بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

عنوان پایان‌نامه:

از چند گوناهای جبری به هم - چند گونا های هم -جبری

استاد راهنما:

دکتر سید شاهین موسوی میرکلائی

دانشجو :

مرضیه رهبانی

اسفند ۸۷

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی خانم مرضیه رهبانی

تحت عنوان:

از چند گوناهای جبری به هم – چند گوناهای هم – جبری

در تاریخ ۸۷/۱۲/۲۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..عالی.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه آقای دکتر سیدشاهین موسوی میرکلائی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- داور خارج از گروه آقای دکتر سیدناصر حسینی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

۳- داور داخل گروه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

تقدیر و تشکر :

با نام و یاد یگانه ی هستی بخش و شکر و سپاس او ، که مرا یاری نمود تا از دریای بیکران علم و معرفت قطره ای بر گیرم .

در ابتدا از جناب اقای دکتر سید شاهین موسوی که در طول دوران تحصیل استاد راهنمای من بوده اند کمال تشکر و سپاس را دارم .

از اقای دکتر سید ناصر حسینی و اقای دکتر حمید رضا افشین که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را متقبل شده اند سپاس گذارم .

از زحمات و تلاشهای همسر مهربانم در جمع اوری و اماده سازی پایان نامه کمال تقدیر و تشکر را دارم و همچنین از خانواده خود و همسرم که هر انچه در زندگی دارم و بدست خواهم اورد نتیجه ی زحمات و عنایت این عزیزان است سپاس گذارم و از همراهی برادر عزیزم علیرضا در طول این مدت تشکر میکنم .

در خاتمه از دوستان گرامی خانمها زهره مختاری ، رقیه یوسفی ، نفیسه کمالی ، و مائده ملایی که در ارائه این پایان نامه مرا یاری نموده اند تشکر کرده و برای همه ی عزیزان موفقیت در تمام مراحل زندگی را ارزومندم .

تقدیم به :

پدر و مادر عزیز

و همسر مهربانم

بسمه تعالی

چکیده

مفهوم چندگونا یکی از مهم ترین مفاهیم در هندسه جبری می باشد و برقراری ارتباط بین چندگوناها و جبرها کمک بسیار زیادی به درک عمیق تر مفاهیمی هم چون جبرهای آزاد می نماید .

با توجه به تعریف کلاسیک ، چندگونا کلاس معادله ای از جبرهای پایان مند می باشد . تعریف دیگر از چندگونا با استفاده از مفهوم موناد بیان می شود و در این حالت چندگوناها دارای ساختارهای مونادیکی می شوند .

در این پایان نامه مفهوم چندگونا از F – جبرها نسبت به تابعگون F روی رسته‌ی هم – کامل $\mathcal{C}$ ، که به صورت کلاس های معادله ای از جبرهای آزاد می باشند ، مورد بررسی قرار می گیرد . در انتها، منطبق بودن مفهوم چندگونا از F – جبرها با رسته های مونادیک در $\mathcal{C}$ نشان داده می شود .

با استفاده از این پژوهش تحت فرضیات مناسب ، برای هر تابعگون روی Set " قضیه چندگونای بیرخوف " بیان می گردد .

واژه‌های کلیدی : رسته ، چندگونا ، تابعگون ، هم – کامل ، جبر پایان مند

پیش‌گفتار

چندگونا چیست ؟ جواب کلاسیک به این سوال این است که چندگونا کلاس معادله ای از جبرهای پایان مند (مانند گروه ها ، شبکه ها) می باشد . جواب دیگر این است که چندگونا کلاس معادله ای از جبرها با عملگرهای ناپایان مند (مانند نیمه شبکه های کامل یا فضای هاسدورف فشرده) می باشد . در حالت کلاسیک ، چندگوناها با جبرها از موناد پایان مند روی Set و در تعریف دوم با جبرها از یک موناد دلخواه روی Set متناظر می باشند.

