بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

توسیع متروید توسط یک هم دور

کبرا عزتی شندی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

دی ۱۳۸۸

پایان نامه خانم کبرا عزتی شندی **به تاریخ** ۸۸/۱۰/۲۸ **شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه** عالی **و نمره** ۱۸ - هیجده **قرار گرفت .**

۱- **استاد راهنما و رئیس هیئت داوران :** آقای دکتر حبیب اذانچیلر

۲- **استاد مشاور :** ـــــ

۳- **داور خارجی :** آقای دکتر قدرت اله آزادی

۴- **داورداخلی :** آقای دکتر محسن قاسمی

۵- **نماینده تحصیلات تکمیلی :** آقای دکتر سعید استادباشی

تقدیم به:

مادرم

خورشید فروزان زندگیم

تقدیر و تشکر:

حمد و سپاس خداوند یگانه را که، پرتو الطاف بی شمارش، بر لحظه لحظه زندگیم، ساطع و آشکار است و هر چه دارم از اوست. خدایی که فکر و اندیشه را، در بستر روح و روانم جاری ساخت و توفیق داد، تا از خوان گسترده علم و دانش، بهره اندکی ببرم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، توفیق انجام این پایان نامه را یافته ام، شایسته است که، از تمامی عزیزانی که مرا در این راه یاری نمودند، قدردانی نمایم.

از مادر عزیزم، که وجودش گرمی بخش زندگیم است، از برادر بزرگوارم جناب آقای مهندس عزتی که پدرانه در تک تک مراحل زندگی یاریم نمودند، از برادرم عزیزم آقای داود عزتی تشویقها و کمکهای ایشان همواره امید راهم بود و از تمام خانواده ام که در این مدت زحمتهای من را تحمل کردند کمال تشکر را دارم.

همچنین از استاد راهنمای خوبم، جناب آقای دکتر حبیب اذانچیلر که باسعه صدر و بردباری، مرا در نوشتن این پایان نامه، یاری نمودند تشکر می نمایم. از جناب آقای دکتر آزادی و جناب آقای دکتر قاسمی که زحمت خواندن و داوری ای پایان نامه را به عهده گرفتند، تشکر می کنم.

از دوستان عزیزم خانم کرامت نیا و خانم سید شربتی و همه ی دوستان و همکلاسی هایم، که با راهنمایی هایشان مرا در این دوره ی تحصیلی یاری کردند، تشکر می کنم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه توسیعی از یک ماتروید ارائه می‌شود که در آن مجموعه‌ی زمینه‌ی ماتروید مبنا یک ابرصفحه‌ی مدولار از ماتروید توسیع یافته است و از این موضوع استفاده می‌کنیم و احکامی را در مورد هندسه‌های خط—بسته به اثبات می‌رسانیم. همچنین این نوع توسیع را برای اثبات سوپرحلپذیری لتیسهای داولینگ و احکام پایه در این مورد به کار می‌بریم و در پایان هندسه‌های خط—بسته‌ای می‌سازیم که سوپرحلپذیر نیستند. این پایان نامه براساس مقاله‌ی زیر تنظیم شده است.

J.E. Bonin, *Extending a matroid by a cocircuit*, *Discrete Math.* 306 (2006) 812-819.

پیشگفتار

این پایان نامه در شش فصل تنظیم شده است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم پایه‌ای از نظریه‌ی گراف، متروید و گروه‌ها که در فصلهای بعدی مورد نیاز است ارائه می‌کنیم.

در فصل دوم مفهوم لتیس و لتیس فلتهای یک متروید را معرفی می‌کنیم .

در فصل سوم به موضوع اصلی پایان نامه یعنی نوع خاصی از توسیع یک متروید می‌پردازیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می توان متروید‌ی را طوری توسیع داد که مجموعه‌ی زمینه‌ی آن یک ابرصفحه‌ی مدولار از مترویدِ توسیع یافته باشد این مطلب را طی قضیه‌ی ۱.۲.۳ ثابت می کنیم. در فصلهای بعدی کاربردهایی از این قضیه را ارائه می‌کنیم.

