بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشکده علوم پایه

تأییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم/ آقای **مریم افرا** رشته **فیزیک** تحت عنوان: « **مطالعه جوابهای تک قطبی مغناطیسی در نظریه میدان های ابر متقارن** » را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ‌کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکترعلی ایمانپور	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر شاهرخ پرویزی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر رضا عباسپور	استادیار	
٤- استاد ناظرخارجی	دکتر محمد نوری زنوز	دانشیار	
٥-نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر شاهرخ پرویزی	استادیار	

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه-های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **مریم افرا** دانشجوی رشته **فیزیک** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۷** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم پایه** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آیین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هرگونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هرگونه اعتراض را از خود سلب نمودم ».

امضا

تاریخ

۹۰/ ۱۰/ ۱۲

آیین نامهٔ چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی – پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به دفتر «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته **فیزیک** است که در سال **۱۳۹۰** در دانشکده **علوم پایه** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی **آقای دکتر علی ایمان‌پور** از آن دفاع شده است».

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیهٔ کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶: اینجانب **مریم افرا** دانشجوی رشته **فیزیک** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مریم افرا

تاریخ و امضاء:

۹۰/۱۰/۱۲

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک گرایش ذرات بنیادی

مطالعه جواب‌های تک قطبی مغناطیسی در نظریه میدان‌های ابر متقارن

مریم افرا

استاد راهنما

دکتر علی ایمان‌پور

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به:

تمام کسانی که دوستشان دارم

تشکر و قدردانی:

از جناب آقای دکتر ایمان‌پور که راهنمایی این تحقیق را بر عهده داشتند و با راهنمایی‌های صبورانه و ارزشمندشان موجب به ثمر رسیدن این تحقیق گردیدند کمال تشکر و قدردانی رادارم.

چکیده:

موضوع تک قطبی مغناطیسی در سال‌های اخیر از اهمیت قابل توجهی برخوردار شده است و هر بار با دیدگاه جدیدی مورد بررسی قرار گرفته است. جذابیت کنونی تک قطبی‌های مغناطیسی حول ایده‌ی دوگانی الکترومغناطیس متمرکز شده است.

قبول این نظریه که طبیعت متقارن است امروزه منجر به دستاوردهایی از قبیل نظریه‌ی میدان‌های پیمانه‌ای و نظریه میدان‌های ابر متقارن در حوزه بنیادی گردیده است. در نظریه میدان‌های پیمانه‌ای فرضیه‌ای که بیشتر از همه مورد توجه قرار گرفته به وسیله مکانیزم هیگز بررسی شده است، تک قطبی توفت-پولیاکف نام دارد. در سال ۱۹۹۴ سایبرگ و ویتن موفق شدند که یکی از مدل‌های نظریه میدان ابر متقارن را برای اولین بار به صورت دقیق حل کنند. در این مطالعه تک قطبی‌های مغناطیسی نقش اساسی بازی می‌کردند. مطالعه رفتار تک قطبی‌های مغناطیسی تحت تقارن‌ها یکی از عناصر مهم در ساختن لاگرانژی موثر و نهایتاً حل این مدل می‌باشد. آنها حیات دوباره‌ای به سمت شناخت ویژگی‌های تک قطبی‌های ابر متقارن ایجاد کرده‌اند و سهم زیادی در درک دینامیک غیر اختلالی در این نظریه‌ها داشته‌اند.

در این پایان‌نامه مباحث زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

سالیتون‌های یک بعدی(۱+۱) و دو بعدی(۲+۱)، نظریه‌های میدان پیمانه‌ای، تک قطبی‌های مغناطیسی در نظریه آبلی و غیر آبلی، ساختار نظریه یانگ میلز ابر متقارن و در نهایت تک قطبی‌های مغناطیسی در نظریه میدان‌های ابر متقارن N=2.

