وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

جواب یک مساله سهموی در ربع صفحه

توسط:
اشرف احسانی ازغندی

استاد راهنما:
دکتر سید امین اصفهانی

استاد مشاور:
دکتر رضا پورقلی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

جواب یک مساله سهموی در ربع صفحه

توسط:

اشرف احسانی ازغندی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش سیستم‌های دینامیکی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر مرتضی ابطحی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر امید سلیمانی فرد دانشیار ریاضی کاربردی گرایش کنترل بهینه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر الهه ظهوریان آزاد استادیار ریاضی کاربردی گرایش نظریه احتمال دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

تقدیم به پدرم به استواری کوه، مادرم به زلالی چشمه، همسرم به صمیمیت باران.

سپاسگزاری

سپاس یگانه بی‌همتایی را که جان را با دانش و حکمت آرائید.

با نهایت تواضع از زحمات اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اصفهانی و جناب آقای دکتر پور قلی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از پدر و مادرم، که حضور بی‌مدعایشان در کمال صداقت و محبت آرامش بخش زندگی‌ام است، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از همسر عزیزم که تکیه گاه محکمی در تمام مراحل زندگی‌ام بوده و هست، سپاس گزارم.

چکیده

جواب یک مساله سهموی در ربع صفحه

به وسیله‌ی:
اشرف احسانی ازغندی

یک مساله رسانش گرمایی معکوس را وقتی که داده‌ها را در $x = ۱$ داشته باشیم، در نظر می‌گیریم. این مساله یک مساله سهموی کناره‌ای نامیده می‌شود و به شدت بد وضع است. روش‌های استانداردسازی تیخونف و فوریه توسعه یافته‌اند، اما این روش‌ها شامل مرز ابتدایی برای جواب‌ها در انتخاب پارامترهایشان هستند. یک مرز تخمینی بزرگ باعث ایجاد نتایج عددی نامناسب می‌شود. در اینجا رده دیگری از روش‌های تکرار نیز برای جواب مساله رسانش گرمایی با ایده گرفتن از روش‌های استانداردسازی تیخونف و فوریه و نیز روش تکرار لندوبر، معرفی می‌شود و ثابت می‌شود که این روش‌ها تحت هر دو قانون توقف استنتاجی و ابتدایی به صورت نمایی همگرا هستند. انتخاب مناسب یک پارامتر در روش تکرار کمک می‌کند تا گام‌های تکراری کاهش یابند و جواب تقریبی رضایت‌بخشی را به دست می‌دهد. به علاوه اگر از قاعده استنتاجی برای توقف گام‌های تکراری استفاده کنیم، می‌توان از انتخاب یک مرز ابتدایی جلوگیری کرد.

واژه‌های کلیدی: مساله رسانش گرمایی معکوس، استانداردسازی، کران ابتدایی، قاعده اختلاف.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

اگر پیشینه دمایی در سطح یک جسم معلوم باشد، در این صورت توزیع دمایی را در کل جسم می‌توان محاسبه کرد. چنین مساله‌ای در اصطلاح یک مساله مستقیم نامیده می‌شود. اما در بسیاری از موارد نیاز داریم که پیشینه دمایی سطح جسم را از روی دمای اندازه‌گیری شده در یک یا چند نقطه درون جسم تعیین کنیم، در این صورت این یک مساله معکوس خواهد بود. به خصوص در طول چند دهه گذشته حالت خاص تقریب زدن شرایط سطحی با استفاده از اندازه‌گیری‌های داخلی به عنوان مساله هدایت حرارتی شناخته شده است.

مسائل معکوس متعددی وجود دارند، اما تنها این مساله خاص به این صورت نام‌گذاری شده است و در واقع موضوع اصلی این پایان‌نامه نیز هست. فرآیند حل یک مساله معکوس بسیار دشوار است و معمولا جواب دقیقی به دست نمی‌آید. بنابراین برای حل چنین مسائلی از روش‌های تقریبی مانند: روش‌های تکراری، تکنیک‌های منظم سازی، روش‌های تصادفی، شناسایی سیستم، روش‌هایی که جواب تقریبی را در زیرمجموعه‌ی جواب‌ها جست‌وجو می‌کند، تکنیک‌های تلفیقی و یا روش‌های عددی مستقیم استفاده می‌کنیم.