در فصل چهارم از قضیه‌ی ۱.۲.۳ استفاده می‌کنیم و قضایایی را در مورد هندسه‌های خط—بسته ثابت می‌کنیم. البته اکثر این احکام در مرجع [۷] با استفاده از مفاهیم نظریه‌ی لتیسها اثبات شده‌اند ولی ما این احکام را ساده تر و گاه کامل تر با استفاده از قضیه‌ی مذکور ثابت می‌کنیم.

در فصل پنجم با نگرشی جدید و بسیار ساده‌تر از آنچه که در مرجع [۷] ارائه شده مفهوم لتیس داولینگ را ارائه می‌کنیم و باز با یاری گرفتن از قضیه‌ی ۱.۲.۳ اثباتی ساده از هندسی بودن، سوپرحلپذیر بودن و بسیاری احکام دیگر، در این باره ارائه می‌کنیم.

و بالاخره در فصل آخر هندسه‌های خط—بسته‌ای می‌سازیم که سوپرحلپذیر نیستند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

دراین فصل تعاریف و نتایج مقدماتی را که در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌کنیم.

۱.۱ مباحثی ازنظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ : گراف[۱] G، سه‌تایی است متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ که اعضای آن رأس[۲]های گراف، و مجموعه $E(G)$ که اعضای آن یال[۳]های گراف نامیده می‌شوند به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می‌کند.

اگر $e = uv$ یک یال ازگراف G باشد، آن‌گاه u و v را نقاط انتهایی[۴] آن یال گوییم. علاوه بر این u و

[۱] Graph
[۲] Vertex
[۳] Edge
[۴] End points

v را دو رأس مجاور [۱] نیز می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ : اگر $e = uv$ یالی از گراف G باشد که نقاط انتهایی آن یکسان می‌باشند، آن‌گاه e را یک طوقه [۲] گوییم؛ و اگر دو یال دارای نقاط انتهایی یکسان باشند آن ها را موازی [۳] می‌نامیم. گراف فاقد طوقه و یال موازی را ساده [۴] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ : درجه [۵] رأس v_i که با نماد $d(v_i)$ نمایش داده می‌شود، تعداد یالهایی می‌باشد که از آن رأس می‌گذرند.

تعریف ۴.۱.۱ : دریک گراف n رأسی مانند G، اگر هر دو رأس دلخواه آن با هم مجاور باشند، گراف را کامل [۶] گوییم و با نماد K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ : دنبالهٔ $v_0e_1v_1...v_{k-1}e_kv_k$ از رئوس و یالهای گراف G را که در آن v_i ها رأس‌های گراف و e_i ها یال‌های آن می‌باشند به‌طوری که‌در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند را یک گشت [۷] گوییم.

هر گشتی که در آن رئوس و لذا یال‌ها مجزا باشند، یک مسیر [۸] نامیده می‌شود.

---

[۱] Adjacent
[۲] Loop
[۳] Multiple edges
[۴] Simple
[۵] Degree
[۶] Complete
[۷] Walk
[۸] Path

تعریف ۶.۱.۱ : گراف همبند[۱]، گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u-v$ مسیر موجود باشد.

تعریف ۷.۱.۱ : هر زیرگراف همبند ماکسیمال گراف G را یک مؤلفه[۲] گراف G گویند و تعداد مؤلفه‌های یک گراف مانند G را با $w(G)$ نمایش می دهند.

تعریف ۸.۱.۱ : گراف $G=(V,E)$ را دوبخشی [۳] گوییم، هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه مجزا چنان افراز کرد که رئوس انتهایی هر یال در افرازهای متمایزی قرار گیرند.

تعریف ۹.۱.۱ : گراف H زیر گراف[۴] G است هرگاه:

$$E(H) \subseteq E(G) \quad , \quad V(H) \subseteq V(G)$$

در این صورت آن را به صورت $H \subseteq G$ نشان داده و گوییم G شامل H است.

تعریف ۱۰.۱.۱ : گراف G را در نظر می‌گیریم. زیر گرافی از G را که مجموعه‌ی رأسهای آن $X \subseteq V(G)$ است و دو رأس از آن مجاورند اگر و تنها اگر آن دو رأس در G مجاور باشند را زیر گراف تولید شده توسط X گوییم و آن را با $G[X]$ نمایش میدهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ : یک k−رنگ آمیزی[۵] گراف G یعنی علامت دهی $f : V(G) \to S$ که در آن $k = |S|$. علامتها، رنگها هستند و رأسهای رنگ شده با یک رنگ خاص یک کلاس رنگی[۶]

Connected[۱]
Component[۲]
Bipartite graph[۳]
Subgraph[۴]
k-coloring[۵]
Color class[۶]

نامیده می‌شود.

