بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی

موضوع :

ساختار جبرهای باناخ میانگین‌پذیر

استاد راهنما:

دکتر سیدعلیرضا حسینیون

اساتید مشاور :

دکتر محمدمهدی ابراهیمی

دکتر عبدالحمید ریاضی

نگارش :

داود ابراهیمی‌بقا

بهمن ۷۶

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس بیکران شایسته خداوند بزرگ است که توفیق آموختن عطافرمود و من را مورد عنایت خود قرار داد.

استاد گرانقدر جناب آقای دکتر حسینیون، زحمات و راهنمائیهای فراوان شما را در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه ارج می‌نهم. ازاینکه باعنایت فراوان خود بنده را صمیمانه یاری نمودید و وقت خود را صرف مطالعه دقیق نوشته‌ها نمودید تشکر فراوان دارم. توفیقات شما را ازدرگاه باریتعالی خواستارم.

استاد ارجمند جناب آقای دکتر ابراهیمی، از اینکه این پایان‌نامه را مطالعه فرمودید و بنده را از پیشنهادات سازنده خویش بهره‌مند ساختید متشکر و سپاسگذارم.

استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی، از نکته سنجیها و راهنمائیهای ارزشمند شما کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از همکاری صمیمانه جناب آقای دکتر نوربلوچی، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

بسمه تعالی

دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

جلسه هیئت داوران ارزیابی پایان نامه آقای/~~خانم~~ داود ابراهیمی بقا

به شناسنامه شماره ۶۵۹۶ صادره از تهران متولد ۱۳۴۹

دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته ریاضی

باعنوان ساختار جبرهای باناخ میانگیر پذیر

به راهنمائی دکترسیدعلیرضاحسینیون طبق دعوت قبلی در تاریخ ۷۶/۱۱/۱۳ تشکیل گردید و براساس رای هیات داوری و باعنایت به ماده ۴ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۶۸/۸/۲۸ پایان نامه مزبور بانمره ۱۸/۵ و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

۱ـ آقای دکتر سید علیرضا حسینیون استاد راهنما

۲ـ " " محمد مهدی ابراهیمی استاد مشاور

۳ـ " " عبدالحمید ریاضی داور مدعو

۴ـ " " سید علیرضا حسینیون مدیر گروه

۵ـ

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمـــه

اصطلاح میانگین پذیری اولین بار در سال ۱۹۰۴ تـوسط ***لبگ*** و در ارتـباط بـا قـضیهٔ همگرایی یکنوا مطرح شد. بحث در وجود اندازهٔ ناوردای انتقال μ روی $\mathbf{R}$، که مثبت و شمارش پذیر جمعی باشد و $\mu([0,1])=1$ منجر به بررسی میانگین پذیری گروهها شد. ***فون نویمان*** در سال ۱۹۲۹ رده‌ای از گروههای میانگین پذیر را معرفی کرد. به دلیل اثبات روابطی بین گروههای میانگین پذیر و جبرهای باناخ، میانگین پذیری این جبرها نیز مطرح شد. میانگین پذیری یک جبر باناخ به چند روش قابل بررسی است.

در جبر همولوژی میانگین پذیری جبر U معادل این است کـه بـرای هـر U- مـدول X، $H^1(U,X')=0$. روش دیگر، بررسی وجود قطر تقریبی و واقعی برای جبر U است . در واقع نقشی را که قطر واقعی در میانگین پذیری جبرها بازی می‌کند همان نقشی است که میانگین پایا برای میانگین پذیری گروهها دارد. اکثر کارهای اساسی انجام شده در این مورد توسط جانسون و هلمسکی در دهۀ ۱۹۷۰ بوده است.

در این رساله میانگین پذیری یک جبر باناخ را بوسیلهٔ دنباله‌های دقیق کـوتاه از مـدولها بررسی می‌کنیم فصل اول شامل تعاریف و قضایایی است که در فصول بعد از آنها استفاده خواهیم کرد. این تعاریف و قضایا از مـراجـع [۲] و [۳] و [۵] و [۱۰] و [۱۱] اسـتخراج شده‌اند. در فصل دوم و سوم ارتباط میانگین پذیری و شکافندگی نوعی از دنباله‌های دقیق کوتاه را با توجه به مراجع [۳] و [۹] و [۱۲] بررسی می‌کنیم. در فصل چهارم نقش همانی تقریب کراندار در یک جبر باناخ را با توجه به مراجع [۱] و [۳] و [۱۲] بـیان مـی‌کنیم و

بالاخره در فصل پنجم و ششم جبرهای باناخ جابجایی را با اولین گروه کوهمولوژی بدیهی و با توجه به مراجع [۱] و [۳] مورد بحث قرار می‌دهیم.