در این پایان‌نامه ما به معرفی رده‌ای از روش‌های تکرار برای جواب مساله رسانش گرمایی معکوس با ایده گرفتن از روش‌های استانداردسازی تیخونف و فوریه و نیز روش تکراری لندوبر می‌پردازیم؛ و ثابت می‌شود که این روش تحت هر دو قانون توقف استنتاجی و ابتدایی به صورت نمایی همگرا است.

مثال عددی نشان می‌دهد که یک انتخاب مناسب از پارامترهای تکرار، در روش تکرار ارائه شده، تا حد زیادی به کاهش مراحل تکرار کمک می‌کند و یک نتیجه قابل قبول به دست می‌دهد. جواب دادن به مساله هدایت حرارتی معکوس به صورت آنالیزی بسیار سخت‌تر از مساله مستقیم است. اما مساله مستقیم موانع دست و پاگیر آزمایشگاهی بسیاری را برای اندازه‌گیری و مهیا کردن شرایط محیطی فراهم می‌آورد. از آن جمله اینکه موقعیت فیزیکی سطح جسم برای نصب سنسور حرارتی، یا به عبارتی

ترموکوپل، مناسب نیست، به این معنی که، دقت اندازه‌گیری‌های انجام شده توسط سنسور در سطح جسم، بسیار پایین است و محاسبات را به شدت نامطمئن می‌کند. زیرا شرایط محیطی در اطراف سطح جسم بر این اندازه‌گیری‌ها تاثیر خواهد گذاشت. لذا بهتر است که پیشینه دمایی را با دقت بالا، در مکانی داخل جسم یا بر روی سطحی که عایق‌کاری شده، اندازه بگیریم. بنابراین ما ناچاریم که بین اندازه‌گیری‌های نادقیق یا یک مساله سخت‌تر از نظر آنالیزی یکی را انتخاب کنیم. یک جواب دقیق برای مساله معکوس مهار شده، می‌تواند تاثیر هر دوی این اشکالات را با هم کم کند.

مساله هدایت گرمایی معکوس را به این صورت تعریف می‌کنیم: IHCP عبارت است از، تقریب پیشینه دمایی سطحی یک جسم رسانای حرارتی، که پیشینه دمایی یک یا چند نقطه درون آن اندازه‌گیری شده است. واژه تقریب به این دلیل استفاده شده است که اندازه‌گیری دمای داخلی نیز با همه دقتی که دارد، باز دارای خطا خواهد بود و این بر دقت محاسبات اثر خواهد گذاشت. همچنین، حتی اگر این دمای اندازه‌گیری شده دقیق نیز باشد، یک داده گسسته است و در واقع دارای اطلاعاتی درباره نقاط محدودی از بازه زمانی است و در نتیجه این گسسته بودن از دقت محاسبات خواهد کاست.

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

هر معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم. معادلات دیفرانسیل به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

۱. معادلات دیفرانسیل معمولی ($ODEs$)[۱]

۲. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ($PDEs$)[۲]

بحث اصلی در این پایان‌نامه، پیرامون مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که در زیر به معرفی این دسته از معادلات می‌پردازیم. هر معادله دیفرانسیلی که شامل یک تابع دو یا چند متغیره و مشتقات آن تابع نسبت به متغیرهای مستقل باشد، به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی موسوم است. در حالت دوبعدی یک PDE را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = ۰ \tag{۱.۱}$$

در این صورت:

۱. معادله (۱.۱) را بیضوی گوییم اگر $B^۲ - ۴AC < ۰$

۲. معادله (۱.۱) را سهموی گوییم اگر $B^۲ - ۴AC = ۰$

---

[۱] Ordinary Differential Equations

[۲] Partial Differential Equations

۳. معادله (۱.۱) را هذلولوی گوییم اگر $B^۲ - ۴AC > ۰$

۴. معادله (۱.۱) را خطی گوییم هرگاه ضرایب A، B، C، D، E، F و G توابعی از x و y باشند.

