دانشگاه الزهرا
گروه ریاضی دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

عنوان

بررسی طیف حجم (v, k, t) تریدهای ساده و اشتاینری و (v, k, t) تریدهای اشتاینری همگن

استاد راهنما

سرکار خانم دکتر نسرین سلطانخواه

دانشجو

الهام رافضی

اسفند ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهرا(س) است.

تشکر و قدردانی

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم . از استاد فاضل و اندیشمند سرکار خانم دکتر سلطانخواه به عنوان استاد راهنما که همواره مرا مورد لطف و محبت خود قرار داده اند، کمال تشکر را دارم .

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:

- محضر پدر و مادر عزیزم به خاطر همه ی تلاش های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند.

- به همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است.

- به استادان فرزانه و فرهیخته ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.

- به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.

- به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بود.

- الهی به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته ی آنان جامه ی عمل بپوشانم .

- پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

- خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

چکیده

فرض کنید T یک مربع لاتین جزئی و L یک مربع لاتین باشد به‌طوری که $T \subseteq L$. T یک ترید لاتین نامیده می‌شود اگر یک مربع لاتین جزئی T^* وجود داشته باشد به قسمی که $T^* \cap T = \varnothing$ و $(L \setminus T) \cup T^*$ یک مربع لاتین باشد. زوج (T, T^*) یک ترید دوگانه لاتین نامیده می‌شود. همچنین می‌توان گفت که ترید لاتین زیرمجموعه‌ای از مربع لاتین جزئی است که می‌تواند با جفت متمایزش جایگزین شود و یک مربع لاتین جدید حاصل شود. ترید لاتین را d−همگن می‌نامیم، هرگاه پس از حذف سطرها و ستون‌های خالی، هر سطر و هر ستون دقیقاً d عضو بوده و هر عضو نیز d بار در مربع لاتین به‌کار رفته باشد.

$(v, 3, 2)$ ترید اشتاینری یک دوتایی (T°, T^*) از سیستم‌های سه‌تایی جزئی مجزا است (در مجموعه نقاط v)، به‌طوری که هر جفت از عضوها در T° ظاهر می‌شود اگر و تنها اگر آن در T^* ظاهر شود. $(v, 3, 2)$ ترید اشتاینری d−همگن می‌گوییم اگر هر عضو دقیقاً در d بلوک از T° (یا T^*) ظاهر شود.

در این رساله، ساختاری برای تریدهای لاتین d−همگن مینیمال از اندازه dm برای هر عدد صحیح $d \geq 3$ ، $m \geq 1.75d^2 + 3$ را شرح می‌دهیم. همچنین این کران را برای مقدارهای کوچک d بهبود می‌دهیم و نشان می‌دهیم چگونه تعدادی ترید دوگانه لاتین را می‌توان به‌طور مستقیم از گروه‌ها به‌دست آورد. همچنین خصوصیات ترید دوگانه لاتین از قبیل همگنی، مینیمال بودن و تعامد در ساختار گروه کدگذاری می‌شود. ساختار تعدادی از گروه‌های معروف را به‌کار می‌بریم تا تریدهای دوگانه لاتین ناشناخته قبلی را بسازیم.

در آخر، $(v, 3, 2)$ تریدهای اشتاینری d−همگن مینیمال از بنیان v و حجم $\frac{dv}{3}$ برای v های به اندازه کافی بزرگ را می‌سازیم.

کلمات کلیدی:مربع لاتین، ترید دوگانه لاتین، ترید دوگانه لاتین d−همگن،$(v, 3, 2)$ تریدهای اشتاینری، گروه جایگشتی

