بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده :ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

مطالعه مسئله رنگ آمیزی گراف‌های فازی

دانشجو: صفر محمد نوری

استاد راهنما :

آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

دی ماه ۱۳۹۰

دانشکده :ریاضی

گروه :ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

صفر محمد نوری

تحت عنوان:

مطالعه مسئله رنگ آمیزی گراف فازی

در تاریخ ۹۰/۱۰/۱۲ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر صادق رحیمی شعرباف		----------	
---------- :		----------	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
دکتر میثم علیشاهی		دکتر احمد نزاکتی	
دکتر مرتضی زاهدی			

سپاس از دو وجود مقدس

آنان که ناتوان شدند تا به توانایی برسم

موهایشان سپید گشت تا روسفید شوم

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود و روشنگر راهم باشند

تقدیم به

پدرم

و

مادرم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و کرم بی کرانش من را نیز در بر گرفت تا به وسع توان خویش گامی کوچک در گستره علم و معرفت بردارم و میسر گشت تا از خرمن دانش و تجربه بزرگان و نیک اندیشان بهره ببرم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره پرخاطره از دوران تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، هر چند واژه‌ها را یارای آن نیست که لطف و محبت و بزرگواری آنانی را که در تمام دوران زندگی‌ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده‌ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب می‌دانم، زحمات پدر و مادر مهربانم را که همواره راه‌گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده‌اند ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی و باطنی را از الطاف و مهربانی‌های آنان ابراز دارم. همچنین لازم می‌دانم که از زحمات فراوان اساتید توانمندم آقای دکتر رحیمی که با راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده و صبر و حوصله فراوان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم، بی‌تردید انجام این پایان نامه بدون همکاری و راهنمایی ایشان امکان‌پذیر نبود. همچنین بر خود لازم می‌دانم از زحمات آقایان دکتر فتحعلی، دکتر جعفری نیز تشکر ویژه نمایم که در انجام این پایان نامه بنده را یاری نمودند. در اینجا همچنین لازم می‌دانم از اعضای خانواده عزیزم و مخصوصاً پدر و مادرم، همچنین از دوستان عزیزم آقایان خوجملی، جانفدا، امیدیان، لندرانی، گلپایگانی و آقای الهی که مایه دلگرمی من بوده و متحمل زحمات زیادی شدند نهایت سپاسگزاری را داشته باشم، و برای آنها بهترین‌ها را آرزو می‌کنم.

صفر محمد نوری

دی ماه ۱۳۹۰

تعهد نامه

اینجانب **صفر محمد نوری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **مطالعه مسئله رنگ آمیزی گراف فازی** تحت راهنمائی دکتر **صادق رحیمی شعر باف** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

منطق فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط دکتر لطفی زاده مطرح شد. معمولاً شیوه‌هایی که برای طراحی و مدل‌سازی یک سیستم بکار می رود نیازمند ریاضیات پیچیده و پیشرفته‌ای است که با استفاده از مقادیر زبانی و دانش فرد خبره قابل بیان هستند. با اعمال مفهوم فازی بر روی رئوس و یال‌های گراف، ابهام در مدل بندی بسیاری از مسائل با استفاده از گراف فازی رفع می‌گردد.

این تحقیق به مطالعه رنگ آمیزی گراف‌های فازی می‌پردازد. برای گراف $G=(V,E)$، تابع رنگ آمیزی C، یک مقدار عدد صحیح $C(i)$ را به هر رأس $i \in V$ طوری تخصیص می‌دهد که یال‌های مجاور $\{i, j\} \in E$، رنگ‌های یکسانی نگیرند. در این تحقیق ضمن بیان رنگ آمیزی گراف‌های فازی، برای دسته بندی مدل‌هایی که در آن دسته‌ها ارزش نزولی دارند، مجموعه رنگ‌های فازی نزدیک به یک تعریف شده است و با ارائه مفهوم رنگ آمیزی مجموع، برای گراف فازی $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$، مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی توسعه یافته فازی بیان شده است. همچنین کاربرد این مسئله در زمان بندی امتحانات[1] بیان گشته که در آن رنگ‌های فازی، ارزش زمان برگزاری امتحانات است. نتایج محاسباتی بر روی برخی گراف‌های فازی برای مقایسه نیز آورده شده است. برای گراف‌های فازی وزن دار $\tilde{G} = (V, \tilde{E}, W)$، رنگ آمیزی بازه‌ای مورد بررسی واقع گردیده و یک رنگ آمیزی بازه‌ای[2] بر اساس سطح شدت یال‌های متصل به رئوس ناسازگار بیان و کاربرد آن در مسئله چراغ ترافیک[3] ارائه شده است. یک الگوریتم دقیق برای بدست آوردن عدد رنگی[4] و تابع رنگ آمیزی بازه‌ای معرفی و برخی نتایج برای آزمایش سرعت الگوریتم بیان گردیده است. برای بدست آوردن جواب بهتر ، رنگ آمیزی دوری[5] تعریف شده و یک الگوی برنامه‌ی خطی برای یافتن عدد رنگی و تابع مربوطه[6] ارائه شده است.