۵. معادله (۱.۱) را شبه‌خطی گوییم هرگاه به صورت زیر باشد

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

که در آن، ضرایب A، B و C توابعی از x و y هستند.

۶. حالتی به جز حالت خطی و شبه‌خطی به صورت غیرخطی معادله (۱.۱) موسوم است.

هدف از حل یک مساله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، حل یک معادله می‌باشد که در برخی شرایط فیزیکی، صادق است. شرایط فیزیکی مساله ممکن است فقط از نوع اولیه (آغازین) باشد، که در این صورت به این مساله، مساله مقدار اولیه می‌گوییم. اگر شرایط فیزیکی مساله از نوع مرزی (کرانه‌ای) باشد، مساله مقدار مرزی و اگر شرایط فیزیکی مساله از نوع اولیه و مرزی باشد، مساله را، مساله مقدار اولیه-مرزی می‌گوییم. در بخش‌های بعدی به معرفی شرایط اولیه و مرزی و دسته خاصی از مسائل سهموی می‌پردازیم.

۱-۲ شرایط اولیه و مرزی برای یک مساله وابسته به زمان

۱-۲-۱ شرط اولیه

شرط اولیه برای یک مساله وابسته به زمان، تعیین دما در جسم مورد نظر در لحظه شروع فرآیند می‌باشد.

۱-۲-۲ شرایط مرزی

شرایط مرزی، دما یا جریان حرارتی (شار حرارتی) بر روی مرز می‌باشد. شرایط مرزی به سه دسته زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱. شرایط مرزی نوع اول (مساله دیریکله)

۲. شرایط مرزی نوع دوم (مساله مرزی نیومن)

۳. شرایط مرزی نوع سوم (مساله مرزی روبین)

۱. **شرط مرزی با دمای معلوم، روی مرز (نوع اول)**
ممکن است در یک مساله مقدار دما در سطح مرزی را داده باشند که می‌تواند تابعی از زمان و مکان باشد، این نوع شرط به شرط مرزی دیریکله معروف است.

۲. **شرط مرزی با شار حرارتی معین، بر روی مرز جسم (نوع دوم)**
هرگاه توزیع شار حرارتی بر روی مرز جسم مشخص باشد و به صورت ثابت یا تابعی از مکان و زمان و یا هر دو باشد، شرط مرزی نوع دوم یا شرط مرزی نیومن گویند.

۳. **شرط مرزی نوع سوم**
اگر بر بخشی از کران مقدار دما و بر بقیه کران توزیع شار حرارتی مشخص باشد، چنین شرطی به شرط مرزی روبین (آمیخته) موسوم است.

۱-۳ مسائل سهموی

در این پایان‌نامه به معرفی مسائل هدایت گرمایی که دسته‌ای از مسائل سهموی است، می‌پردازیم.

۱-۳-۱ مسائل هدایت گرمایی

معادله اساسی حاکم بر انتقال گرما در یک جسم صلب، در حالت کلی با توجه به قوانین فیزیکی یا طبیعی و استفاده از قوانین ریاضی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود.

$$k\Delta^{2}u + G(r,t) = (\rho c)u_t \tag{۲.۱}$$

که در آن k ضریب هدایت گرمایی جسم است که ممکن است تابعی از مختصات نقطه روی جسم یا دما و یا هر دو آن‌ها باشد، ρ چگالی جسم، c ظرفیت حرارتی ویژه جسم و $G(r,t)$ شدت انرژی جسم و انرژی واردشده به جسم در زمان t و در نقطه $r = (x,y,z)$ می‌باشد. هم‌چنین $\Delta^{2}u$ در حالت یک‌بعدی، دوبعدی و سه بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta^{2}u = u_{xx}, \quad \text{یک بعدی}$$
$$\Delta^{2}u = u_{xx} + u_{yy}, \quad \text{دوبعدی}$$
$$\Delta^{2}u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad \text{سه بعدی}$$

معادله (۲.۱) یکی از مهمترین مسائل ریاضی فیزیک می‌باشد که توسط دانشمندان بزرگ ریاضی، فیزیک، شیمی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد، به طوری که با حل این معادله به همراه شرایط اولیه