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنید v، k، t سه عدد طبیعی باشند به‌طوری که $v > k > t$ و X یک v-مجموعه باشد. اگر T_1 و T_2 دو گردایه مجزا از بلوک‌های k-تایی باشند به‌گونه‌ای که هر t-تایی به تعداد یکسان در هر دو دسته ظاهر شود، آنگاه $T = \{T_1, T_2\}$ را یک (v, k, t) ترید گوییم. یک (v, k, t) ترید را اشتاینری گوییم، هرگاه هر t-تایی حداکثر یک مرتبه در $T_1(T_2)$ ظاهر شود. ترید اشتاینری را d-همگن می‌نامیم اگر هر عضو دقیقاً در d بلوک T_1 (یا T_2) ظاهر شود. در سال ۱۹۸۶ میلیسی [1] و کواترسی [2] در مقاله‌ی خود تریدهای اشتاینری را با نام $DMB(disjoint\ mutually\ balanced)$ مطرح می‌کنند. μ ($\mu \geq 2$) گردایه‌ای از بلوک‌ها را در نظر بگیرید، به‌گونه‌ای که هر دوی آن تشکیل یک (v, k, t) ترید دهند، به این خانواده از گردایه‌ها یک $(v, k, t) - \mu$ ترید و یا به اختصار ترید μ-گانه گوییم.

عبارت مربع لاتین برای اولین بار با عنوان $quarre\ carre$ در یکی از مقالات اویلر[3] در ۱۷۸۲ استفاده شد و در انگلیسی اولین بار در مقاله‌ای از کیلی[4] در ۱۸۹۰ ظاهر شد.

در طول یک دوره کوتاه زمانی، نظریه تریدهای دوگانه لاتین با در نظر گرفتن گروه‌های جایگشتی، هندسه و توپولوژی توسعه وسیعی یافته است. که منظور از ترید دوگانه لاتین همان تفاوت بین دو مربع لاتین هم‌مرتبه است. گردایه‌ای از μ مربع لاتین جزئی که دقیقاً شامل سلول‌های پر یکسان باشند، به‌گونه‌ای که اگر سلول (i, j) پر شده باشد هر یک از μ مربع لاتین جزئی در همان سلول ورودی‌های متفاوت وجود دارد به‌طوری که سطر i در هر μ-مربع لاتین جزئی شامل همان نمادها می‌باشد و ستون j نیز به همین صورت است، که به این گردایه‌ها ترید لاتین μ-گانه گوییم. ترید لاتین d-همگن μ-گانه می‌گوییم، اگر هر ردیف و هر ستون T_r ($1 \leq r \leq \mu$) دقیقاً شامل d عضو و هر عضو دقیقاً d دفعه ظاهر شود و با (μ, k, m) نشان داده می‌شود که m اندازه مربع‌های لاتین جزئی است.

---

[1] Milici

[2] Quattrocchi

[3] Euler

[4] Cayley

مطالب مطرح شده به‌صورت زیر در فصول این رساله تدوین شده است:

ابتدا در فصل ۱، به ارائه تعاریف ونتایج مقدماتی کلی مورد نیاز می‌پردازیم.

در فصل ۲، روش ساخت تریدهای لاتین d–همگن مینیمال از اندازه dm برای هر عدد صحیح $d \geq 3$، $m \geq 1.75d^{2} + 3$ را شرح می‌دهیم. همچنین این کران را برای مقدارهای کوچک d بهبود می‌دهیم. برهان‌ها در این قسمت با ساختن دنباله‌های دوری که جمع‌های مجاور آن‌ها مجزاست، انجام می‌شود.

سپس در فصل ۳، به ساخت $(v, 3, 2)$ تریدهای اشتاینری d–همگن مینیمال از بنیان v و حجم $\frac{dv}{3}$ برای v های به اندازه کافی بزرگ می‌پردازیم. (به‌طور خاص، $v > 3(1.75d^{2} + 3)$ اگر v بر ۳ بخش‌پذیر باشد و در غیر این صورت $v > d(4^{\frac{d}{3}} + 1)$).

در فصل پایانی، نشان داده می‌شود چگونه تعدادی ترید دوگانه لاتین را می‌توان به‌طور مستقیم از گروه‌ها به‌دست آورد. همچنین خصوصیات ترید دوگانه لاتین از قبیل همگنی، مینیمال بودن (از طریق نازکی) و تعامد که می‌تواند در ساختار گروه استفاده شود، بیان شده است. ساختار تعدادی از گروه‌های معروف به‌کار برده می‌شود تا تریدهای دوگانه لاتین ناشناخته قبلی را بتوان ساخت. به‌طور خاص، تریدهای دوگانه لاتین k–همگن مینیمال برای هر $k \geq 3$ نشان داده شده است که در برخی موارد این‌ها کوچک‌ترین نمونه شناخته شده هستند. این پایان نامه برگرفته از سه مرجع [۷]، [۸] و [۹] است.