کلمات کلیدی: نظریه فازی، نظریه گراف، رنگ آمیزی گراف، بهینه سازی، مسائل زمان‌بندی.

[1] -Exam scheduling
[2] -Interval coloring
[3] -Traffic problem
[4] -Chromatic number
5- Circular coloring

فهرست مطالب

فصل اول: کلیات تحقیق

۱-۱ تاریخچه رنگ آمیزی گراف ۴

۱-۲ تاریخچه گراف فازی ۴

۱-۲-۱ مجموعه‌های فازی ۵

۱-۲-۲ گراف‌های فازی ۷

۱-۳ تاریخچه رنگ آمیزی گراف فازی ۷

۱- ۴ ضرورت تحقیق ۸

۱-۵ ساختار تحقیق ۱۰

فصل دوم: مفاهیم گراف و رنگ آمیزی رأسی گراف

مقدمه ۱۲

۲-۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای گراف ۱۴

۲-۲ تعاریف و مفاهیم رنگ آمیزی رأسی گراف ۱۷

۲-۳ رنگ آمیزی بازه‌ای گراف قطعی ۱۷

۲-۴ رنگ آمیزی دوری گراف قطعی ۱۹

فصل سوم : مفاهیم رنگ آمیزی گراف فازی

مقدمه ۲۱

۳-۱ روابط فازی و گراف فازی ۲۲

۳-۲ رنگ آمیزی گراف فازی با رئوس قطعی و یال فازی ۲۳

۳-۲-۱ کاربردی از مسئله عدد رنگی گراف فازی ۲۶

۳-۳ رنگ آمیزی گراف فازی با رئوس و یال فازی ۲۹

۳-۴ رنگ آمیزی توسعه یافته از گراف فازی ۳۲

فصل چهارم : رنگ آمیزی مجموع با رنگ‌های فازی

مقدمه.....۳۴

۴-۱ رنگ آمیزی مجموع برای گراف قطعی ۳۶

۴-۲رنگ آمیزی مجموع با رنگ‌های فازی برای گراف قطعی

۴-۲-۱ رنگ‌های فازی ۳۸

۴-۲-۲ مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی ارزش فازی ۳۹

۴-۳ رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته با رنگ‌های فازی ۳۹

۴-۳-۱ مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی توسعه یافته ارزش فازی برای گراف فازی.....۴۱

۴-۴ زمینه کاربردی (مسئله زمان بندی امتحان) ۴۱

۴-۴-۱ مسئله زمان بندی امتحان.....۴۲

۴-۴-۲ مسئله زمان بندی فازی امتحان.....۴۵

۵-۴ مقایسه رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته و رنگ آمیزی توسعه یافته با رنگ‌های فازی.....۴۶

فصل پنجم: رنگ آمیزی دوری و بازه‌ای گراف وزن دار فازی

مقدمه.....۴۸

۵-۱ رنگ آمیزی بازه‌ای گراف وزن دارقطعی.....۴۹

۵-۲ رنگ آمیزی بازه‌ای گراف فازی.....۵۰

۵-۳ رنگ آمیزی فازی بازه‌ای گراف وزن دار فازی.....۵۳

۵-۴ .رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) گراف وزن دارفازی.....۶۰

۵-۵ ارائه الگوریتم برای حل مسئله رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های فازی