می خواهیم تعریفی از چندگونا بیاوریم که در آن Set رسته‌ی پایه نباشد . معادله ها را برای F — جبرها ، که F تابعگون درونی روی هر رسته‌ی هم — کامل $\mathcal{C}$ است ، در نظر بگیرید ، این کلاس های معادله ای که جبرهای آزاد را دارند ، چندگونا نامیده می شوند . ثابت می شود که این چندگوناها متناظر با رسته های مونادیک روی $\mathcal{C}$ هستند . فرمول بندی ما بر اساس ساختار F — آزاد به عنوان هم — حدی از " اشیاء — جمله " ارائه شده توسط ج. آدامک [1] در [2] آورده شده است ، می باشد . تابعگون های F که در مورد آن F — جبرهای آزاد وجود دارند در [5] توسط ج. آدامک و و. ترانخوا [2] چندگونا نامیده می شوند . برای همه چندگوناسازها روی رسته‌ی Set (و همه‌ی چندگوناسازها روی رسته هایی که برویختی های منظم را حفظ می کنند) " قضیه‌ی چندگونای بیرخوف[3]" با این متن تعمیم داده می شود : چندگوناها زیررسته های تام از AlgF هستند که تحت ضرب ها ، زیرجبرها و خارج قسمت ها بسته هستند.

---

[1] J.Adamek

[2] V.Trnkova

[3] Birkhoff variety theorem

هم − چندگونا چیست ؟ برای تعریف این مفهوم توجه می کنیم که برای هر تابعگون درونی روی رسته‌ی $\mathcal{C}$ ، رسته‌ی Coalg(F) از تمام F − جبرها ، دوگان رسته‌ی F^{op} − جبرها می باشد که F^{op} تابعگون درونی است که روی $\mathcal{C}^{op}$ شبیه F عمل می کند در نتیجه ، با دوگان سازی ساده مفهوم هم − معادله و کلاس هم − معادله ای از هم − جبرها مفهوم هم − چندگونا به دست می آید . این کلاس های معادله ای که هم − جبرهای هم − آزاد دارند ، هم − چندگوناساز نامیده می شوند . اگر F یک هم − معادل ساز باشد ، یعنی اگر همه‌ی هم − جبرهای هم − آزاد وجود داشته باشند و $\mathcal{C} = Set$ و F تکریختی های منظم را حفظ کند ، پس هم − چندگوناها زیررسته های تام از Coalg(F) هستند که تحت هم − ضرب ها ، خارج قسمت ها و زیر هم − جبرها بسته هستند .

هم − چندگوناها برای تابعگون های درونی کران دار روی Set توسط محققین مختلف مورد توجه قرار گرفته است .

کدام تابعگون ها چندگوناساز(هم − چندگوناساز) هستند ؟ چندگوناسازها در Set توسط ج. آدامک در [5] با وجود نقاط ثابت بزرگ دلخواه مشخص شده اند . یک مشخصه سازی کامل از هم − چندگوناها روی Set ارائه شده است ، اما چند شرط برای آن در نظر گرفته شده است : م. بار[۴] در [7] نشان داد که هر تابعگون دست یافتنی هم − چندگونا است و و. کاواهارا[۵] و م. موری [۶] در [9] ثابت کردند که هر تابعگون کران دار یک هم − جبر نهایی (از آنجایی که نتیجه می شود هر تابعگون کران دار هم − معادل ساز است) دارد . قسمت مذکور

---

[۴] M.Barr

[۵] Y.Kawahara

[۶] M.Mori

معادل با کران داری است و هر دو معادل با این که F کوچک باشد ، یعنی هم – حد کوچکی از hom – تابعگون ها باشد .