الهام رافضی
دانشگاه الزهرا (س)
اسفند ۹۲

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم بنیادی

۱.۱ پیشگفتار

در این فصل به ارائه تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.

۲.۱ طرح بلوکی

۱.۲.۱ طرح بلوکی غیرکامل متعادل

یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل با پارامترهای صحیح و مثبت λ ، k ، r و v (به طور خلاصه $BIBD$ (v,k,λ))، عبارت است از خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های متمایز V مانند $B_b,\ldots,B_۲,B_۱$ (به نام بلوک‌ها) که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) $۰ \leq k \leq v-۱$ ،

۲) $\mid B_j \mid = k \quad \forall j \in \{۱,\ldots,b\}$ ،

۳) هر زوج از اعضای V در λ بلوک ظاهر می‌شود.

۲.۲.۱ طرح $t-(v,\ k,\ \lambda)$

فرض کنیم λ ، t ، k و v اعداد صحیح مثبت باشند. یک $t-(v,\ k,\ \lambda)$ طرح خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های متمایز V مانند $B_b,\ \ldots,\ B_۲,\ B_۱$ (به نام بلوک‌ها) می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $t \leq k \leq v-۱$ ،

۲) $|\ B_j\ | = k$ $\quad$ $\forall j \in \{۱,\ \ldots,\ b\}$ ،

۳) هر زیرمجموعه t تایی از عناصر متمایز V دقیقاً در λ بلوک ظاهر می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۱. $t-(v,\ k,\ ۱)$ طرح را سیستم اشتاینری k تایی از مرتبه v می‌نامیم و با نماد $S(t,\ k,\ v)$ نشان می‌دهیم.

- یک $t-(v,\ k,\ \lambda)$ طرح را به اختصار یک t–طرح نیز می‌گوییم.
- هرگاه در یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل $(BIBD)$ رابطه $r=k$ و $b=v$ برقرار باشد طرح را متقارن گوییم.
- یک $S(۲,\ ۳,\ v)$ راسیستم سه‌گانه اشتاینری می‌نامند و به صورت $STS(v)$ نمایش می‌دهند که این طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۱,\ ۳ \pmod ۶$ موجود می‌باشد.
- یک $S(۳,\ ۴,\ v)$را سیستم چهارگانه اشتاینری می‌نامند و به صورت $SQS(v)$ نمایش می‌دهند که این طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۲,\ ۴ \pmod ۶$ و $v \geq ۴$ موجود می‌باشد.
- دریک t – طرح تعداد بلوک‌ها برابر است با $b=\lambda\frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$ و هر عنصر $v \in V$ در $r=\lambda\frac{\binom{v-۱}{t-۱}}{\binom{k-۱}{t-۱}}$ تا بلوک ظاهر می‌شود.

مثال ۲.۲.۱. بلوک‌های (ستون‌ها) زیر تشکیل $(۸,\ ۴,\ ۱)-۳$ طرح را می‌دهند:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱	۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳	۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
۸	۸	۸	۸	۸	۸	۸	۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳.۲.۱ مجموعه تعیین کننده

مجموعه تعیین کننده S، مجموعه‌ای از بلوک‌های یک t–طرح D است $(D \subseteq S)$، که اگر t–طرح D' نیز شامل همان بلوک‌ها باشد $(D' \subseteq S)$ ، آنگاه $D'=D$ باشد. به عبارت دیگر اگر مجموعه بلوک‌های S، به‌طور منحصربفردی به یک t–طرح گسترش یابد، آنگاه S را یک مجموعه تعیین کننده می‌نامیم.