و مرزی، بخش بسیار مهمی از مشکلات و مسائل موجود در صنعت رفع می‌گردد. هر مساله هدایت گرمایی برای ناحیه‌ای بسته و کراندار در حالت یک بعدی با شرط اولیه و شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} ku_{xx} + G(x,t) = (\rho c)u_t, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = g(t), \text{یا } -ku_x(0,t) = \phi(t), & t \ge 0, \\ u(l,t) = q(t), \text{یا } -ku_x(l,t) = \psi(t), & t \ge 0, \end{cases} \tag{۳.۱}$$

اگرچه مساله (۳.۱) به جهت آن‌که از مدل سازی مساله انتقال ناشی شده است به مساله گرما معروف شده است. در ادامه، پیش از تعریف مسائل هدایت گرمایی مستقیم و معکوس، لازم است توضیحاتی را پیرامون مسائل معکوس ذکر کنیم.

۱-۴ مسائل معکوس

امروزه مسائل معکوس جزء مهمترین مسائل در علوم و مهندسی می‌باشد. به این دلیل که در شاخه‌های گوناگون علوم و مهندسی کاربردهای متعددی دارند. به عنوان مثال مهندسان مکانیک، هوافضا، شیمی، ریاضی‌دانان، متخصصین علم فیزیک، آمار و دیگر شاخه‌ها در حل مسائل خود با مسائل معکوس مواجه می‌شوند.

از دید کلر[۳] ریاضی‌دان و متخصص در زمینه مسائل معکوس، دو مساله را معکوس یکدیگر می‌نامند هرگاه فرمول‌بندی یکی از آن‌ها نیازمند تمام یا بخشی از اطلاعات مساله دیگر باشد. بر طبق این تعریف یکی از مسائل را مستقیم و دیگری را معکوس می‌نامند. مسائل هدایت گرمایی را می‌توان به دو دسته مستقیم و معکوس تقسیم کرد. در مسائل مستقیم که کاربردهای بیشتری دارند، هندسه، خواص ترموفیزیکی، شرایط اولیه و مرزی معلوم هستند. هدف در این مسائل محاسبه دما در داخل ناحیه حل می‌باشد، در مسائل هدایت گرمایی معکوس، تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و در عوض اطلاعات اضافی که معمولا دماهای اندازه‌گیری شده در داخل ناحیه حل و یا روی مرز است، معلوم می‌باشند.

مسائل هدایت گرمایی معکوس کاربردهای مختلفی دارند، این کاربردها را می‌توان به سه دسته مسائل کنترلی، طراحی و شناخت تقسیم کرد. در مسائل کنترلی و شناخت، هدف تعیین یک متغیر

[۳] Keller

می‌باشد که اندازه‌گیری مستقیم آن ممکن نیست، مانند تعیین ضریب هدایت گرمایی و یا دما روی یک سطح که قرار دادن مستقیم دماسنج روی آن ممکن نمی‌باشد. مسائل طراحی معمولا شامل اندازه‌گیری نیستند بلکه در این مسائل معمولا بهینه کردن یک طرح از طریق یک تابع هدف، تعریف‌کننده یک مساله معکوس است.

یکی از حوزه‌های مسائل معکوس، بحث و بررسی در ارتباط با استخراج و استنباط اطلاعات مفید از اندازه‌گیری‌های ناسازگار و محدود درون یک ناحیه در سیستم‌های نفوذی می‌باشد. از سیستم‌های نفوذی می‌توان به مکانیزم انتقال گرما به شیوه هدایت یا رسانش اشاره کرد. به عنوان مثال یک میله به طول l، که دارای دمای اولیه معلوم و یک طرف آن عایق‌بندی شده است را در نظر بگیرید، در این نمونه، به دلیل شرایط سخت و یا نامناسب بودن وضعیت سطح میله در طرف دیگر میله، نمی‌توان حسگرهای دما را به طور مستقیم بر روی سطح انتهایی میله قرار داد، بلکه به محاسبه دما در یک نقطه داخلی میله با استفاده از سنسور[۴] می‌پردازند. در چنین حالتی با یک مساله هدایت گرمایی معکوس مواجه خواهیم شد که هدف از تحلیل این مساله، تخمین شرط مرزی سطح است.