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه ای بر نظریه‌ی رسته ها

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان نامه مورد استفاده قرارمی گیرند را ذکر می کنیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱

رسته‌ی $\mathcal{C}$ چهارتایی $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ به شرح زیر می باشد:

الف — کلاس $\mathcal{O}$ ، که اعضاء آن با حروف بزرگ C,B,A,... نشان داده شده و $\mathcal{C}$ — شی یا به اختصار شی نامیده می شوند؛

ب — به هر زوج شی B, A در $\mathcal{C}$ ، کلاس $hom(A,B)$ نسبت داده می شود ، که اعضاء آن $\mathcal{C}$ — ریختی و یا به اختصار ریختی از A به B نامیده و به صورت $f : A \longrightarrow B$

(یا $A \xrightarrow{f} B$) نشان داده می شوند ، هم چنین برای هر دو شی A و B در $\mathcal{C}$ ، کلاس های $hom(A,B)$ دو به دو مجزایند . مجموعه‌ی تمام ریختی ها در$\mathcal{C}$ را با $Mor(\mathcal{C})$ نمایش می دهیم ؛

پ — به هر شی A ، ریختی $id_A : A \longrightarrow A$ ، که ریختی همانی روی A نامیده می شود ، نسبت داده می شود؛

ت — برای ریختی های $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ ، ریختی $g \circ f : A \longrightarrow C$ که ترکیب f با g نامیده می شود ، نسبت داده می شود و در شرایط زیر صدق می کند:

(I) — خاصیت شرکت پذیری ، یعنی برای ریختی های $f : A \longrightarrow B$ ، $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$ تساوی

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

برقرار است .

(II) — برای هر ریختی $f : A \longrightarrow B$ در $\mathcal{C}$ داریم :

$$f \circ id_A = f \quad , \quad id_B \circ f = f \quad .$$

مثال ۲.۱.۱

رسته‌ی Set که در آن کلاس اشیاء تمام مجموعه ها و $hom(A,B)$ شامل تمام توابع از A به B می باشد و id_A تابع همانی و عملگر ترکیب ، عمل ترکیب توابع می باشد .

مثال ۳.۱.۱

مجموعه‌ی تمام گروه ها و هم ریختی های گروهی میان آن ها به ترتیب اشیاء و ریختی های رسته‌ی Grp را تشکیل می دهند .

مثال ۴.۱.۱

مجموعه‌ی تمام فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته میان آن ها اشیاء و ریختی های رسته‌ی Top را تشکیل می دهند .

مثال ۵.۱.۱

فرض کنید $\Omega = (\Omega_n)_{n\in\mathcal{N}}$ خانواده‌ی شمارا از مجموعه های Ω_n باشد(Ω_n را مجموعه‌ی همه‌ی عملگرنماهای n − تایی می نامند) .

رسته‌ی $Alg(\Omega)$ شامل Ω − جبرها و Ω − ریختی ها به صورت زیر است .

یک Ω − جبر مجموعه‌ی X به همراه عملگر n − تایی $\omega_X : X^n \longrightarrow X$ برای هر $n \in \mathcal{N}$ و $\omega \in \Omega_n$ می باشد ، که با نماد $(X, (\omega_X)_{\omega\in\Omega_n, n\in\mathcal{N}})$ یا به طور اختصار $(X, (\omega_X))$ نشان داده می شود و ریختی $f : (X, \omega_X) \longrightarrow (Y, \omega_Y)$ از Ω − جبرها به صورت تابع $f : X \longrightarrow Y$ تعریف می شود ، به قسمی که دیاگرام زیر جا به جا شود :

$$
\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\omega_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y^n \arrow[d, "\omega_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

یعنی ، $f \circ \omega_X = \omega_Y \circ f^n$.

مثال ۶.۱.۱

فرض کنید X یک مجموعه و $\leq$ رابطه‌ی پیش ترتیب روی X باشد ، یعنی $\leq$ خاصیت انعکاسی و تعدی داشته باشد .

رسته‌ی $\mathcal{C}(X, \leq)$ ، رسته ای است که اشیاء آن اعضای X و برای هر دو شی x و y ، $f : x \longrightarrow y$ یک ریختی است هرگاه $x \leq y$. برای هر شی x ، ریختی همانی بر اساس خاصیت انعکاسی و عمل ترکیب ریختی ها بر اساس خاصیت تعدی تعریف می شوند .