۳.۱ ترید (تعاریف و روابط مقدماتی)

۱.۳.۱ ترید $(v,\ k,\ t)$

فرض کنید t ، k و v سه عدد طبیعی باشند به‌طوری که $v > k > t$ و X یک v مجموعه باشد. اگر T_1 و T_2 دو گردایه‌ای مجزا از بلوک‌های k تایی باشند به‌گونه‌ای که هر t تایی به تعداد یکسان در هر دو دسته ظاهر شود، آن‌گاه $T = \{T_1,\ T_2\}$ را یک $(v,\ k,\ t)$ ترید می‌نامیم.
تکرار بلوک‌ها در $T_1(T_2)$ مجاز است هرگاه T_1 و T_2 بلوک‌های تکراری نداشته باشند آن را ترید ساده می‌نامند. به وضوح $\mid T_2 \mid\ =\ \mid T_1 \mid$. عدد $\mid T_1 \mid$ را حجم ترید نامیده و آن را با $Vol(T)$ نشان می‌دهند. زیرمجموعه‌های X را که عناصر آن در بلوک‌های $T_1(T_2)$ ظاهر می‌شوند، بنیان ترید نامیده و با $found(T)$ نمایش داده می‌شود. از تعریف ترید به آسانی نتیجه می‌شود به ازای هر $1 \leq i \leq t - 1$ یک $(v,\ k,\ t)$ ترید، یک $(v,\ k,\ i)$ ترید نیز است و اگر $T = \{T_1,\ T_2\}$ یک $(v,\ k,\ t)$ ترید باشد، $T = \{T_1,\ T_2\}$ نیز یک $(v,\ k,\ i)$ ترید است.

دو $(v,\ k,\ t)$ ترید T و T' را یکریخت گوییم هرگاه نگاشتی دوسویی مانند

$$\sigma : found(T) \longrightarrow found(T')$$

وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که $\sigma(T) = T'$.

۲.۳.۱ ترید ساده

یک $(v,\ k,\ t)$ ترید را ساده می‌گوییم هرگاه هیچ بلوک تکراری در $T_1(T_2)$ وجود نداشته باشد.

۳.۳.۱ ترید اشتاینری

یک $(v,\ k,\ t)$ ترید را اشتاینری گوییم هرگاه هر t–تایی حداکثر یک مرتبه در $T_1(T_2)$ ظاهر شود و ترید اشتاینری را d همگن نامیم هرگاه هر عضو X دقیقاً هیچ دفعه یا d دفعه ظاهر شود.

۴.۳.۱ ترید همبند

یک $(v,\ k,\ t)$ ترید را همبند گوییم اگر شامل هیچ زیر ترید سره‌ای نباشد، به عبارت دیگر $\{T_۱,\ T_۲\}$ همبند است اگر هیچ ترید $\{U_۱,\ U_۲\}$ به‌گونه‌ای که $U_۱ \subset T_۱$ و $U_۲ \subset T_۲$ وجود نداشته باشد.

۵.۳.۱ ترید مینیمال

یک ترید $\{T_۱,\ T_۲\}$ (با توجه به $T_۱$) را مینیمال گوییم، اگر هیچ ترید $\{U_۱,\ U_۲\}$ به صورتی که $U_۱ \subseteq T_۱$ وجود نداشته باشد.

ملاحظه ۱.۳.۱. توجه می‌کنیم که

- اگر تریدی همبند نباشد می‌تواند به تریدهای مجزای کوچکتر تقسیم شود.
- بین ترید همبند و مینیمال تفاوت است،در ترید مینیمال نیازی نیست که $U_۲ \subseteq T_۲$ باشد.
- ممکن است ترید $\{T_۱,\ T_۲\}$ با در نظرگرفتن $T_۱$ مینیمال باشد اما با در نظرگرفتن $T_۲$ مینیمال نباشد. (مثال زیر این نکته را نشان می‌دهد.)
- اگر D مجموعه تعیین‌کننده برای S که یک $STS(v)$ باشد، آن‌گاه برای هر $\{T_۱,\ T_۲\}$ که $(v,\ ۳,\ ۲)$ ترید مینیمال است و اگر $T_۱ \subset S$ باشد باید $T_۱ \cap D \neq \varnothing$. (مشاهده می‌کنیم اگر $T_۱ \cap D = \varnothing$ ، آن‌گاه $D \subset ((S \setminus T_۱) \cup T_۲)$ است و $(S \setminus T_۱) \cup T_۲$ نیز یک سیستم سه‌گانه اشتاینر است که این یک تناقض است.)