یک k–رنگ‌آمیزی را سره[1] گوییم هرگاه رأسهای مجاور رنگهای متفاوت داشته‌باشند.

یک گراف را k–رنگ شدنی[2] گوییم هر گاه دارای یک k–رنگ‌آمیزی سره باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ : کمترین تعداد رنگهای لازم برای یک رنگ آمیزی سره گراف G را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم و به آن عدد رنگی[3] گراف G می‌گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱ : فرض کنید G یک گراف و k یک عدد طبیعی باشد. چند جمله‌ای رنگی[4] گراف G را با $\chi(G;k)$ نشان می‌دهیم و برابر است با تعداد رنگ آمیزی‌های سره $f: V(G) \to \{۱, ۲, ..., k\}$ که در آن هیچ الزامی به استفاده از k رنگ در رنگ آمیزی وجود ندارد.

مثال ۱۴.۱.۱ : چند جمله‌ای رنگی گراف $\overline{K_n}$، گرافی با n رأس تنها و بدون هیچ یالی برابر است با $\chi(\overline{K_n};k) = k^n$.

چند جمله‌ای رنگی گراف کامل K_n برابر است با $\chi(K_n;k) = k(k-۱)...(k-(n-۱))$.

برای مطالعه‌ی بیشتر در زمینه‌ی نظریه‌ی گراف به [۱۳] مراجعه کنید.

۲.۱ مباحثی از نظریه ماترویید

[1] Proper
[2] k-colorable
[3] Chromatic number
[4] Chromatic polynomial

تعریف ۱.۲.۱ : متروید M[۱]، زوج مرتب $(E,\mathcal{I})$ می‌باشد که در آن E مجموعه‌ای متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آن‌گاه $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_2| > |I_1|$، آن‌گاه عضوی مانند $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد بطوریکه $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

شرط سوم را اصل استقلال گوییم.

اعضای $\mathcal{I}$ را مجموعه‌های مستقل[۲] و مجموعه E را مجموعه زمینه[۳] M گوییم.

زیرمجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، عناصر وابسته[۴] متروید گوییم.

گزاره ۲.۲.۱ : فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $V(m,F)$ و $\mathcal{I}$ گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌های مستقل خطی E باشد. در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است. متروید حاصل را یک متروید برداری[۵] گوییم.

برهان : مراجعه شود به [گزاره ۱.۱.۱ از[۹]]. ■

تعریف ۳.۲.۱ : فرض کنید $A_{m\times n}$ یک ماتریس روی میدان دلخواه F باشد. ستون‌های این ماتریس را با e_1 و e_2 و...و e_n علامت گذاری می‌کنیم. اگر قرار دهیم $E=\{e_1,e_2,...e_n\}$ و $\mathcal{I}$

---

[۱] Matroid
[۲] Independant Sets
[۳] Ground Set
[۴] Dependant
[۵] Vector matroid

گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های مستقل خطی E باشد، آن‌گاه $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است که آن را با $M[A]$ نمایش می‌دهیم و متروید برداری می‌نامیم.

مثال ۴.۲.۱ : فرض کنیم A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نام‌گذاری شده‌اند. در این‌صورت با فرض:

$E = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱,۲\}, \{۱,۵\}, \{۲,۴\}, \{۲,۵\}, \{۴,۵\}\}$

$(E,\mathcal{I})$ یک متروید می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۱ : متروید $M = (E,\mathcal{I})$ راقابل نمایش روی میدان F[۱] گوییم هرگاه $M = M[A]$ که در آن A یک ماتریس روی میدان F است.

تعریف ۶.۲.۱ : دو متروید $M_۱$ و $M_۲$ را یکریخت گوییم و با نماد $M_۱ \cong M_۲$ نمایش می‌دهیم، هرگاه نگاشتی دوسویی مانند $\psi : E(M_۱) \to E(M_۲)$ چنان موجود باشد که برای هر $X \subseteq E(M_۱)$، $\psi(X)$ در $M_۲$ مستقل باشد اگر و تنها اگر X در $M_۱$ مستقل باشد.