واژگان کلیدی: تک قطبی مغناطیسی، دوگانگی الکترومغناطیس، نظریه میدان‌های پیمانه‌ای، مکانیزم هیگز، سالیتون، نظریه میدان‌های ابر متقارن، آبلی، غیر آبلی

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول: مقدمه ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- محتوای رساله ۵

فصل دوم: مفاهیم ۶

۲-۱- هوموتوپی و گروه‌های هوموتوپی ۷

۲-۲- سالیتون ۸

۲-۲-۱- سالیتون در یک بعد(کینک) ۱۱

۲-۲-۲- سالیتون در دوبعد(خطوط گردابه) ۱۴

۲-۳- نظریه‌های میدان پیمانه‌ای ۲۰

۲-۳-۱- ناوردایی پیمانه‌ای موضعی ۲۰

۲-۳-۲- جمله‌ی جرمی ۲۳

۲-۳-۳- شکست خودبه خود تقارن ۲۷

فصل سوم: تک قطبی مغناطیسی در نظریه‌ی میدان‌های آبلی ۳۰

۳-۱- دوگانگی میدان الکتریکی- مغناطیسی ۳۱

۳-۲- یک توجیه نیمه کلاسیکی از کوانتش بار ۳۵

۳-۳- تک قطبی دیراک ۳۷

۳-۴- پتانسیل برداری تک قطبی دیراک ۴۱

۳-۵- ریسمان دیراک ۴۳

۳-۶- تک قطبی آبلی وو-یانگ ۴۵

فصل چهارم: تک قطبی مغناطیسی در نظریه میدان‌های غیر آبلی ۴۸

۴-۱- مدل جورجی گلاشو: یک نظریه ساده با تک قطبی‌ها ۴۹

۴-۲- تک قطبی توفت-پولیاکف ۵۲

۴-۳- طبیعت توپولوژیکی بار مغناطیسی ۵۳

۴-۴- شرط بوگومولنی و حالات BPS ۵۶

فصل پنجم: تک قطبی مغناطیسی در نظریه‌ی میدان‌های ابر متقارن ۵۹

۵-۱- ابر تقارن چیست؟ ۶۰

۵-۲- گروه پوآنکاره و جبر مولدها ۶۱

۵-۲-۱- جبر مولدهای ابر تقارن ۶۶

۵-۳- نمایش موضعی ابرتقارن ۶۹

۵-۳-۱- ابر فضا N=1 ..... ۷۰

۵-۳-۲- ابر میدان‌های N=1 ..... ۷۴

۵-۳-۳- لاگرانژی ابرمتقارن N=1 ..... ۷۸

۵-۳-۴- لاگرانژی ابر متقارن N=2 ..... ۸۲

۵-۳-۵- ساخت تک قطبی‌های SU(2) ابر متقارن N=2 ..... ۸۴

فهرست منابع و مآخذ ۸۸

چکیده انگلیسی ۹۰

فهرست اشکال و جداول

عنوان صفحه

شکل (۲-۱) تغییرات میدان مغناطیسی و اسکالر با توجه به جواب نیلسن و اولسون ۱۹

شکل (۲-۲) جمله‌های مرتبه بالاتر جفت شدگی ۲۴

شکل (۲-۳) نمودار $U(\phi)$ معادله (۲-۷۲) ۲۶

شکل (۲-۴) شکست خودبه خود تقارن در یک نوار پلاستیکی ۲۷

شکل (۲-۵) تابع پتانسیل ۲۸

شکل (۲-۶) پنج جفت شدگی ۲۹

شکل(۳-۱) تک قطبی دیراک ۳۹

شکل (۳-۲) ریسمان دیراک ۴۰

شکل (۳-۳) میدان مغناطیسی پتانسیل دیراک ۴۴

شکل (۳-۴) ریسمان دیراک ۴۵

شکل (۳-۵) تعریف دو نیم کره R^N و R^S روی فضای $R^3/\{0\}$ ۴۶

جدول (۴-۱) ۵۲

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

موضوع تک قطبی مغناطیسی در سال‌های اخیر از اهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردار شده است و هر بار با دیدگاه جدیدی مورد بررسی قرار گرفته است. جذابیت کنونی تک قطبی‌های مغناطیسی حول ایده دوگانی الکترومغناطیس متمرکز شده است. دیراک[۱] در سال ۱۹۳۱ وجود ذراتی را پیشنهاد کرد که به طور ذاتی منبع تولید میدان مغناطیسی هستند و از این رو نام آنها را تک قطبی مغناطیسی گذاشت. منظور از تک قطبی مغناطیسی ذراتی مشابه ذرات باردار الکتریکی است. همان‌گونه که ذرات باردار الکتریکی منبع تولید میدان الکتریکی هستند، تک قطبی مغناطیسی هم منبع تولید میدان مغناطیسی می‌باشد. این ذرات در حال سکون میدان مغناطیسی شعاعی متناسب با عکس مجذور فاصله را تولید می‌کنند:

$$\vec{B} = g\,\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (۱-۱)$$

قبول این نظریه که طبیعت متقارن است امروزه منجر به دستاوردهایی از قبیل نظریه میدان‌های پیمانه‌ای[۲]، ابرتقارن و نظریه‌های وحدت بخش بخصوص در حوزه ذرات بنیادی گردیده است. معادلات ماکسول میدان الکتریکی و مغناطیسی را با هم متحد می‌کنند. علی‌رغم این‌که معادلات ماکسول موفق بودند، دیراک پی برد که این معادلات متقارن نیستند. در معادلات ماکسول وقتی چگالی بار و چگالی جریان صفر باشد، این معادلات متقارن هستند. اما با حضور چگالی جریان الکتریکی، لازمه‌ی متقارن بودن این معادلات وجود تک قطبی مغناطیسی است. باید بار مغناطیسی شبیه بار الکتریکی وجود داشته باشد تا معادلات ماکسول متقارن شوند. پس اولین معادله ماکسول به صورت $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \neq 0$ تغییر می‌کند. با استفاده از قضیه‌ی استوکس می‌توان آن را به صورت

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} \neq 0$ (S سطح گوسی که میدان B از آن می‌گذرد) نوشت. بنابراین نتیجه می‌گیریم درون سطح گوسی یک چشمه وجود دارد که آن را تک قطبی مغناطیسی می‌نامیم.

دیراک می‌دانست که برای آشکار سازی این ذرات باید تنها از راه نسبیت وارد شود. او قصد داشت با معادلات کوانتومی دیدی کاملاً نسبیتی از الکترومغناطیس به دست بیاورد. او نشان داد که از مکانیک کوانتومی نمی‌توان استفاده کرد چراکه حتی اگر تک قطبی مغناطیسی در دنیا وجود داشته باشد باید دارای بار کوانتیده باشد. بدین منظور باید واحدی نیز وجود می‌داشت. دیراک با نگاهی جدید سعی در شناخت مساله کرد و با انجام اعمال بسیار پیچیده در ریاضی و با استفاده از تابع دلتای دیراک دریافت که واحد بار کوانتیده باید عکس بار بنیادین الکتریکی باشد.

دیراک در تمام این محاسبات ذره‌ی فرضی را الکترون در نظر گرفته بود و لازم بود که فضا-زمان را از یکدیگر جدا کنید. توپولوژی فضا-زمان در حالت عادی R^4 می‌باشد اگر زمان را از آن حذف کنیم توپولوژی آن برابر کره S^3 خواهد شد. او برای انجام محاسبات ریسمان دیراک[1] را به‌وجود آورد. رفتار این ریسمان تقریباً همانند سیم پیچ در اثر آهانروف-بوهم[2] بود. به دلیل بیان تمام این مطالب جدید تئوری‌های دیگری که در راس آنها نظریه‌ی میدان پیمانه‌ای[3] قرار داشت، سعی در شناخت ساده‌تر بار کوانتیده کردند.

در نظریه میدان پیمانه‌ای فرضیه‌ای که بیشتر از همه مورد توجه قرارگرفت، تک قطبی توفت-پولیاکف[4] نام داشت. در فیزیک نظری تک قطبی توفت-پولیاکف یک سالیتون با بار توپولوژیک شبیه به تک قطبی دیراک است با این تفاوت که در تک قطبی‌های توفت-پولیاکف هیچ گونه تکینگی وجود ندارد[۳]. همچنین ما می‌توانیم جواب‌های تک قطبی مغناطیسی را در نظریه میدان‌های ابر متقارن ببینیم.