به طور کلی مطالب این پایان‌نامه از مقالهٔ

"THE STRUCTURE OF AMENABLE BANACH ALGEBRAS"

P.C. Curtis , Jr. & R.J. Loy, J. London Math. soc. (2)40 1989 (89 - 104)

و بعضی از مطالب مراجع [۲] و [۳] و [۴] و [۵] که مورد نیاز برای تکمیل موضوع بوده است، تشکیل شده است. در انتها، واژه‌نامه انگلیسی - فارسی و فهرست منابع مورد استفاده در این پایان‌نامه درج شده است.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصلهای بعد را بیان و سپس به بررسی ارتباط میانگین پذیری و قطر واقعی می‌پردازیم. این مطالب را با توجه مراجع [۲] و [۳] و [۵] و [۱۰] و [۱۱] مطرح کرده‌ایم.

جبرهای با ناخ

۱-۱ تعریف: فضای خطی U روی میدان F، (R یا C) همراه با نگاشت $(x,y) \to xy$ از $U \times U$ بتوی U را یک **جبر** روی F گوئیم هرگاه

۱) $(xy)z = x(yz)$ $\qquad (x,y,z \in U\ ,\ \alpha \in F)$

۲) $x(y+z) = xy + xz \quad , (x+y)z = xz + yz$

۳) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

اگر $F=R$، U را یک جبر حقیقی و اگر $F=C$ آن را یک جبر مختلط می‌نامیم.

نگاشت $(x,y) \to xy$ را ضرب در U و بردار xy را ضرب y,x می‌نامیم.

اگر ضرب فوق، علاوه براین سه شرط، در شرط زیر نیز صدق کند، U یک **جبر تعویضپذیر** نامیده می‌شود.

۴) $xy = yx$

عنصر e در جبر U را عنصر همانی گوئیم هرگاه $e \neq 0$ و

$$ex = xe = x \qquad (x \in U)$$

جبر U را **یکدار** گوئیم هرگاه دارای عنصر همانی باشد.

عنصر همانی در صورت وجود منحصر به فرد است و آنرا با 1 نمایش میدهیم.

یک نرم - جبر روی جبر U، نرم p روی U است به طوری که:

$$p(xy) \leq p(x)\, p(y) \qquad (x , y \in U)$$

یک ***جبر نرم‌دار***، زوج (U,p) است که در آن U یک جبر و p یک نرم - جبر روی U است.

جبر نرم‌دار (U , p) را ***جبر باناخ*** گوئیم هرگاه U با نرم p یک فضای باناخ باشد. جبر نرم‌دار (U,p) را ***یکانی*** گوئیم هرگاه U یکدار بوده و $p(1)=1$ باشد.

اگر U با ضرب $(x,y) \to xy$ یک جبر نرم‌دار باشد، در این صورت U با نگاشت $(x,y) \to yx$ و نرم داده شده نیز یک جبر نرم‌دار است که آنرا با U^{op} نمایش می‌دهیم. بنابه گزارهٔ (۱-۴) [۲] ضرب در جبر نرم‌دار U نگاشتی پیوسته از $U \times U$ بتوی U است.

مدولهای باناخ

۱-۲ تعریف: اگر U یک جبر روی F و M یک فضای خطی روی F باشد، M را یک -U ***مدول چپ*** گوئیم اگر نگاشتی مانند $(u , m) \to um$ از $U \times M$ بتوی M موجود باشد و در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $u \in U$ و ثابت، نگاشت $m \to um$ روی M، خطی باشد.

۲) برای هر $m \in M$ و ثابت، نگاشت $u \to um$ روی U، خطی باشد.

۳) برای هر $m \in M$, $u_1, u_2 \in U$ داشته باشیم: $(u_1u_2)m=u_1(u_2m)$.

نگاشت $(u, m) \to um$ را ضرب مدولی چپ می‌نامیم.

M را یک U - ***مدول راست*** گوئیم اگر نگاشتی مانند $(m,u) \to mu$ از $M\times U$ بتوی M موجود باشد و در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر $m \in M$ و ثابت، نگاشت $u \to um$ روی U، خطی باشد.

۲) برای هر $u \in U$ و ثابت، نگاشت $m \to um$ روی M، خطی باشد.

۳) برای هر $m \in M$, $u_1, u_2 \in U$ داشته باشیم: $m(u_1u_2) = (mu_1)u_2$

نگاشت $(m, u) \to m$ را ضرب مدولی راست می‌نامیم.

اگر M یک U - مدول راست (چپ) باشد در این صورت M یک U^{op} - مدول چپ (راست) است.

M را یک U - مدول دو طرفه یا U - مدول گوئیم هرگاه U - مدول چپ و U - مدول راست باشد و در عین حال رابطهٔ زیر بین ضربهای مدولی برقرار باشد:

$$u_1(mu_2) = (u_1m)\, u_2 \qquad (u_1u_2 \in U ,\ m \in M)$$

U - مدول M را ***یکدار وابسته*** گوئیم هرگاه U دارای عنصر همانی e بوده و داشته باشیم:

$$em = me = m \qquad (m \in M)$$

اگر U یک جبر نرم‌دار روی F , M یک فضای خطی نرم‌دار روی F باشد، M را یک U -

مدول چپ نرم‌دار گوئیم اگر M یک U - مدول چپ بوده و عدد ثابت و مثبتی مانند K موجود باشد به طوری که:

$$\| um \| \le K \|u\| \; \|m\| \qquad (u \in U , m \in M)$$

به طور مشابه U - مدول راست نرم‌دار تعریف می‌شود.