تعریف ۷.۲.۱ : هر زیر مجموعه‌ی وابسته مینیمال M را یک‌دور[۲] می‌نامیم؛ گردایه همه‌ی دورهای M را با $\mathcal{C}(M)$ و یا با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم؛ دوری از M که شامل n عضو باشد، یک n—دور M گوییم.

[۱] F-representable
[۲] Circuit

هر دور یک عضوی را یک طوقه[۱] گوییم.

لم ۸.۲.۱ : $\mathcal{C}(M)$، مجموعه دورهای ماتروید M، دارای خواص زیر است:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصری از$\mathcal{C}$ باشند و $C_۱ \subseteq C_۲$، آن‌گاه $C_۱ = C_۲$.

(C3) هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصر متمایزی از$\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_۱ \cap C_۲$، آن‌گاه عضوی از $\mathcal{C}$ مانند $C_۳$ چنان موجود است که $C_۳ \subseteq (C_۱ \cup C_۲) - e$.

برهان : مراجعه شود به [لم ۳.۱.۱ از [۹]] ■

قضیه ۹.۲.۱ : فرض کنید E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد که در سه خاصیت (C1) و (C2) و (C3) صدق می‌کند. همچنین فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند، آن‌گاه $(E,\mathcal{I})$ یک ماتروید روی E است که $\mathcal{C}$ گردایه‌ی دورهای آن می‌باشد.

برهان : مراجعه شود به [قضیه ۴.۱.۱ از [۹]]. ■

با توجه به لم ۸.۲.۱ و قضیه ۹.۲.۱ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌گردد.

نتیجه ۱۰.۲.۱ : فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی زمینه‌ی $E(M)$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{C}$ گردایه‌ی دورهای یک ماتروید روی E است اگروتنهااگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

(C1) $\phi \notin \mathcal{C}$.

(C2) اگر $C_۱, C_۲ \in \mathcal{C}$ و $C_۲ \subseteq C_۱$، آن‌گاه $C_۲ = C_۱$.

[۱] Loop

(C3) اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آن‌گاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد بطوریکه $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$. ■

با توجه به نتیجه‌ی قبل می‌توان یک مترویید را بر اساس دورهای آن تعریف کرد.

گزاره ۱۱.۲.۱ : فرض کنیم G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه $\mathcal{C}$ را گردایه مجموعه یالهای دورهای گراف G در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک مترویید است

برهان : مراجعه شود به [۱.۱.۷ از [۹]]. ■

این مترویید را **مترویید دوری**[1] گراف G گوییم و با نماد $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱ : متروییدی را که یکریخت با یک مترویید دوری باشد، مترویید گرافیک[2] گوییم.

تعریف ۱۳.۲.۱ : اگر f و g دو عضو مترویید M باشند بطوریکه $\{f, g\}$ یک دور باشد، آن‌گاه f و g را موازی[3] گوییم.

تعریف ۱۴.۲.۱ : یک کلاس موازی[4] از M، زیرمجموعه‌ی ماکسیمال X از $E(M)$ است که هر دو عضو متمایز آن موازی اند و هیچ عضو آن طوقه نیست.

یک کلاس موازی را بدیهی[5] گوییم اگر شامل تنها یک عضو باشد.

---

[1] Cycle Matroid
[2] Graphic Matroid
[3] Parallel
[4] Parallel class
[5] Trivial

تعریف ۱۵.۲.۱ : فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک ماترویید بدون طوقه بوده و هر کلاس موازی آن بدیهی باشد. در این صورت M را یک ماترویید ساده(یا هندسه)[۱] گوییم.

حال اگر تمامی طوقه‌های ماترویید M و از هر کلاس موازی همه‌ی عضوها را به جز یکی حذف کنیم، ماترویید حاصل را ماترویید ساده‌ی وابسته به M می‌نامیم و آن را با $Si(M)$ یا $\widetilde{M}$ نمایش می‌دهیم و به این عمل ساده‌سازی[۲] ماترویید M گوییم.