قضیه ۲.۳.۱. [۲۹] اگر T یک $(v,\ k,\ t)$ ترید باشد آن گاه

$i)\ \ k + t + ۱ \leq \ |\ found(T)\ |\ .$

$ii)\ \ ۲^t \leq m\ .$

برای هر t ، ترید از حجم ۲^t ، ترید پایه‌ای نامیده می‌شود. در این رابطه قضیه ذیل را داریم:

قضیه ۳.۳.۱. [۲۹]

۱) یک $(v,\ k,\ t)$ ترید از حجم ۲^t وجود دارد.
۲) کلیه‌ی $(v,\ k,\ t)$ تریدهای پایه‌ای دارای ساختار زیر می‌باشند.
$T = (S_۱ - S_۲)(S_۳ - S_۴)\ldots(S_{۲t+۱} - S_{۲t+۲})S_{۲t+۳}$ که در آن:

$$S_i \subset X \quad ; \quad ۱ \leq i \leq ۲t+۳ \quad ; \quad S_i \cap S_j = \varnothing \quad i \neq j$$
$$\mid S_{۲i-۱} \mid \; = \; \mid S_{۲i} \mid \; \geq ۱ \quad ; \quad ۱ \leq i \leq t+۱ \quad ; \quad \sum_{i=۱}^{t+۲} \mid S_{۲i-۱} \mid \; = k$$

برای هر t ، ترید از کمترین حجم، یعنی ۲^t و با کمترین بنیان، یعنی $k+t+۱$ را ترید مینیمال گوییم.

لم ۴.۳.۱. [۲۹] اگر T یک $(v,\ k,\ t)$ ترید از حجم m باشد، آن گاه به ازای هر $x \in found(T)$، $r_x = m$ یا $۲^{t-۱} \leq r_x \leq m - ۲^{t-۱}$.

لم ۵.۳.۱. [۲۹] اگر T یک $(v,\ k,\ t)$ ترید از حجم m باشد، آن گاه $\mid found(T) \mid \; \leq \frac{km}{۲^{t-۱}}$.

۶.۳.۱ همسایگی

فرض کنیم $T = \{T_۱,\ T_۲\}$ ترید سه‌گانه اشتاینری باشد. همسایگی v برای هر نقطه $v \in V$، مجموعه نقاط مجزا از v در بلوک‌هایی که v داخل$T_۱$ رخ می‌دهند تعریف می‌کنیم.

۷.۳.۱ اتصال کامل و اتصال ناقص

اگر $T = \{T_۱,\ T_۲\}$ ترید سه‌گانه اشتاینری باشد. در T دو نقطه مجزا v و w را اتصال کامل می‌نامیم، اگر $\mid N(v) \cap N(w) \mid \; = ۲$ باشد و دو نقطه مجزا v و w را اتصال ناقص می‌نامیم، اگر نقاط z و z' به‌طوری که $\{v,\ w,\ z\} \in T_۱$ و $\{v,\ w,\ z'\} \in T_۲$ وجود داشته باشند و برای هر $z'' \in N(v) \cap N(w) \setminus \{z,\ z'\}$، هریک از دوتایی‌های v ، z'' یا w , z'' اتصال کامل باشند.

در ذیل برخی از نتایجی که از تعریف‌های بالا حاصل می‌شود را ذکر می‌کنیم.

- ترید $T = \{T_۱,\ T_۲\}$ اتصال کامل (اتصال ناقص) گفته می‌شود، اگر هر جفتی که در بلوک T ظاهر می‌شود، دارای اتصال کامل (اتصال ناقص) باشند.
- اگر v و w به بلوکی مشترک تعلق داشته باشند، آن‌گاه $\mid N(v) \cap N(w) \mid \; \geq ۲$ است.
- دو نقطه‌ای که اتصال ناقص هستند باید به یک بلوک مشترک تعلق داشته باشند، گرچه نقاط با اتصال کامل این خصوصیت را لزوماً ندارند.
- اگر دو نقطه از بلوکی در $T_۱$ اتصال کامل باشند، آن‌گاه آن دو نقطه اتصال ناقص نیز هستند، گرچه عکس آن لزوماً برقرار نیست.