هم‌چنین از تحلیل مسائل هدایت گرمایی معکوس برای برآورد خواص گرما مانند ضریب هدایت گرمایی و ظرفیت ویژه گرمایی استفاده می‌شود.

مساله هدایت گرمایی مستقیم با توجه به نتایج داده شده حل می‌گردد، اما مساله هدایت گرمایی معکوس به نتایج و ارائه علت و معلول وابسته است که برای حل آن باید از نتایج و پیامدهای شناخته شده به علل ناشناخته دست یافت، همان‌طور که بیان شد در بسیاری از موارد، اندازه‌گیری و تخمین مستقیم ممکن نیست و یا حتی در برخی موارد غیرممکن می‌باشد، لذا مجبور به تخمین علت از روی مشاهدات نتایج فرآیند می‌باشیم. برای مثال درجه حرارت در یک سطح خیلی داغ را نمی‌توان به طور مستقیم با استفاده از حسگرها به دست آورد به همین دلیل معمولا حسگرها را زیر سپر تشعشع قرار می‌دهند و دمای سطح داغ را به روش تحلیل معکوس تخمین می‌زنند.

۱-۴-۱ تعریف مسائل هدایت گرمایی مستقیم و معکوس

مساله هدایت گرمایی مستقیم

در مساله (۳.۱) توابعی مختلفی در شرایط اولیه و مرزی موجود می‌باشند. اگر تنها تابع $u(x,t)$ مجهول مساله فوق باشد و بقیه توابع در شرایط اولیه و مرزی و هم‌چنین ضرایب در معادله (۳.۱) معلوم باشند، مساله، یک مساله هدایت گرمایی مستقیم $(DHCP)$[۵] است.

---

[۴] Sensor

[۵] Direct Heat Conduction Problem

مساله هدایت گرمایی معکوس

اگر در مساله هدایت گرمایی (۳.۱) به غیر از تابع $u(x,t)$ توابع دیگری مجهول باشند، آن را یک مساله هدایت گرمایی معکوس گویند.

۱-۵ تعریف مساله

مساله هدایت گرمایی معکوس را می‌توان به عنوان یک معادله سهموی کناره‌ای در ربع اول مختصاتی در نظر گرفت. ابتدا مساله مستقیم هدایت گرمایی را در ربع اول مختصاتی در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} &u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, \qquad x > 0, \qquad t > 0,\\ &u(x,0) = 0, \qquad x \geq 0,\\ &u(0,t) = f(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

که در آن a، b و c توابعی با شرایط زیر هستند،

$$\alpha_1 \leq a(x) \leq \alpha_2, \qquad c(x) \leq 0, \qquad x \in (\mathbb{R}^+) \tag{۵.۱}$$

در ادامه برای راحتی همیشه نرم $L^2(\mathbb{R})$ را با $\|\cdot\|$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که

$$a(x) \in C^2(\mathbb{R}^+), \qquad b(x) \in C^1(\mathbb{R}^+), \qquad c(x) \in C(\mathbb{R}^+). \tag{۶.۱}$$

برای یکتایی جواب لازم است $\|u(x,t)\|$ کراندار باشد [۴، ۱۴].

اینک به مساله معکوس هدایت حرارتی در ربع اول مختصاتی توجه می‌کنیم. فرض کنیم که $f(t)$ معلوم نباشد و می‌خواهیم $u(x,t)$ را برای $0 \leq x < 1$ با داشتن شرط اضافه $g(t) = u(1,t)$ تعیین کنیم

$$\begin{aligned} &u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, \qquad x > 0, \qquad t > 0,\\ &u(x,0) = 0, \qquad x \geq 0,\\ &u(1,t) = g(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

این مساله به شدت بد وضع است، یک اختلال کوچک در داده ورودی g می‌تواند خطای بسیار بزرگی را در جواب $u(x,t)$ برای $x \in [0,1)$ موجب شود[۸]. در این‌جا ما مساله را فقط در حالتی که نسبت به متغیر t در $L^2(\mathbb{R})$ قرار دارد، در نظر می‌گیریم. همچنین $u(x,t)$، $f(t) = u(0,t)$، $g(t) = u(1,t)$