نظریه میدان‌های ابر متقارن نه تنها نقش مهمی در توسعه فیزیک نظری داشته بلکه در سه دهه‌ی اخیر تاثیر عمیقی بر روی فیزیک ذرات بنیادی تجربی داشته است. به نظر می‌رسد نظریه ابر متقارن در دهه‌ی هفتاد همزمان با نظریه ریسمان ظاهر شده است و در آن زمان بیشتر به عنوان ابزار نظری

1- Dirac String
2- Aharnov-Bohm effect
3- Gauge theory
4- t'Hooft-Polyakov

خالص در نظر گرفته شده است. محققین در اندک زمانی متوجه شدند که می‌توان گروه ابر تقارن را به صورت یک تقارن برای نظریه کوانتومی میدان در نظر گرفت و آن را در مطالعه فیزیک ذرات بنیادی به کار گرفت. در نظریه‌های کوانتوم مکانیک دو طبقه بندی متفاوت از ذرات وجود دارد که شامل بوزون‌ها و فرمیون‌ها می‌شود. یکی از خواص مهم ابر تقارن این است که با استفاده از تبدیلات تقارنی فرمیون‌ها و بوزن‌ها را می‌توان به یکدیگر مربوط کرد؛ به عبارت دیگر نمایش‌های کاهش ناپذیر گروه ابرپوآنکاره بوزن‌ها و فرمیون‌ها را در خود جای می‌دهد[۴]. نظریه میدان‌های ابر متقارن چارچوب بسیار خوبی برای نمایان ساختن بسیاری از ویژگی‌های تک قطبی‌ها از یک نقطه نظر خاص هستند. اگرچه تک قطبی مغناطیسی مدل ابر متقارن یانگ-میلز-هیگز ساده در ۱۹۷۸ مورد بحث قرار گرفت ولی دوباره توسط سایبرگ-ویتن مورد مطالعه قرار گرفت. بعد از مدتی نظریه‌ی میدان پیمانه‌ای و کوانتومی سعی کردند که با یکدیگر نظریه‌ی واحدی را بیان کنند و به همین ترتیب نظریه وحدت بزرگ(GUT[1]) مطرح شد. این نظریه وجود ذره‌ای با تک قطبی مغناطیسی را پیش‌بینی می‌کند. طبق این مدل تک قطبی مغناطیسی ذره‌ای است که بار الکتریکی صفر و عدد لپتونی یک دارد. این بدان معناست که تک قطبی مغناطیسی مانند الکترون نباید واپاشی داشته باشد و تجزیه شود. همچنین این مدل طبق معادلات فریدمان[2] بیان می‌کند که چگالی ذرات تک قطبی در دنیای ما حدوداً باید 10^{11} برابر چگالی چرخشی باشد. بنابراین بایدبه طور متداول در دنیای ما قابل رصد باشد (در بین هر 10^{29} ذره یک تک قطبی باید دیده شود). گرچه پیش‌بینی می‌شود این ذرات ارتباط زیادی با بوزون‌های Yو X داشته باشند و محدوده‌ی جرم آنها در آزمایشات $10^{17}Gev/c - 600Gev/c$ تعیین شده است، اما از آنجا که آشکار سازی این نوع از بوزون‌ها حتی در آزمایشگاه بزرگ CERN به دلیل جرم زیادشان امکان ناپذیر می‌باشد هنوز این پدیده در حد یک فرض باقی مانده است. نظریه ابر ریسمان نیز وجود ذره‌ای با تک قطبی مغناطیسی را پیش‌بینی می‌کند. گرچه تا به حال ذره تک قطبی مشاهده نشده است و دقیقاً بر همین مبنا مدل‌های کیهان‌شناسی پیش‌بینی می‌کنند که از این ذرات بعد از بیگ بنگ تنها باید تعداد کمی باقی مانده باشد.

