\}$$

اگر برای هر مجموعه کراندار S در X ، حداقل یک بهترین تقریب همزمان S از W وجود داشته باشد. در این صورت W، یک زیر مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال از X نامیده می شود.

اگر برای هر مجموعه کراندار S در X ، یک بهترین تقریب همزمان یکتا برای S از W وجود داشته باشد. در این صورت W، یک زیر مجموعه به طور همزمان چبیشف از X نامیده می شود.

تعریف ۲۴.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای هاسدورف است هر گاه به ازای هر $p \in X$ و $q \in X$ که $p \neq q$ باشد یک p همسایگی مانند U و یک q همسایگی مانند V وجود داشته باشد به طوریکه $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری ، F یک میدان و τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت X یک فضای برداری توپولوژیک نامیده می شود هر گاه:

۱. هر نقطه از X یک مجموعه بسته باشد.

۲. نگاشت های $X \times X \to X$ و $F \times X \to X$ به ترتیب با ضابطه های $x+y$ و αx نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

قضیه ۲۶.۱.۱. هر فضای برداری توپولوژیک هاسدورف است.

اثبات. مرجع [۱۲] قضیه ۱۲.۱ . □

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید F یک خانواده از توابع باشد که هر تابع ، فضای متریک (X, d_X) را به فضای متریک (Y, d_Y) می نگارد. خانواده F در X $x_\circ \in X$ همپیوسته نامیده می شود اگر برای هر $\epsilon > ۰$ ، $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به طوریکه برای تمامی $f \in F$ داشته باشیم:

$$d_X(x_\circ, x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_\circ), f(x)) < \epsilon$$

اگر تعریف بالا برای هر $x_\circ \in X$ برقرار باشد می گوییم F در X هم پیوسته است.

قضیه ۲۸.۱.۱. (اصل انتخاب). [۴] فرض کنید A یک تابع روی مجموعه I باشد به قسمی که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $A(x) \neq \emptyset$. در این صورت تابعی مانند f وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in I$ ، $f(x) \in A(x)$ باشد.

[۴] Axiom of choice

اثبات. مرجع [۴] قضیه ۱.۵ . □

تعریف ۲۹.۱.۱. نگاشت $P : X \to Y$ را یک عملگر خطی و یا به اختصار عملگر می نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم:

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$$

تعریف ۳۰.۱.۱. عملگر $P : X \to Y$ ایزومتریک است هرگاه داشته باشیم:

$$\| P(x) \| = \| x \|$$

تعریف ۳۱.۱.۱. عملگر خطی کراندار $P : X \to X$ تعریف شده روی فضای خطی نرمدار X که $P^2 = P$ است یک تصویر نامیده می شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. عملگر $P : X \to Y$ یک نشاننده نامیده می شود هرگاه برای یک $c > 0$ و تمامی $x \in X$ داشته باشیم:

$$c \| x \| \leq \| P(x) \|$$

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. فضای همه تابعک های خطی کراندار روی X را فضای دوگان X می نامیم و با X^* نمایش می دهیم. داریم:

$$X^* = \{\Lambda : X \to F, \text{پیوسته است } \Lambda\}$$

جمع و ضرب اسکالر در X^* به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\alpha\Lambda)(x) = \alpha.\Lambda(x), (\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)$$

این اعمال X^* را به یک فضای برداری تبدیل می کند.

قضیه زیر نتیجه ای از قضیه هان باناخ [5] است.

[5] Hahn-Banach theorem

قضیه ۳۴.۱.۱. اگر X یک فضای نرمدار و $x_\circ \in X \setminus \{\circ\}$ باشد. آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد به قسمی که $\| \Lambda \| = ۱$ و $\| x_\circ \| = \Lambda x_\circ$ باشد. بعلاوه برای هر $x \in X$ داریم:

$$\| x \| = \sup\{ | \Lambda x | : \Lambda \in X^*, \| \Lambda \| = ۱ \}$$

اثبات. مرجع [۱۲] قضیه ۳.۴. □

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X می نامند و متشکل از تمام اجتماع ها از اشتراک های متناهی از مجموعه های $\Lambda^{-۱}(v)$ می باشد که $\Lambda \in X^*$ و v در F باز است.

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. X^* یک فضای نرمدار با نرم

$$\| \Lambda \| = \sup\{ | \Lambda x | : \| x \| \leq ۱ \}$$

است. دوگان X^* را با X^{**} نمایش می دهیم.

نگاشت ϕ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi : X \to X^{**}$$

$$\phi(x)(\Lambda) = \Lambda x, \Lambda \in X^*$$

تعریف ۳۷.۱.۱. اگر Xیک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد آنگاه کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن برای هر $x \in X$، $\phi(x)$ پیوسته می گردد را توپولوژی ضعیف ستاره روی X می نامیم. X را فشرده ضعیف ستاره می نامیم هر گاه در توپولوژی ضعیف ستاره فشرده باشد.

قضیه ۳۸.۱.۱. (باناخ آل-اغلو). [۶] فرض کنید v یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد.

[۶]Banach - Alaoglu theorem