و سایر توابعی که در ادامه با آن‌ها مواجه می‌شویم را گسترش می‌دهیم، به این صورت که آن‌ها را برای $t < 0$، صفر در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که $u(x, 0) = 0$، لذا این گسترش در $t = 0$ پیوسته است و برای آنالیز کردن مساله مناسب است. فرض می‌کنیم برای داده اندازه‌گیری شده $g^\delta(t) \in L^2(\mathbb{R})$ داشته باشیم

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta. \tag{8.1}$$

معمولا یک کران ابتدایی را برای تابع نامعلوم $f(t)$، به یکی از دو صورت زیر در نظر می‌گیرند

$$\|f\| \leq M \tag{9.1}$$

یا

$$\|f\|_p \leq M, \qquad p > 0, \tag{10.1}$$

که در آن $\|f\|_p$ نرم f در فضای سوبولف[6]، $H^p(\mathbb{R})$، تعریف می‌شود.

$$\|f\|_p := (\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^p |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}, \tag{11.1}$$

که تبدیل فوریه $f(t)$ به صورت زیر است.

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} f(t) dt. \tag{12.1}$$

تعریف ۱.۵.۱. برای $p \geq 0$، فضای سوبولف، $H^p(\mathbb{R})$، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H^p(\mathbb{R}) := \{f(t), t \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^p |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

فضای سوبولف، $H^p(\mathbb{R})$، را می‌توان به عنوان زیرفضایی از $L^2(\mathbb{R})$، دانست. با قراردادن $p = 0$ و با توجه به تساوی پارسوال [7]، در می‌یابیم که $H^\circ(\mathbb{R})$ در واقع همان $L^2(\mathbb{R})$ است.

فضای سوبولف، با تعریف ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت خواهد بود.

$$(f, g)H^p = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^p \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

و لذا نرم القا شده توسط این ضرب داخلی برای فضای سوبولف، به صورت زیر خواهد بود.

$$\|f\|_p = (\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^p |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

---

[6] Sobolev Space

[7] Parseval

اگر برای $p \geq ۰$، تابع $f(t)$ در فضای سوبولف $H^p(\mathbb{R})$ قرار داشته باشد، آن‌گاه با توجه به تساوی پارسوال و همچنین قضیه مشتق برای تبدیل فوریه، درمی‌یابیم که $f(t)$ و مشتقات آن تا مرحله‌ی کوچکتر یا مساوی p با نرم $L^۲(\mathbb{R})$ کراندار هستند و لذا هر چه p بزرگتر باشد، تابع $f(t)$ دارای شرایط محدود کننده‌تری خواهد بود.

۱-۶ چند لم اساسی

در این بخش به تعدادی لم اشاره می‌کنیم که در واقع اساس نظری روش‌های عددی است که در بخش‌های بعد معرفی می‌شوند و در اثبات همگرایی این روش‌ها از آن‌ها استفاده می‌شود.

لم ۱.۶.۱. ([۴]) *فرض کنیم $v(x,\xi)$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار کرانه‌ای زیر باشد*

$$\begin{aligned} i\xi v(x,\xi) &= a(x)v_{xx} + b(x)v_x + c(x)v, \quad x > ۰, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ v(۰,\xi) &= ۱, \\ \lim_{x\to\infty} v(x,\xi) &= ۰, \quad \xi \neq ۰; \end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

برای $\xi = ۰$، نیاز داریم که $v(x,\xi)$ وقتی x به سمت ∞ میل می‌کند، کراندار باشد. فرض کنیم که مساله (۴.۱) دارای جوابی چون u باشد؛ در این صورت

$$u(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi, \quad x > ۰, \tag{۱۴.۱}$$

و

$$\hat{u}(x,\xi) = v(x,\xi)\hat{f}(\xi). \tag{۱۵.۱}$$

به علاوه

$$\hat{g}(\xi) = v(۱,\xi)\hat{f}(\xi) \tag{۱۶.۱}$$

و

$$\hat{u}(x,\xi) = \frac{v(x,\xi)}{v(۱,\xi)}\hat{g}(\xi). \tag{۱۷.۱}$$