تعریف ۱۶.۲.۱ : هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال ماترویید M را یک پایه‌ی [۳] M گوییم.

گردایه‌ی تمامی پایه‌های ماترویید M را با $\mathcal{B}$ و یا با $\mathcal{B}(M)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۷.۲.۱ : فرض کنیم $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه از ماترویید M باشند، در این صورت $|B_۱| = |B_۲|$.

برهان : مراجعه شود به [۱.۲.۱ از [۹]]. ■

لم ۱۸.۲.۱ : گردایه‌ی پایه‌های هر مترویدی در شرایط زیر صدق می‌کند.

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B2) فرض کنیم $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$ و $x \in B_۱ - B_۲$، در این صورت عضو $y \in B_۲ - B_۱$ وجود دارد که $(B_۱ - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان : مراجعه شود به [۱.۲.۲ از [۹]]. ■

قضیه ۱۹.۲.۱ : فرض کنیم E یک مجموعه و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در شرایط لم قبل صدق می‌کند. فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌هایی از E باشد که

---

[۱] Simple matroid(or geometry)

[۲] Simplification

[۳] Base

زیرمجموعه‌ی عضوی از $\mathcal{B}$ هستند. در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است که $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های آن است.

برهان : مراجعه شود به [۳.۲.۱ از [۹]]. ■

نتیجه ۲۰.۲.۱ : فرض کنیم $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است. در این صورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک متروید مثل M است اگروتنهااگر در دو شرط زیر صدق کند:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B2) فرض کنید $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$ و $x \in B_۱ - B_۲$، در این صورت عضو $y \in B_۲ - B_۱$ وجود دارد که $(B_۱ - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{B}(M)$ گردایه‌ی مجموعه‌های مستقل ماکسیمال $E(M)$ است که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}(M)$ نیستند. $\mathcal{C}(M)$ گردایه‌ی تمامی زیر مجموعه‌های مینیمال $E(M)$ است که زیرمجموعه‌ی هیچ عضوی از $\mathcal{B}(M)$ نیستند. لذا با شناسایی هر کدام از گردایه‌های $\mathcal{I}(M)$، $\mathcal{C}(M)$ و $\mathcal{B}(M)$، دیگری مشخص می‌شود. بنابراین هر متروید با مجموعه‌ی زمینه‌ی خود و یکی از گردایه‌های $\mathcal{I}(M)$ یا $\mathcal{C}(M)$ یا $\mathcal{B}(M)$ قابل شناسایی است. ■

مثال ۲۱.۲.۱ : فرض کنید E یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های m—عضوی E باشدکه در آن $n \geq m \geq ۰$. در این صورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک متروید روی E است. این متروید را با $U_{m,n}$ نمایش داده آن رامتروید یکنواخت[۱] می‌نامیم و داریم:

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \Big\{ X \subseteq E \ ; \ |X| \leq m \Big\}$$

[۱] Uniform matroid

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \phi & m = n \\ \{C \subseteq E \mid |C| = m + 1\} & m < n \end{cases}$$

مثال ۲۲.۲.۱ : در ماترویید $U_{0,n}$، هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از مجموعه‌ی زمینه یک طوقه است، چون زیرمجموعه‌های تک عضوی دور هستند. در ضمن $\emptyset$ به عنوان تنها مجموعه‌ی مستقل برای این ماترویید است.

در ماترویید $U_{n,n}$ هر زیرمجموعه از مجموعه‌ی زمینه‌ی $E(M)$ یک مجموعه‌ی مستقل است. لازم به ذکر است این ماترویید هیچ مجموعه‌ی وابسته ندارد. ■

تعریف ۲۳.۲.۱ : فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک ماترویید و $X \subseteq E$ باشد. فرض کنید:

$$\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

می‌توان دید که $(X,\mathcal{I}|X)$ یک ماترویید است. این ماترویید را ماترویید تحدید[1] M به X یا حذف[2] $E - X$ از M گوییم و با نماد $M|X$ یا $M\backslash(E - X)$ نمایش می‌دهیم.

گردایه‌ی دورهای این ماترویید به صورت زیر است:

$$\mathcal{C}(M|X) = \{C \in \mathcal{C} \,;\, C \subseteq X\}.$$

[1] Restriction
[2] Deletion