M را یک U - مدول نرم‌دار گوئیم اگر U - مدول بوده و عدد ثابت و مثبتی مانند K موجود باشد به طوری که:

$$\|um\| \le K \|u\| \; \|m\|$$

$$\|mu\| \le K \|u\| \; \|m\|$$

اگر M یک U - مدول چپ (راست) نرم‌دار بوده و فضای باناخ باشد، آن را U - ***مدول چپ (راست) باناخ*** گوئیم.

اگر M یک U - مدول نرم‌دار و فضای باناخ باشد، آن را U - ***مدول باناخ*** گوئیم.

اگر N یک زیر فضای خطی از M بوده و برای هر $n \in N$ و هر $u \in U$ داشته باشیم $un \in N$ ، $(nu \in N)$ در این صورت گوئیم: N یک U زیر مدول چپ (راست) M است.

۱ - ۳ *مثال:* اگر U یک جبر نرم‌دار و X یک U - مدول چپ نرم‌دار با فضای دوگان X' باشد در این صورت X' با ضرب مدولی زیر یک U - مدول راست باناخ است.

$$(f , u) \to fu$$

$$(fu)(x) = f(ux) \qquad (u \in U , f \in X' , x \in X)$$

همچنین اگر X یک U - مدول راست نرم‌دار باشد، در این صورت X' با ضرب مدولی زیر یک U - مدول چپ باناخ است.

$$(u\,,\,f) \rightarrow uf$$

$$(uf)\,(x) = f(xu) \qquad (u \in U\,,\, f \in X',\, x \in X)$$

بنابراین برای هر U - مدول نرم‌دار X، U - مدول باناخ X' را داریم.

اگر U را با ضرب موجود در U در نظر بگیریم، U - مدول است. بنابراینَ U نیز با ضربهای مدولی نظیر ضربهای بالا، U - مدول باناخ می‌شود.

فضای خارج قسمت، مدول خارج قسمت.

۱ - ۴ تعریف: اگر J یک زیر فضای خطی از فضای خطی X باشد، رابطهٔ $\sim$ را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x\text{-}y \in J \qquad (x\,,\, y \in X)$$

در این صورت $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی روی X است.

ردهٔ هم ارزی x را با $\mathring{x}$ و مجموعهٔ تمام رده‌های هم ارزی را با $\frac{X}{J}$ نمایش می‌دهیم. $\frac{X}{J}$ همراه با جمع و ضرب اسکالر زیر یک فضای خطی است.

$$\mathring{x} + \mathring{y} = (x+y)^{\circ},\ \ \alpha\mathring{x} = (\alpha x)^{\circ} \qquad (\mathring{x}, \mathring{y} \in \frac{X}{J}\,,\, \alpha \in F)$$

این فضای خطی را، فضای خارج قسمت X به پیمانهٔ J می‌نامیم.

اگر X یک فضای خطی نرم‌دار و J یک زیر فضای خطی X باشد، تابع $\|\cdot\|_q$ را روی $\frac{X}{J}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\mathring{x}\|_q = \inf\{\,\|x+g\| \,:\, g \in J\} \qquad (\mathring{x} \in \frac{X}{J})$$

واضح است که $\|\cdot\|_q$ تابعی نامنفی روی $\frac{X}{J}$ است و

$$\|\mathring{x} + \mathring{y}\|_q \leq \|\mathring{x}\|_q + \|\mathring{y}\|_q$$

$$(\mathring{x}, \mathring{y} \in \frac{X}{J}, \alpha \in F)$$

$$\|\alpha\mathring{x}\|_q = \|\alpha\| \|\mathring{x}\|_q$$

۱-۵ قضیه: اگر X یک فضای باناخ و J یک زیر فضای خطی بسته از X باشد آنگاه $(\frac{X}{J}, \|\cdot\|_q)$ یک فضای باناخ است.

برای اثبات این قضیه به [۲] قضیهٔ (۱-۷) مراجعه شود.

۱-۶ مثال: فرض کنیم که U یک جبر نرم‌دار و J یک ایده‌آل چپ بسته از U باشد در این ورت فضای خطی نرم‌دار $(\frac{U}{J}, \|\cdot\|_q)$ با ضرب مدولی زیر، U - مدول چپ نرم‌دار است.

$$U \times \frac{U}{J} \to \frac{U}{J}$$

$$(u_1, J + u_2) \to J + u_1u_2 \qquad (u_1, u_2 \in U)$$

به طور مشابه اگر J یک ایده‌آل راست بسته از U باشد، $\frac{U}{J}$، U - مدول راست نرم‌دار است.

همانی تقریبی

۱-۷ تعریف: یک ***همانی تقریبی چپ*** برای جبر نرم‌دار U توری مانند $\{e_\alpha\}$ در U است به طوری که

$$e_\alpha x \to x \qquad (x \in U)$$