تعریف ۷.۱.۱

فرض کنید $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ یک رسته باشد . رسته‌ی دوگان یا متقابل $\mathcal{C}$ ، که با نماد $\mathcal{C}^{op} = (\mathcal{O}, hom^{op}, id, \circ^{op})$ نمایش داده می شود ، رسته ای است که اشیاء آن همان اشیاء $\mathcal{C}$ است و $hom^{op}(A, B) = hom(B, A)$ و $f \circ^{op} g = g \circ f$ می باشد .

تعریف ۸.۱.۱

رسته ی $\mathcal{C}$ نازک نامیده می شود هرگاه $hom(A, B)$ حداکثر یک عضو داشته باشد .

تعریف ۹.۱.۱

رسته‌ی $\mathcal{A}$ زیر رسته از رسته‌ی $\mathcal{B}$ می باشد هرگاه در شرایط زیر صدق کند :

الف — $\mathcal{O}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{B})$ ؛

ب — برای هر $A, A' \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ ، $hom_{\mathcal{A}}(A, A') \subseteq hom_{\mathcal{B}}(A, A')$ ؛

پ — برای هر $\mathcal{A}$ — شی A ، $\mathcal{B}$— همانی روی A ، $\mathcal{A}$ — همانی روی A باشد ؛

ت — ترکیب ریختی ها در $\mathcal{A}$ به صورت ترکیب ریختی ها در $\mathcal{B}$ باشد .

تعریف ۱۰.۱.۱

زیر رسته‌ی $\mathcal{A}$ از $\mathcal{B}$ تام نامیده می شود هرگاه برای هر $A, A' \in \mathcal{A}$ ، $hom_{\mathcal{A}}(A, A') = hom_{\mathcal{B}}(A, A')$.

تعریف ۱۱.۱.۱

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک زیررسته‌ی $\mathcal{B}$ و B یک $\mathcal{B}$ — شی باشد .

۱) یک $\mathcal{A}$ — انعکاس برای B ، ریختی $r : B \longrightarrow A$ می باشد که در آن A یک $\mathcal{A}$ — شی است و r در خاصیت جهانی زیر صدق کند :

برای هر ریختی $f : B \longrightarrow A'$ که A' یک $\mathcal{A}$ – شی است ، $\mathcal{A}$ – ریختی یکتای $f' : A \longrightarrow A'$ وجود داشته باشد به قسمی که دیاگرام زیر جا به جا شود .

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "/\!/"] & & A \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
& A' &
\end{tikzcd}
$$

۲) رسته‌ی $\mathcal{A}$ زیررسته‌ی انعکاسی $\mathcal{B}$ نامیده می شود هرگاه هر $\mathcal{B}$ – شی ، یک $\mathcal{A}$ – انعکاس داشته باشد .

تعریف ۱۲.۱.۱

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته باشد . ریختی $f : A \longrightarrow B$ را :

الف – یکریختی نامند هرگاه ریختی $g : B \longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به طوری که $g \circ f = id_A$ و $f \circ g = id_B$. در این حالت g را وارون f نامند ومجموعه‌ی یکریختی ها در $\mathcal{C}$ را با $Iso(\mathcal{C})$ نمایش می دهیم .

ب – تکریختی نامند هرگاه برای هر زوج ریختی $h,k : C \longrightarrow A$ ، تساوی $f \circ h = f \circ k$ ، تساوی $h = k$ را نتیجه دهد .

پ – بروریختی نامند هرگاه برای هر زوج ریختی $h,k : B \longrightarrow C$ ، تساوی $h \circ f = k \circ f$ ، تساوی $h = k$ را نتیجه دهد .

تعریف ۱۳.۱.۱

ریختی $f : A \longrightarrow B$ درون بر نامیده می شود هرگاه ریختی $g : B \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به قسمی که $f \circ g = id_B$ وبرش نامیده می شود هرگاه ریختی $h : B \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به قسمی که $h \circ f = id_A$.