۴.۱ مربع لاتین، مربع لاتین جزئی و ترید لاتین

۱.۴.۱ مربع لاتین

مربع لاتین L از مرتبه‌ی n، آرایه $n \times n$ است با عضوهایی که از مجموعه‌ی $N = \{۰,\ ۱,\ \ldots,\ n-۱\}$ انتخاب شده‌اند به‌گونه‌ای که هر یک از عناصر N دقیقاً یک‌بار در هر سطر و دقیقاً یک‌بار در هر ستون از آرایه رخ دهد و به صورت

$$L = \{(i,\ j,\ a_{ij}) \mid i = ۱,\ ۲,\ \ldots,\ n\ \ ,\ j = ۱,\ ۲,\ \ldots,\ n\}$$

نمایش می‌دهند که عنصر a_{ij} در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد.

دو مربع لاتین $n \times n$، L و L' را بر هم متعامد می‌گوییم هرگاه تمام زوج مرتب‌های حاصل از روی هم قرار دادن L و L' متمایز باشد.

معمولاً برای مجموعه اندیس N از مجموعه $[n] = \{۱,\ ۲,\ \ldots,\ n\}$ یا $[n] = \{۰,\ ۱,\ \ldots,\ n-۱\}$ استفاده می‌کنیم.

۲.۴.۱ مربع لاتین جزئی

فرض کنید $N = \{۰,\ ۱,\ \ldots,\ n-۱\}$ باشد. مربع لاتین جزئی P ازمرتبه n ، مجموعه‌ای از سه‌تایی‌های مرتب به شکل $(r,\ c,\ e)$ است که $۱ \leq r,\ c,\ e \leq n$ با خصوصیات زیر

i) اگر $(r,\ c,\ e) \in P$ و $(r,\ c,\ e') \in P$ ، آن‌گاه $e = e'$ ؛

ii) اگر $(r,\ c,\ e) \in P$ و $(r,\ c',\ e) \in P$ ، آن‌گاه $c = c'$ ؛

iii) اگر $(r,\ c,\ e) \in P$ و $(r',\ c,\ e) \in P$ ، آن‌گاه $r = r'$.

همچنین می‌توانیم مربع لاتین جزئی P را با آرایه $n \times n$ و ورودی‌هایی که از مجموعه N انتخاب شده‌اند نشان دهیم به طوری که اگر $(r,\ c,\ e) \in P$ ، ورودی e در سلول $(r,\ c)$ رخ می‌دهد. (در این تعریف r ، c و e نشان دهنده ردیف، ستون و ورودی هستند.) مربع لاتین جزئی P را غیربدیهی گوییم اگر $P \neq \varnothing$.

مربع لاتین جزئی دارای این خصوصیت است که هر ورودی حداکثر یک‌بار در هر سطر و حداکثر یک‌بار در هر ستون رخ دهد. اگر همه سلول‌های آرایه پر شده باشد، آن‌گاه مربع لاتین جزئی، مربع لاتین نامیده می‌شود.

برای مربع لاتین جزئی P مجموعه سلول‌ها را به صورت $\varphi_P = \{(r,\ c) \mid (r,\ c,\ e) \in P\}$ نشان می‌دهیم و $\mid \varphi_P \mid$ را اندازه مربع لاتین جزئی است که برابر تعداد سلول‌های غیرخالی

آرایه است. برای هر $r \in N$ ، فرض کنیم $\Re_P^r$ نمایانگر مجموعه‌ای از اشیایی است که در سطر r از P رخ می‌دهد و به‌طور ظاهری $\Re_P^r = \{e \mid (r,\ c,\ e) \in P\}$. برای هر $c \in N$ ، $\psi_P^c = \{e \mid (r,\ c,\ e) \in P\}$ و در آخر برای هر $e \in N$ ، $\xi_P^e = \{(r,\ c) \mid (r,\ c,\ e) \in P\}$ را تعریف می‌کنیم.