۵-۵-۱ مقدمه.....۶۲

۵-۵-۲ شروع الگوریتم..... ۶۴
۵-۵-۳ آزمایشات محاسباتی..... ۶۷
۵-۶ رنگ آمیزی دوری از گراف وزن دار قطعی ۶۸
۵-۶-۱ الگوی رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های وزندار ($G=(V,E,W$)..... ۶۹
۵-۶-۲ الگوی رنگ آمیزی دوری گراف‌های وزن دار ($G=(V,E,W$)..... ۶۹
۵-۷ رنگ آمیزی دوری (In, f) از گراف فازی..... ۷۰
۵-۷-۱ الگوی رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f)..... ۷۰
۵-۷-۲ الگوی رنگ آمیزی دوری (In, f)از گراف های فازی..... ۷۲
نتایج..... ۷۴
پیوست..... ۷۷
منابع..... ۸۰

فهرست اشکال

شکل ۳-۱ –جریان ترافیک برای مثال ۳-۲-۱..... ۲۴

شکل ۳-۲-گراف فازی برای مثال ۳-۲-۱..... ۲۵

شکل ۳-۳-گراف قطعی برای مثال ۳-۲-۱..... ۲۵

شکل ۳-۴ -گراف فازی برای مثال ۳-۴-۱..... ۳۱

شکل ۴-۱-گراف فازی برای مثال ۴-۴-۲..... ۴۴

شکل ۵-۱ -گراف برای مثال ۵-۴-۲..... ۵۸

فهرست جداول

جدول ۲-۱-رنگ آمیزی دوری گراف C_5.....۱۸

جدول ۳-۱-بدست آوردن $\alpha, E_\alpha, \chi_\alpha, C_\alpha^{\chi_\alpha}$ برای مثال ۳-۲-۱.....۲۶

جدول ۴-۱- مقایسه رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته با رنگ آمیزی توسعه یافته ۴۶

جدول ۵- ۱-آزمایش سزعت الگوریتم با مرتب سازی رئوس بر اساس زیر گراف کامل.....۶۵

جدول ۵- ۲-آزمایش سرعت الگوریتم بر اساس مرتب سازی وزن رئوس.....۶۶

جدول ۵-۳-تابع رنگ آمیزی دوری از گراف وزن دار دوری.....۷۲

فصل اول

کلیات تحقیق

۱-۱- تاریخچه رنگ آمیزی گراف

مفهوم گراف در سال ۱۷۳۶ توسط لئونارد اویلر با طرح راه حلی برای مسئله پل کونیسبرگ[1] ارائه شد و به تدریج توسعه یافت. گراف‌ها امروزه کاربرد زیادی در برخی علوم دارند. از گراف‌ها در شبکه‌ها، طراحی مدارهای الکتریکی، آنالیزسیستم‌ها، اقتصاد، حمل و نقل، تحقیق در عملیات، اصلاح مسیر خیابان‌ها و برای حل مشکل ترافیک و.... استفاده می‌کنند.

رنگ آمیزی گراف یکی از مهمترین مسائل بهینه سازی ترکیبیات است، بسیاری از مسائل کاربردی مورد مطالعه، می‌تواند به عنوان مسائل رنگ آمیزی، مدل بندی شود. فرم عمومی این مسائل، مستلزم تشکیل یک گراف با رئوسی که نماینده‌ی بخش‌های مورد مطالعه و یال‌ها، ارتباط دهنده‌ی بین این بخش‌ها است. تاریخچه رنگ آمیزی گراف از مسئله چهار رنگ[2]است، به این صورت که آیا می‌توان کشورهای هر نقشه را با حداکثر چهار رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که دو کشور با مرز مشترک رنگ یکسان نگیرند [۱].

این مسئله توسط فرانک گاثری[3] در سال ۱۸۵۲ مطرح گردید و بار اول در سال ۱۸۷۹ توسط کمپ[4] اثبات گردید که اثبات وی در سال ۱۸۹۰ توسط هی‌وود[5]رد گردید و سرانجام در سال ۱۹۷۷ توسط دانشمندانی چون اپل[6]، هاکن[7]، کچ[8] اثبات گردید [۲].

اساس مسئله رنگ آمیزی گراف، دسته بندی رئوس گراف است به بخش‌های کوچک، با این محدودیت که رأس‌های ناسازگار در یک گروه یکسان قرار نگیرند.

گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید، یک تابع رنگ آمیزی، یک نگاشت $C:V\to N$ است که $C(i)$ رنگ رأس i است به این صورت که دو رأس مجاور، نمی‌توانند رنگ یکسان بگیرند یعنی اگر $\{i,j\}\in E$ آنگاه

[1]-Konigsberg bridge
[2]-Color four problem
[3]-F.Gathree
[4]-Kempe
[5]-Heawood
[6]-Appel
[7]-Haken
[8]-Koch

$C(i)\neq C(j)$ که رئوس i , j رئوس ناسازگار نامیده می‌شود. k-رنگ آمیزی C^k، یک تابع رنگ آمیزی با حداکثر k رنگ مختلف به صورت زیر است:

$$C^k : V \to \{1,...,k\}$$

یک گراف، k–رنگ پذیر[1] است اگر یک k-رنگ آمیزی را بپذیرد، مینیمم مقدار k که G، k-رنگ پذیر باشد عدد رنگی G نامیده می‌شود و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود [۲].

همچنین دو نوع دیگر از رنگ آمیزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

رنگ آمیزی یالی[2]: k–رنگ آمیزی یالی G، تخصیص k رنگ k ،...،۳،۲،۱ به یال‌های G به طوری که یال‌های متلاقی، همرنگ نباشند [۳].

رنگ آمیزی کلی[3]: k –رنگ آمیزی کلی G، تخصیص k رنگ k ،...،۳،۲،۱ به رئوس و یال‌های G به طوری که رئوس مجاور و یال‌های متلاقی و یال‌های متصل به رئوس، رنگ یکسان نگیرند [۳].

مسئله رنگ آمیزی گراف[4] شامل یافتن عدد رنگی گراف و تابع رنگ آمیزی مربوطه است. این مسئله از مسائل Np-سخت است [۴].

بخشی از کاربردهای مسئله رنگ آمیزی در علوم مدیریت است. کاربردهای معمولی شامل سیم کشی مدارهای چاپی، تخصیص منابع، مسئله تخصیص فرکانس و انواع گوناگونی از مسائل زمان بندی و تخصیص ثبات کامپیوتر می‌باشد [۲]. در این مسائل هدف، مینیمم کردن تعداد رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس گراف است به طوری که رئوس مجاور رنگ‌های متفاوتی می‌گیرد و رئوس، نماینده‌ی بخش‌های معین است. در بعضی از شرایط، مدل بندی برخی مسائل، برای رنگ آمیزی، پیچیده است و روش‌های مرسوم برای حل آن بعضاً ناکارامد و محدود است و نیازمند استفاده از ابزارهای دیگر است.

---

[1]-k -colored
[2]-Edge coloring
[3]-Total coloring
[4]-Graph coloring problem

یک توسیع از مسائل رنگ آمیزی روی مفهوم ناسازگاری بین رئوس گراف است. دو رأس i, j سازگار است اگر $\{i, j\} \notin E$ و ناسازگار است اگر $\{i, j\} \in E$ به هر حال در بسیاری از موقعیت‌های واقعی این ناسازگاری قطعی نیست و ناسازگاری می‌تواند درجات مختلفی داشته باشد و در حالت قطعی درجه شدت رئوس گراف صفر یا یک است که این درجه شدت در بسیاری از موقعیت‌های واقعی می‌تواند سطوح مختلفی داشته باشد.

این تحقیق روی مفهوم تئوری مجموعه‌های فازی بنا نهاده شده است.

۱-۲ - تاریخچه گراف فازی

در این زیرقسمت مفهوم مجموعه فازی و تاریخچه گراف‌های فازی بیان می‌شود و نحوه نمایش مجموعه فازی و انواع گراف فازی مورد استفاده در این تحقیق، مورد بحث واقع شده است.

۱-۲-۱ مجموعه های فازی

مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه X، مجموعه‌ای از زوج مرتب به صورت $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$ است که X مجموعه مرجع و ناتهی است و $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ تابع عضویت[1] است که درجه تعلق x به A است [۲].

هر مجموعه، یک صفت مشخص کننده مربوط به خود را دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه، صفت مشخص کننده مجموعه است و هر عنصر اگر دارای آن صفت باشد عضو مجموعه و در غیر این صورت خارج از مجموعه است. این معیار عضویت را تابع عضویت می‌نامیم و با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان می‌دهیم، که در صورت تعلق x به A این مقدار یک و در غیر این صورت صفر است. در منطق قطعی ارزش هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد که کامپیوتر آن را با یک و صفر نشان می‌دهد [۵].

[1]-Membership function

در زندگی روزمره، وقایع و حوادث را توسط گزاره‌هایی مثل "امروز هوا ابری است"، " امروز من ساعت ۴ می‌آیم"و... بیان می‌کنیم. در این موارد تابع عضویت نمی‌تو.اند به صورت صفر و یک عمل کند، تا چه حد هوا ابری است، مثلا یک روز آسمان کاملا ابری باشد تابع عضویت ابری بودن را یک می‌گیریم اگر کاملا صاف باشد درجه ابری بودن را صفر می‌گیریم، اما اگر یک روز نیمه ابری باشد آنگاه نمی‌توانیم از منطق قطعی استفاده کنیم مجبوریم یک درجه عضویت بین صفر و یک، به میزان ابری بودن بدهیم [۵].

در مدل بندی سیستم‌های پیچیده در دنیای واقعی ممکن است اطلاعات ما دقیق نباشد. یعنی برخی اطلاعات مربوط به مسئله معین نیست، که در این سیستم‌ها استفاده از تئوری فازی می تواند کارساز باشد.

در تئوری فازی به طور کلاسیک مجموعه‌ی سطح شدت I به صورت بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف می‌شود به طوری که $\mu_A(x)=0$ نشان دهنده‌ی عدم تعلق x به A است و $\mu_A(x)=1$ نشان دهنده‌ی تعلق اکید x به A است و هر مقدار میانه با یک درجه‌ی عضویت به A متعلق است، به هر حال مجموعه I می‌تواند یک مجموعه گسسته به صورت $I=\{0,1,...,k\}$ متشکل از k صفت بیانی باشد. عبارت $\mu_A(x) \prec \mu_A(x')$ نشان می‌دهد درجه عضویت x به A از درجه عضویت x' به A کمتر است، به طور کلی مجموعه I می‌تواند هر مجموعه‌ی مرتب نه لزوما عددی باشد برای مثال I می‌تواند به صورت: $I=\{$کلی ,قوی ,متوسط ,ضعیف ,پوچ$\}$ یا به طور معادل $I=\{n,l,m,h,t\}$ باشد [۲].

۱-۲-۲ گراف‌های فازی

اولین تعریف از گراف فازی توسط کافمن[1] (۱۹۷۷) پیشنهاد شد که مبتنی بر روابط فازی بیان شده

[1] Koefman

توسط لطفی زاده (۱۹۷۵) بود، همچنین رزنفلد[1] (۱۹۷۶) تعریفات شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را بیان کرده بود [۱]. از آن پس در بسیاری از کتاب‌ها و مقالات در مورد گراف‌های فازی بحث شد و بدین گونه گراف‌ها به عنوان یکی از پر کاربردترین ابزار حل مسائل بهبود یافت و بسیاری از مسائل بهینه سازی توسط گراف‌های فازی مورد مطالعه قرار گرفت [۶].

یک نوع از گراف فازی به این صورت است که مجموعه یال‌های آن فازی و رئوس آن غیر فازی باشند. نمایش این گراف به صورت $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$ است، به طوری که V مجموعه رئوس قطعی و $\widetilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است که به وسیله ماتریس $\mu = (\mu_{ij})_{i,j \in V}$ مشخص می‌شود:

$$\mu_{ij} = \mu_{\widetilde{E}}(\{i, j\}) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j$$

$\mu_{\widetilde{E}} : V \times V \to I$ یک تابع عضویت یال‌های فازی گراف است، هر عضو $\mu_{ij} \in I$ سطح شدت یال $i, j\}$ برای هر $i, j \in V$ را نشان می‌دهد که $i \neq j$، این نوع گراف فازی را به صورت $\widetilde{G} = (V, \mu)$ هم نشان می‌دهند. در این گراف‌ها شدت رئوس قطعی و صفر یا یک است و ارزش همه رئوس یکسان است و سطح شدت تعلق یال‌ها به رئوس از داخل مجموعه سطح شدت I است. در این نوع گراف‌ها اگر رئوس گراف وزن دار باشد گراف فازی وزن‌دار را به صورت $\widetilde{G} = (V, \mu, W)$ نمایش می‌دهیم. نوع دیگری از گراف فازی که در آن مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها هر دو فازی هستند به صورت $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ نمایش می‌دهیم، به طوری که $\widetilde{V}$ مجموعه رئوس فازی و $\widetilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است که ماتریس آن بیان شد، مجموعه رئوس فازی $\widetilde{V}$ به وسیله بردار $\sigma = (\sigma_i)_{i \in V}$ مشخص می‌شود:

$$\sigma_i = \sigma_{\widetilde{V}}(i) \quad \forall i \in V$$

$\sigma_{\widetilde{V}} : V \to I$ تابع عضویت رئوس فازی گراف است. هر عضو σ_i نشان دهنده‌ی سطح شدت رأس $i \in V$ است، این نوع گراف فازی را به صورت $\widetilde{G} = (\sigma, \mu)$ هم نشان می‌دهند.