تعریف ۱۴.۱.۱

شی C ، در رسته‌ی $\mathcal{C}$ را شی اولیه گویند هرگاه از C به هر شی در $\mathcal{C}$ ، تنها یک ریختی وجود داشته باشد و شی نهایی نامند ، هرگاه از هر شی C در $\mathcal{C}$ ، به آن تنها یک ریختی وجود داشته باشد .

مثال ۱۵.۱.۱

در Grp ، رسته‌ی تمام گرو ه ها ، گروه تک عضوی شی اولیه است و در Set ، رسته‌ی تمام مجموعه ها ، مجموعه‌ی تهی شی اولیه و هم چنین شی نهایی می باشد .

تعریف ۱۶.۱.۱

فرض کنید $\mathcal{C}$ و$\mathcal{D}$ رسته باشند . تابعگون $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ، تابعی است که به هر $\mathcal{C}$ – شی C ، $\mathcal{D}$ – شی $F(C)$ و به هر $\mathcal{C}$ – ریختی $f : C \longrightarrow C'$ ، $\mathcal{D}$ – ریختی

$F(f):F(C)\longrightarrow F(C')$ را نسبت می دهد به قسمی که:

الف – F ترکیب را حفظ کند ، یعنی $F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$. (در صورتی که $f\circ g$ تعریف شده باشد .)

ب – F ، ریختی همانی را حفظ کند ، یعنی برای هر $\mathcal{C}$ – شی C ، $F(id_C)=id_{F(C)}$.

تعریف ۱۷.۱.۱

فرض کنید تابعگون $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ داده شده باشد. تابعگون دوگان F ، که با نماد $F^{op}:\mathcal{C}^{op}\longrightarrow\mathcal{D}^{op}$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد :

$$F^{op}(C\overset{f^{op}}{\longrightarrow}C')=FC\overset{(Ff)^{op}}{\longrightarrow}FC'$$

که در آن $f:C'\longrightarrow C$ یک ریختی در $\mathcal{C}$ است .

تعریف ۱۸.۱.۱

تابعگون $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ وفادار نامیده می شود هرگاه به ازاء اشیاء C',C در $\mathcal{C}$ ، نگاشت

$$\phi:hom_{\mathcal{C}}(C,C')\longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(FC,FC')$$

یک به یک باشد و در صورتی که نگاشت فوق پوشا باشد ، F تمام نامیده می شود .

تعریف ۱۹.۱.۱

رسته‌ی ملموس روی $\mathcal{C}$ ، زوج $(\mathcal{A},U)$ می باشد ، به قسمی که $\mathcal{A}$ یک رسته و $U:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ تابعگون وفادار است . در این جا U تابعگون فراموش کار (یا اساسی) و $\mathcal{C}$ رسته‌ی پایه برای $(\mathcal{A},U)$ نامیده می شود .

تعریف ۲۰.۱.۱

فرض کنید $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ تابعگون باشند . تبدیل طبیعی ازF به G ، که با نماد $\tau : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ نشان داده می شود ، نگاشتی است که به هر $\mathcal{C}$ – شی C ، $\mathcal{D}$ – ریختی $\tau_C : FC \longrightarrow GC$ نسبت می دهد ، به قسمی که برای هر ریختی $f : C \longrightarrow C'$ در $\mathcal{C}$ دیاگرام زیر جا به جا شود .

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & GC' \end{tikzcd}$$

یعنی ، $Gf \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ Ff$.

تعریف ۲۱.۱.۱

فرض کنید تابعگون های $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ و تبدیل طبیعی $\tau : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ داده شده باشد . τ یکریختی طبیعی نامیده می شود هرگاه برای هر $\mathcal{C}$ – شی C ، τ_C وارون پذیر باشد .

در این حالت F را یکریخت طبیعی با G نامیده و با نماد $F \cong G$ نشان داده می شود .