همچنین می‌توانیم مربع لاتین جزئی P را به‌صورت یک مجموعه در نظر بگیریم و بنویسیم $(x,\ y,\ z) \in P$ اگر و تنها اگر نماد z در سلولی با سطر x و ستون y ظاهر شود و به‌صورت یک عمل دوتایی $x \circ y = z$ بنویسیم اگر و تنها اگر $(x,\ y,\ z) \in P$. مربع لاتین جزئی P هم ارز با زیرمجموعه‌ی $P \subseteq A_{۱} \times A_{۲} \times A_{۳}$ است (که $A_{۱}$، $A_{۲}$ و $A_{۳}$ به‌ترتیب نشان دهنده مجموعه سطرها، ستون‌ها و ورودی هستند)، اگر شرط‌های زیر برقرار باشند:

$(P۱)$ اگر $(a_{۱},\ a_{۲},\ a_{۳}),\ (b_{۱},\ b_{۲},\ b_{۳}) \in P$ ، آن‌گاه یا حداکثر یکی از $a_{۱} = b_{۱}$، $a_{۲} = b_{۲}$ و $a_{۳} = b_{۳}$ درست است یا هر سه درست است.

$(P۲)$ مجموعه‌های $A_{۱}$، $A_{۲}$ و $A_{۳}$ دو به دو مجزا هستند و برای تمام $\alpha \in \bigcup_i A_i$ یک $(a_{۱},\ a_{۲},\ a_{۳}) \in P$ برای هر i، که $\alpha = a_i$ وجود دارد.

مثال ۱.۴.۱. آرایه‌های زیر نمونه‌هایی از سه مربع لاتین جزئی از مرتبه ۶ می‌باشد (که مربع اولی مربع لاتین نیز است).

(آ)

۱	۳	۲	۴	۶	۵
۳	۲	۱	۶	۵	۴
۲	۱	۳	۵	۴	۶
۴	۶	۵	۱	۳	۲
۶	۵	۴	۳	۲	۱
۵	۴	۶	۲	۱	۳

(ب)

	۳	۲		۶	۵
		۱			۴
۲	۱		۵	۴	
	۶	۵		۳	۲
		۴			۱
۵	۴		۲	۱	

(ج)

	۶	۵		۳	۲
		۴			۱
۵	۴		۲	۱	
	۳	۲		۶	۵
		۱			۴
۲	۱		۵	۴	

شکل ۱ : مربع‌های لاتین جزئی از مرتبه ۶

۳.۴.۱ ایزوتوپی

$(\alpha_{۱},\ \alpha_{۲},\ \alpha_{۳})$ را یک ایزوتوپی از مربع لاتین جزئی P با مجموعه عناصر N می‌گویند هرگاه هر یک از α_iها یک جایگشت از N باشد. می‌گوییم مربع لاتین جزئی P با مربع لاتین جزئی P'، هر دو با مجموعه عناصر N، ایزوتوپیک است اگر $(\alpha_{۱},\ \alpha_{۲},\ \alpha_{۳})$ یک سه‌تایی مرتب از جایگشت‌های N باشد به‌قسمی که

$$P' = \{(\alpha_{۱}(i),\ \alpha_{۲}(j),\ \alpha_{۳}(k)) \mid (i,\ j,\ k) \in P\}.$$

رابطه ایزوتوپی یک رابطه هم‌ارزی است و در نتیجه کلاس‌های ایزوتوپی، کلاس های هم‌ارزی می‌باشند.

ویژگی‌های ترکیبیاتی مربع‌های لاتین جزئی به‌طور کلی تحت ایزوتوپی حفظ می‌شود (به‌طور خاص، هر ایزوتوپی ترید دوگانه لاتین، ترید دوگانه لاتین است)، و از این ویژگی در فصل ۴ استفاده می‌کنیم.

۴.۴.۱ ترید دوگانه لاتین

مربع لاتین جزئی T از مرتبه n را ترید دوگانه لاتین می‌گوییم اگر مربع لاتین جزئی T' ای (از مرتبه n) وجود داشته باشد به‌طوری که:

i) $\varphi_T = \varphi_{T'} \neq \varnothing$ ؛

ii) اگر $(r,\ c,\ e) \in T$ و $(r,\ c,\ e') \in T'$ ، آن‌گاه $e \neq e'$ ؛

iii) برای هر $r \in N$ ، $\Re_T^r = \Re_{T'}^r$ (سطر r متوازن شده) ؛

iv) برای هر $c \in N$ ، $\psi_T^c = \psi_{T'}^c$ (ستون c متوازن شده) .

مربع لاتین جزئی T' جفت متمایز نامیده می‌شود. یک ترید دوگانه لاتین مشخص ممکن است بیش از یک جفت متمایز داشته باشد بنابراین انتخاب T' می‌تواند منحصربفرد نباشد.

تعریف زیر معادل تعریف فوق می‌باشد:

ترید دوگانه لاتین $(T^\circ,\ T^*)$ یک زوج از مربع‌های لاتین جزئی $T^\circ,\ T^* \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$ است که :

$(R1)$ $T^\circ \cap T^* = \varnothing$.

$(R2)$ برای هر $(a_1,\ a_2,\ a_3) \in T^\circ$ و هر $r,\ s \in \{1,\ 2,\ 3\}$، $r \neq s$ یک $(b_1,\ b_2,\ b_3) \in T^*$ یکتا وجود دارد که $a_r = b_r$ و $a_s = b_s$.

$(R3)$ برای هر $(a_1,\ a_2,\ a_3) \in T^*$ و هر $r,\ s \in \{1,\ 2,\ 3\}$، $r \neq s$ یک $(b_1,\ b_2,\ b_3) \in T^\circ$ یکتا وجود دارد که $a_r = b_r$ و $a_s = b_s$.

تعداد عناصر T° حجم ترید دوگانه لاتین $(T^\circ,\ T^*)$ نامیده می‌شود.

توجه کنید $(R2)$ و $(R3)$ نتیجه می‌دهند، هر سطر (ستون) از T° شامل عناصری از A_3 است که در سطر (ستون) متناظر آن در T^* ظاهر شده است.

از آن‌جایی که هر ترید دوگانه لاتین برابر تفاوت دو مربع لاتین هم مرتبه است، ممکن است تصور شود که هر دو ترید لاتین قابل تکمیل شدن به دو مربع لاتین از همان مرتبه ترید دوگانه لاتین می‌باشد. قابل توجه است که الزاماً این‌گونه نیست، همین‌طور که هر مربع

لاتین جزئی الزاماً قابل تکمیل به یک مربع لاتین هم‌مرتبه با خودش نمی‌باشد. بنابراین در تکمیل کردن یک ترید دوگانه لاتین ممکن است به یک مربع لاتین از مرتبه بالاتری برسیم. از این‌رو در بررسی تریدهای دوگانه لاتین مرتبه ترید دوگانه لاتین اهمیت چندانی ندارد، ولی حجم ترید دوگانه لاتین همواره مورد توجه بوده است (در بعضی از مقاله‌ها آن را اندازه ترید دوگانه لاتین نامیده‌اند). به راحتی می‌توان نشان داد که ترید دوگانه لاتین از حجم‌های ۱، ۲، ۳ و ۵ وجود ندارد.

مثال ۲.۴.۱. در زیر ترید لاتین دوگانه $(T_۱,\ T_۲)$ نشان داده شده، که با توجه به $T_۱$، مینیمال است اما نسبت به $T_۲$ مینیمال نیست. (یک زیرمربع ۲×۲ در $T_۲$ وجود دارد که پررنگ‌تر نشان داده شده است.) ترید لاتین دوگانه آرایه‌ای با ورودی k در سطر i و ستون j، سه‌تایی $(i,\ j,\ k)$ را ارائه می‌دهد. اگر سه‌تایی‌های $T_۱$ را در یک دسته و سه‌تایی‌های $T_۲$ را در دسته دیگر قرار دهیم، می‌توانیم ترید سه‌گانه اشتاینر از حجم ۴۰ با ۳۴ عضو به‌دست‌آوریم. که با در نظرگرفتن $T_۱$ مینیمال است (اما نه با $T_۲$).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
a											۵		۴
b											۸	۷	
c									۷	۴		۸	۵
d	۸			۶							۴		
e		۳	۵								۷		
f		۴	۳			۱							
g	۶					۲	۵						
h					۳	۴	۲	۱					
i			۱	۲	۵	۶							
j				۴	۲					۳			
k					۱			۶	۵				
l		۷						۴	۶				
m	۵						۳			۸			

$(T_۱)$