1- Grand Unified Theory
2- Freidman Equation

۱-۲- محتوای رساله

در این پایان‌نامه قصد داریم به مطالعه‌ی جواب‌های تک قطبی مغناطیسی در نظریه‌ی میدان پیمانه‌ای و نظریه‌ی میدان ابر متقارن بپردازیم. جواب‌های تک قطبی مغناطیسی به عنوان جوابهای کلاسیک غیر اختلالی نظریه میدان مطرح می‌شوند. در فصل دوم به مفاهیم هوموتوپی، سالیتون، نظریه‌های میدان پیمانه‌ای پرداخته می‌شود. در فصل سوم به مطالعه‌ی تک قطبی مغناطیسی در نظریه‌های میدان آبلی می‌پردازیم. در فصل چهارم نیز مروری بر تک قطبی‌های مغناطیسی در نظریه‌های میدان غیر آبلی خواهیم داشت. در این فصل تک قطبی توفت-پولیاکف در مدل جورجی-گلاشو و طبیعت توپولوژیکی بار مغناطیسی مطالعه خواهد شد. در فصل پنجم جواب‌های تک قطبی مغناطیسی در نظریه‌ی میدان‌های ابر متقارن N=۲، بررسی می‌شود. در این فصل ابتدا به مطالعه‌ی ساختار نظریه‌ی یانگ-میلز ابر متقارن می‌پردازیم و پس از آن مروری بر تک قطبی‌های مغناطیسی در نظریه‌ی نیانگ-میلز ابر متقارن N=۲ خواهیم داشت.

فصل دوم

مفاهیم

۲-۱- هوموتوپی و گروه‌های هوموتوپی [۵]

یکی از مفاهیمی که در این تحقیق با آن روبه رو خواهیم شد، هوموتوپی و گروه‌های هوموتوپی می‌باشد. به همین منظور مروری گذرا بر این مفهوم خواهیم داشت.

دو فضای توپولوژیک X و Y را در نظر می‌گیریم. فرض کنید نگاشتی مانند $\Phi_1(x)$ وجود داشته باشد که:

$$\Phi_1(x):X \to Y \qquad (۱-۲)$$

این نگاشت معکوس ندارد. اگر نگاشت دیگری مانند $\Phi_2(x)$ وجود داشته باشد که:

$$\Phi_2(x):X \to Y \qquad (۲-۲)$$

حال اگر تابع $\Phi_1(x)$ به صورت پیوسته به تابع $\Phi_2(x)$ تبدیل شود در این صورت $\Phi_1(x)$ با $\Phi_2(x)$ هوموتوپیک است که به فرم زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Phi_1(x) \sim \Phi_2(x) \qquad (۳-۲)$$

به صورت دقیق تر می‌توانیم بگوییم:T اگر مجموعه‌ای از توابع پیوسته مانند $F(x,t)$ باشد به گونه‌ای که این توابع روی فضای حاصل ضرب $X \times [0,1]$ به صورت زیر پارامتربندی شده باشند:

$$F:X \times [0,1] \to Y \qquad (۴-۲)$$

و داشته باشیم:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= \Phi_1(X) \\ F(x,1) &= \Phi_2(X) \end{aligned} \qquad (۵-۲)$$

در این حالت هنگامی که پارامتر t بین صفر و یک تغییر کند $t \in [0,1]$، نگاشت $\Phi_1(x)$ به $\Phi_2(x)$ تبدیل می‌شود. می‌توان گفت این دو نگاشت با هم هوموتوپیک هستند.

مجموعه توابع $F(x,t)$ هوموتوپی نامیده می‌شود. هوموتوپی یک رابطه‌ی هم ارزی می‌باشد و فضای نگاشت‌های پیوسته از X به Y را به کلاس‌های هم ارزی تقسیم می‌کند.

دو فضای توپولوژیک X و Y را معادل هوموتوپیک می‌نامیم اگر نگاشت‌هایی مانند f و g وجود داشته باشند که خواص زیر را دارا باشند.

$f : X \to Y$
$g : Y \to X$

$fog \sim I_Y$ (یک نگاشت همانی روی فضای **Y**)
$gof \sim I_X$ (یک نگاشت همانی روی فضای **X**)

در این حالت کلاس‌های هم ارزی تشکیل یک گروه می‌دهند، که به آن گروه هوموتوپی گفته می‌شود.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، مجموعه کلاس‌های هوموتوپی در $x_0 \in X$ با $\Pi_1(X, x_0)$ نمایش داده می‌شود. در این عبارت x_0 نقطه پایه نامیده می‌شود و به گروه حاصل شده، گروه بنیادی مرتبه اول در x_0 می‌گویند.