[1] Rosenfeld

مجموعه سطح شدت I به طور خطی مرتب شده است به طوری که عبارت $\mu_{ij} \prec \mu_{i'j'}$ یعنی سطح شدت یال $\{i,j\}$ از سطح شدت یال $\{i',j'\}$ پایین تر است و عبارت $\sigma_i \prec \sigma_{i'}$ یعنی سطح شدت رأس i از سطح شدت رأس i' پایین تر است.

گراف فازی $\widetilde{G} = (\sigma, \mu)$ تعمیمی از یک گراف قطعی $G=(V,E)$ است که در آن $I=\{۰, ۱\}$ و μ, σ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & if \quad i \in V \\ 0 & o.w \end{cases} \quad و \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad \{i,j\} \in E \\ 0 & otherwhere \end{cases}$$

۱-۳-تاریخچه رنگ آمیزی گراف‌های فازی

با توجه به اینکه قدمت گراف فازی کمتر از ۴ دهه می‌باشد و یک موضوع جدید تلقی می‌شود رنگ آمیزی این گراف‌ها موضوع بسیار جدیدی است. اولین بار این رنگ آمیزی توسط نویسندگانی چون اصلاحچی و اونق (۲۰۰۴) تحت عنوان رنگ آمیزی فازی گراف فازی مطرح گردید و این موضوع در سال ۲۰۰۵ به طور خاص تر تحت عنوان رنگ آمیزی گراف های فازی توسط نویسندگانی چون مونز[۱]-اورتینو[۲]-رامیرز[۳] و یانز[۴] ارائه شد و تا کنون این رنگ آمیزی از جنبه‌های گوناگون مورد توجه واقع شده است [۲].

[1] -Munez
[2] -Ortuno
[3] -Ramirez
[4] -Yanez

۱- ۴- ضرورت تحقیق

اساس کار در رنگ آمیزی رأسی گراف که مبحث این تحقیق می‌باشد دسته بندی کردن رئوس است به طوری که رئوسی که در هر دسته قرار می‌گیرند با یکدیگر سازگار باشند و تعداد دسته‌ها حداقل باشد. رئوس و ناسازگاری در مدل گراف می‌تواند هر چیزی باشد که بستگی به مسئله مورد بررسی دارد. مثلا در مسئله زمان بندی امتحان، رئوس گراف، امتحان و درجه یا شدت سخت بودن امتحان، درجه ناسازگاری آن است و در مسئله چراغ ترافیک، مسیرهای ترافیکی، رئوس گراف و برخورد دو مسیر ترافیکی یال ناسازگار ایجاد می‌کند و بسیاری از مسائل رنگ آمیزی دیگر. در برخی از این مسائل استفاده از مدل گراف قطعی برای رنگ آمیزی بسیار محدود کننده است.

در رنگ آمیزی گراف، رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس، ممکن است رنگ زمان یا مکان یا چیزهای دیگری باشد. اگر در یک رنگ آمیزی، رنگ نشان دهنده‌ی زمان باشد، رنگ آمیزی با عنوان مسائل زمان بندی[۱] مطرح می‌شود. اگر زمان به صورت مدت دار و پویا باشد آنگاه با رنگ آمیزی بازه‌ای سرو کار داریم که به هر رأس، یک مدت زمان تخصیص می‌دهد به طوری که رئوس مجاور، تداخل نداشته باشند.

در این تحقیق به دو مسئله از مسائل زمان بندی می‌پردازیم. در رنگ آمیزی بازه‌ای، هدف پیدا کردن طول مدت زمانی است که عمل تمام رئوس در آن مدت زمان، یک بار انجام شود. اگر مدل مورد بررسی تکرار پذیر باشد آنگاه رنگ آمیزی دوری نتیجه بهتری می‌دهد که این مبحث با مفهوم رنگ آمیزی ستاره‌ای[۲] در سال ۱۹۸۸ توسط وینس[۳] معرفی شد.

[1]-Scheduling problem
[2]-Star coloring
[3]-Vince