گروه بنیادی مرتبه اول کلاس‌های هوموتوپی حلقه‌ها را در فضای توپولوژیک دسته بندی می‌کند. به جای کلاس‌های هوموتوپی حلقه‌ها در X می‌توانیم کلاسهای هوموتوپی کره‌ها و یا چنبره‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

یکی از مهم ترین فضاهای توپولوژیک که ما با آن کار می‌کنیم S^n (کره n - بعدی) می‌باشد.

در حالت کلی برای نگاشتی به صورت $S^n \to X$ می‌توانیم گروه هوموتوپی n ام را به صورت $\Pi_n(X)$ تعریف کنیم.

از مفهوم هوموتوپی وگروه‌های هوموتوپی در بحث سالیتون استفاده خواهیم کرد.

۲-۲- سالیتون

در ریاضیات و فیزیک سالیتون یک موج منزوی خود تقویت کننده است که با سرعت ثابت حرکت می‌کند و شکل آن حفظ می‌شود.

سالیتون‌ها به عنوان جواب‌های دسته‌ی گسترده‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی به طور ضعیف غیر خطی و غیر پاشنده مطرح می‌شوند که سیستم‌های فیزیکی را توصیف می‌کنند. سالیتون‌ها باید در برخورد با سالیتون‌های دیگر شکل خود را حفظ کند مگر با یک انتقال فاز.

بسیاری از مدل‌های قابل حل دارای جوابهای سالیتونی هستند؛ از جمله معادله غیر خطی شرودینگر و معادله ساین- گوردون.

یک سالیتون توپولوژیک یا نقص توپولوژیک، جواب دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی است که در مقابل واپاشی به «جواب جزئی» پایدار و مقاوم است. پایداری سالیتونی بواسطه‌ی قیود توپولوژیک است و به مشتق‌پذیری معادلات میدان بستگی ندارد. از آنجا که جواب معادلات دیفرانسیلی باید از دسته‌ای شرایط مرزی تبعیت کنند قیود تقریباً همیشه برآورد می‌شوند و مرز یک گروه هوموتوپی غیربدیهی دارد که با معادلات دیفرانسیل حفظ می‌شوند. از این رو جواب‌های معادله دیفرانسیل را می‌توان به رده‌های هوموتوپی دسته بندی کرد. تبدیل پیوسته‌ای وجود ندارد که جوابی در یک رده هوموتوپی را به رده‌ی دیگری هدایت کند؛ جوابها کاملاً مجزا هستند و حتی در مواجه با نیروهای بینهایت قوی تمامیتشان را حفظ می‌کنند. مثالهایی از سالیتون‌های توپولوژیک در الکترومغناطیس شامل ریسمان دیراک و تک قطبی مغناطیسی است.

جوابهای سالیتونی بسته‌های انرژی جایگزیده و غیر پاشنده هستند. جوابی از معادله میدان را موضعی می‌نامیم که چگالی انرژی آن در هر زمان محدود t در منطقه محدودی از فضا مقدار محدود و در بی نهایت به سمت صفر حرکت کند و در آن ناحیه انتگرال پذیر باشد.

حال به جوابی از معادله میدان غیر خطی که موضعی بوده و خاصیت زیر را داشته باشد، موج انفرادی نامیده می‌شود:

$$\mathcal{E}(x,t)=\mathcal{E}(x-ut) \qquad (۶-۲)$$

به بیان دیگر چگالی انرژی $\mathcal{E}(x,t)$ با سرعت ثابت بدون تغییر باقی بماند.

یک یا چند معادله غیر خطی که جواب موج انفرادی آنها $\mathcal{E}_0(x-ut)$ باشد را در نظر بگیرید؛ اگر N موج انفرادی جواب‌هایی با سرعت‌ها و محل‌های دلخواه یک موج با انرژی $\mathcal{E}(x-ut)$ را تشکیل بدهد، آنگاه: