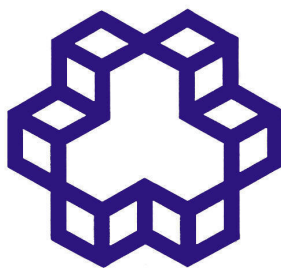


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم - علوم ریاضی

کاربردهای توابع پایه ای شعاعی در تقریب جواب معادلات دیفرانسیل

پایان نامه برای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد

(ریاضی کاربردی-گرایش آنالیز عددی)

نگارش:

میثم بابایی زاده کشتلی

اساتید راهنما:

دکتر عظیم امین عطایی

دکتر فریده قریشی

بهمن ماه ۱۳۹۱

خدایا...

کمکم کن تا آنچه را که تو زود می‌خواهی من دیر نخواهم و آنچه را که تو دیر می‌خواهی من زود نخواهم.
(امام حسین (ع)، دعای عرفه)

چکیده

در این پایان نامه دو روش متفاوت مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی (RBF) را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) مورد بررسی قرار می دهیم. این روش ها عبارتند از: روش توابع پایه ای شعاعی سراسری (GRBF) و روش انتگرال گیری دیفرانسیلی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی (RBF-DQ). در روش انتگرال گیری دیفرانسیلی مقدار مشتق تابع نسبت به یک نقطه بطور مستقیم بوسیله یک ترکیب خطی از مقادیر تابع در کل دامنه، تقریب زده می شود. مسئله اصلی در این روش تعیین ضرایب وزن می باشد. ما از توابع پایه ای شعاعی بعنوان تابع تست برای تعیین این ضرایب استفاده می کنیم. بر خلاف روش انتگرال گیری دیفرانسیلی، روش توابع پایه ای شعاعی سراسری، بطور مستقیم عبارتی از تقریب تابع بوسیله توابع پایه ای شعاعی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی جایگزین می کند. هر دو روش از نوع سراسری می باشند. مشکل اصلی این روش ها بدو ضعی ماتریس درونیاب می باشد. برای رفع این مشکل در روش انتگرال گیری دیفرانسیلی (RBF-DQ) از تکنیک انتگرال گیری دیفرانسیلی موضعی (LRBF-DQ) استفاده می کنیم و در روش (GRBF) تکنیک تغییر پایه را بکار می بریم. همچنین با مطرح کردن دو نوع پارامتر شکل c (ثابت و متغیر) تاثیر این پارامتر را روی دقت روش ها مورد بررسی قرار می دهیم. برای تحلیل عددی روش ها آنها را روی معادلات سین - گوردون^۱ پیاده سازی کرده و نتایج عددی را ارائه می کنیم.

کلمات کلیدی: توابع پایه ای شعاعی، معادلات با مشتقات جزئی، انتگرال گیری دیفرانسیلی مبتنی بر تابع شعاعی، پارامتر شکل، تغییر پایه، معادله سین - گوردون.

^۱Sine - Gordon

فهرست مطالب

۱	مفاهیم اولیه و تعاریف	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۵	۲.۱ تجزیه LU	۵
۶	۳.۱ کاربردهایی از توابع پایه ای شعاعی	۶
۹	۲ توابع پایه ای شعاعی	۹
۹	۱.۲ مقدمه	۹
۱۳	۲.۲ درونیابی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی	۱۳
۱۶	۳.۲ ویژگی های تابع پایه ای شعاعی به عنوان پایه هایی برای درونیابی	۱۶
۱۶	۱.۳.۲ دقت محاسبات	۱۶
۱۷	۲.۳.۲ پایداری	۱۷
۱۷	۳.۳.۲ هزینه محاسبات	۱۷
۱۷	۴.۲ مقایسه درونیابی توابع پایه ای شعاعی با درونیابی چندجمله ای	۱۷
۲۱	۵.۲ پارامتر شکل	۲۱
۲۳	۱.۵.۲ پارامتر شکل ثابت	۲۳
۲۵	۲.۵.۲ پارامتر شکل متغیر	۲۵
۳۰	۳ روش های مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی	۳۰

۳۰	مقدمه	۱.۳
۳۱	روش انتگرالگیری دیفرانسیلی	۲.۳
۳۲	انتگرالگیری عددی	۱.۲.۳
۳۳	انتگرالگیری دیفرانسیلی	۲.۲.۳
۳۴	انتگرالگیری دیفرانسیلی موضعی	۳.۲.۳
۳۷	انتگرالگیری دیفرانسیلی موضعی بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی	۴.۲.۳
۴۳	ضرایب وزن و تحلیل خطا	۵.۲.۳
۴۸	تکنیک های تغییر پایه	۳.۳
۴۹	پایه های چولسکی و SVD	۱.۳.۳
۵۱	نتایج عددی روش های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی	۴
۵۱	معادله ساین - گوردون	۱.۴
۵۲	پیاده سازی مسئله روی معادله ساین - گوردون	۲.۴
۵۲	پیاده سازی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی سراسری	۱.۲.۴
۵۵	پیاده سازی با استفاده از روش انتگرالگیری دیفرانسیلی (LRBFDQ و Rbfdq)	۲.۲.۴
۵۹	نتایج عددی	۳.۴
۶۰	مثال ۱.۴	۱.۳.۴
۷۲	نتیجه گیری	۵
۷۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

لیست جداول

۱۴	توابع پایه‌ای شعاعی	۱.۲
۲۰	درونیابی تابع MQRBF در مثال ۱.۲	۲.۲
۲۲	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر خطی در درونیابی MQ	۳.۲
۲۳	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر خطی در درونیابی MQ	۴.۲
۲۵	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر نمایی در درونیابی MQ	۵.۲
۲۵	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر نمایی در درونیابی MQ	۶.۲
۲۹	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر تصادفی در درونیابی MQ	۷.۲
۲۹	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر تصادفی در درونیابی MQ	۸.۲
۳۶	مقایسه خطای ماکزیمم برای N های متفاوت در روش GRBFDQ	۱.۳
۴۲	مقایسه خطاهای ماکزیمم و L_2 برای N های متفاوت در روش $LRBFDQ(n_i = 3)$	۲.۳
۴۳	مقایسه خطاهای ماکزیمم و L_2 برای N های متفاوت در روش $LRBFDQ(n_i = 5)$	۳.۳
۴۳	مقایسه خطای روش $LRBFDQ(n_i = 3)$ با پارامتر شکل نمایی برای N های مختلف	۴.۳
	خطاهای مختلف برای تابع TPS برای مقادیر مختلف k به روش GRBF، $dx = 0.1$ ، $dt = 0.01$	۱.۴
۶۲	$t = 1$	
	خطاهای روش های مختلف ($10^3 \times \text{Errors}$) با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی TPS زمانیکه	۲.۴
۶۲	$x \in [-10, 10]$ ، $dx = 0.1$ ، $c = 0.5$ ، $dt = 0.01, 0.001$ ، $t = 10$ برای مثال (۱.۴)	

- ۳.۴ خطاهای روش های مختلف ($10^3 \times \text{Errors}$) با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی MQ زمانیکه
 ۶۳ مثال (۱.۴) برای $t = 10, c = 0.5, dt = 0.01, 0.001, dx = 0.1, x \in [-10, 10]$
- ۴.۴ خطاهای روش های مختلف ($10^3 \times \text{Errors}$) با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی IMQ زمانیکه
 ۶۴ مثال (۱.۴) برای $t = 10, c = 0.5, dt = 0.01, 0.001, dx = 0.1, x \in [-10, 10]$
- ۵.۴ خطاهای روش های مختلف ($10^3 \times \text{Errors}$) با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی MQ با پارامتر
 ۷۰ . . . $c = 0.5, dt = 0.01, dx = 0.1, x \in [-10, 10]$ شکل متغیر در بازه های متفاوت زمانیکه
- ۶.۴ خطاهای روش های مختلف ($10^3 \times \text{Errors}$) با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی IMQ با پارامتر
 ۷۱ . . . $c = 0.5, dt = 0.01, dx = 0.1, x \in [-10, 10]$ شکل متغیر در بازه های متفاوت زمانیکه

لیست تصاویر

۲۰	$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$	درونیابی چندجمله‌ای برای تابع	۱.۲
۲۱	$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$	درونیابی MQ RBF برای تابع	۲.۲
۲۲		$f(x) = e^{\sin(\pi x)}$	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر خطی در درونیابی MQ برای تابع	۳.۲
		$g(x) = x^2 +$	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر خطی در درونیابی MQ برای تابع	۴.۲
۲۴	$2x + 1$		
۲۶		$f(x) = e^{\sin(\pi x)}$	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر نمایی در درونیابی MQ برای تابع	۵.۲
		$g(x) = x^2 +$	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر نمایی در درونیابی MQ برای تابع	۶.۲
۲۷	$2x + 1$		
۲۷		$f(x) = e^{\sin(\pi x)}$	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر تصادفی در درونیابی MQ برای تابع	۷.۲
		$g(x) =$	مقایسه پارامتر شکل ثابت با پارامتر شکل متغیر تصادفی در درونیابی MQ برای تابع	۸.۲
۲۹	$x^2 + 2x + 1$		
۳۵		مقایسه درونیابی RBFDQ سراسری برای N های مختلف.	۱.۳
۳۷		غالب بودن خطا در نقاط انتهایی در درونیابی RBFDQ سراسری.	۲.۳
۴۱		مقایسه درونیابی LRBFDQ ($n_i = 3$) برای N های مختلف.	۳.۳
			مقایسه خطای درونیابی LRBFDQ ($n_i = 3$) در نقطه ابتدایی، میانی و کل دامنه برای N های	۴.۳
۴۳		مختلف.	

۱.۴	نمودار جواب دقیق معادله ساین - گوردون برای مقدار c و با $dx = 0.1$ ، $x \in [-10, 10]$
۶۱	۱ برای t مثال (۱.۴)
۲.۴	نمودار جواب تقریبی TPS برای مقادیر k مختلف
۶۶	۲.۴
۳.۴	نمودار خطای ماکزیمم برحسب پارامتر شکل روش GRBF بوسیله توابع IMQ و MQ با مقادیر
۶۶	۳.۴ $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۴.۴	نمودار عدد وضعیت برحسب پارامتر شکل روش GRBF بوسیله توابع IMQ و MQ با مقادیر
۶۶	۴.۴ $t = 1, dx = 0.1, 0.01$
۵.۴	نمودار خطای ماکزیمم برحسب پارامتر شکل روش RBF-DQ بوسیله توابع IMQ و MQ با مقادیر
۶۷	۵.۴ $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۶.۴	نمودار عدد وضعیت برحسب پارامتر شکل روش RBF-DQ بوسیله توابع IMQ و MQ با مقادیر
۶۷	۶.۴ $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۷.۴	نمودار خطای ماکزیمم برحسب پارامتر شکل روش $(n_i = 3)$ LRBF-DQ بوسیله توابع MQ و
۶۷	۷.۴ IMQ با مقادیر $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۸.۴	نمودار نمودار عدد وضعیت برحسب پارامتر شکل روش $(n_i = 3)$ LRBF-DQ بوسیله توابع MQ و
۶۸	۸.۴ IMQ با مقادیر $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۹.۴	نمودار خطای ماکزیمم برحسب پارامتر شکل روش $(n_i = 5)$ LRBF-DQ بوسیله توابع MQ و
۶۸	۹.۴ IMQ با مقادیر $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۱۰.۴	نمودار عدد وضعیت برحسب پارامتر شکل روش $(n_i = 5)$ LRBF-DQ بوسیله توابع IMQ و MQ با
۶۹	۱۰.۴ مقادیر $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۱۱.۴	مقایسه نمودار عدد وضعیت برحسب پارامتر شکل روشهای SV-RBF و GRBF بوسیله تابع IMQ با
۶۹	۱۱.۴ مقادیر $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$
۱۲.۴	مقایسه نمودار عدد وضعیت برحسب پارامتر شکل روشهای SV-RBF و GRBF بوسیله تابع IMQ با
۷۰	۱۲.۴ مقادیر $t = 1, dx = 0.1, dt = 0.01$

فصل ۱

مفاهیم اولیه و تعاریف

۱.۱ مقدمه

تحقیقات اخیر روی روشهای عددی، بر ایده استفاده از روشهای بدون شبکه^۱ برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تاکید می کند. یکی از ویژگی های رایج همه روشهای بدون شبکه، توانایی آنها در ساخت تقریب تابع، تنها با استفاده از اطلاعاتی در یک مجموعه از داده های پراکنده می باشد. تعدادی از روشهای بدون شبکه عبارتند از: روش هیدرودینامیکهای ذره ی هموار^۲ [۱]، روش المان پراکنده^۳ [۲]، روش گلرکین المان آزاد^۴ [۳]، روش هسته باز سازنده^۵ [۴]، روش افراز واحد^۶ [۵]، روش hp-clouds [۶]، روش پترو-گلرکین موضعی بدون شبکه^۷ [۷]، روش تفاضلات متناهی^۸ [۸]، روش پترو-گلرکین موضعی بدون شبکه مستقیم^۹ [۹] و روش معادله انتگرال مرزی تقابل دوگانی^{۱۰} [۱۰].

در چند سال اخیر گروه دیگری از روشهای بدون شبکه که بر اساس توابع پایه ای شعاعی تولید می شوند، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توجه بیشتری را به خود جلب کرده اند. در ابتدا توابع پایه ای شعاعی

^۱ Meshfree methods

^۲ Smooth particle hydrodynamics method

^۳ Diffuse element method

^۴ Element-free Galerkin method

^۵ Reproducing kernel particle method

^۶ Partition of unity method

^۷ Meshless local Petrov–Galerkin method

^۸ Finite differences

^۹ Direct meshless local Petrov–Galerkin method

^{۱۰} Dual reciprocity boundary integral method

برای درونیابی داده‌ها در توابع چندمتغیره مطرح شدند. به هر حال، ویژگی بدون شبکه بودنشان انگیزه‌ای شد تا محققان از آنها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده کنند. کانزا^۱ [۱۲، ۱۳]، اولین کسی بود که از این توابع برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده کرد و نام روش خود را توابع پایه ای شعاعی سراسری^۲ نامید. چون ماتریس ضرایب روش کانزا متقارن نبود لذا فشیئور^۳ [۱۴] روش نوع هرمیت را برای تضمین تقارن ماتریس ضرایب ارائه کرد. ماتریس ضرایب متقارن، حل پذیری معادلات خطی مربوطه را تضمین می‌کند. روش های کانزا و فشیئور به طور مستقیم عبارتی از تقریب تابع بوسیله توابع پایه ای شعاعی را در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی جایگزین می‌کنند. اما شو^۴ و همکاران در سال ۲۰۰۳ میلادی نوع دیگری از روش‌های مبتنی بر RBF را با بهره گیری از ایده انتگرال گیری دیفرانسیلی^۵ مطرح کردند و نام آن را انتگرال گیری دیفرانسیلی بر اساس توابع پایه ای شعاعی برگزیدند. بر خلاف روش کانزا این روش مشتق تابع در یک نقطه را بوسیله ترکیب خطی از همه مقادیر تابع در کل دامنه تقریب می‌زند. هر دو روش در کنار مزیت‌های زیادی که دارند، دارای معایبی نیز می‌باشند که استفاده عملی از آنها را دچار مشکل کرده است. عددحالت ماتریس درونیاب این روش‌ها با افزایش تعداد نقاط گرهی به سرعت رشد می‌کند. همچنین، هزینه محاسبات این روش برای مسائل بزرگ بسیار زیاد است. برای رفع این مشکلات تکنیک‌های متعددی ارائه شد که یکی از آنها استفاده از روشهای موضعی براساس توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد. یکی از روشهای موضعی، روش انتگرال‌گیری دیفرانسیلی موضعی براساس توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد که توسط خود شو در همان سال ۲۰۰۳ ارائه شد. این روش در واقع مشتق تابع در یک گره بصورت یک ترکیب خطی از مقادیر تابع در گرههای مجاور گره مورد نظر بیان می‌شود. همچنین برای کاهش عدد حالت ماتریس درونیاب اخیراً خانم پازوکی به همراه شابک^۶ تکنیک تغییر پایه را مطرح کردند [۷۷]. در ادامه این فصل به بیان تعاریف اولیه می‌پردازیم. در فصل دوم جنبه های مختلف توابع پایه ای شعاعی برای تقریب تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم اصول روش‌های مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه می‌گردد.

^۱E. J. Kansa

^۲Globally Radial Basis Function

^۳G. E. Fasshauer

^۴Shu

^۵Differential Quadrature

^۶Schaback

پیاده سازی این روش‌ها برای حل عددی معادله ساین گوردون^۱ در فصل چهارم بررسی و نتایج عددی تحلیل می‌شوند. نتیجه‌گیری در فصل پنجم مطرح می‌شوند.

اکنون به بیان برخی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. "میدان" - یک میدان که با F نشان داده می‌شود عبارت است از یک مجموعه از عناصر به نام اسکالر و

دو عملگر جمع و ضرب. دو عملگر باید دارای شرایط زیر باشند:

(۱) نسبت به جمع و ضرب بسته باشد.

(۲) جمع و ضرب خاصیت جابجایی داشته باشند.

(۳) جمع و ضرب شرکت پذیر باشند. یعنی برای هر a, b, c در F داشته باشیم:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(۴) ضرب نسبت به جمع توزیع پذیر است. یعنی برای هر a, b, c در F داشته باشیم

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

(۵) شامل دو عنصر 0 و 1 باشد بطوریکه برای هر a در F داشته باشیم

$$a + 0 = a, \quad 1 \cdot a = a.$$

(۶) برای هر a در F یک عنصر b در F وجود داشته باشد بطوریکه $a + b = 0$.

(۷) برای هر $a \neq 0$ در F یک عنصر c در F وجود داشته باشد بطوریکه $a \cdot c = 1$.

تعریف ۲.۱. "فضای برداری خطی" - یک فضای برداری خطی که بوسیله V نشان داده می‌شود عبارت است از یک

مجموعه از عناصر به نام بردار، یک میدان F و دو عملگر با نام جمع برداری و ضرب اسکالر. این دو عملگر باید

دارای شرایط زیر باشند:

(۱) V نسبت به جمع بسته است.

(۲) جمع خاصیت جابجایی دارد.

^۱Sine-Gordon

(۳) جمع شرکت پذیر است.

(۴) V شامل بردار α است بطوریکه برای هر α در V داشته باشیم $\alpha + \alpha = \alpha$.

(۵) برای هر α در V عنصری مانند β در V وجود داشته باشد بطوریکه $\alpha + \beta = \alpha$.

(۶) به ازای هر c در F و به ازای هر α در V داشته باشیم $c\alpha \in F$.

(۷) ضرب اسکالر شرکت پذیر است.

(۸) ضرب اسکالر نسبت به جمع برداری توزیع پذیر است.

(۹) ضرب اسکالر نسبت به جمع اسکالر توزیع پذیر است.

(۱۰) برای هر α در V داشته باشیم $\alpha = \alpha \cdot 1$ که $1 \in F$.

اکنون بعضی از ویژگی های یک فضای برداری خطی را بیان می کنیم.

تعریف ۳.۱. "استقلال خطی" - یک مجموعه از بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در یک فضای برداری خطی V روی میدان

F مستقل خطی گفته می شود اگر و تنها اگر معادله

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0$$

نتیجه دهد $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ عناصری در میدان F هستند.

از تعریف فوق نتیجه می شود که استقلال خطی فقط به مجموعه ای از بردارها وابسته نیست بلکه به میدان نیز وابسته

است. همچنین واضح است که اگر بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی باشند آنگاه حداقل یکی از آنها را می توان

بصورت ترکیب خطی از بقیه عناصر نوشت.

تعریف ۴.۱. "بعد یک فضای برداری خطی" - بیشترین تعداد بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری خطی را

بعد آن فضای برداری خطی می نامند.

تعریف ۵.۱. "پایه یا بردارهای پایه ای" - یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری خطی V را

یک پایه برای V می نامند اگر هر بردار در V را بتوان بصورت ترکیب خطی یکتایی از این بردارها نوشت.

"مفهوم تغییر پایه" - در فضای برداری خطی n - بعدی V_n تعداد زیادی پایه وجود دارد و هر پایه می تواند بصورت

یکتا بوسیله پایه دیگر بیان شود.

تعریف ۶.۱. "عملگر خطی" - عملگر L را خطی گوئیم اگر و تنها اگر برای همه بردارهای v_1 و v_2 در V_n و همه بردارهای c_1 و c_2 در F داشته باشیم:

$$L(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1L(v_1) + c_2L(v_2).$$

تعریف ۷.۱. "رابطه بین عملگر خطی و پایه‌ها" - فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ یک مجموعه از بردارهای پایه‌ای در فضای برداری خطی V_n باشند. اگر همه بردارهای پایه‌ای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در عملگر خطی صدق کنند، آنگاه طبق تعریف پایه و همچنین طبق تعریف عملگر خطی، هر بردار در فضای V_n نیز در عملگر خطی صدق خواهد کرد.

۲.۱ تجزیه LU

تعریف ۸.۱. [۱۱]: گوئیم ماتریس مربعی A_m ، دارای تجزیه دولیتل LU است هرگاه ماتریس‌های $L = (l_{ij})_{m \times m}$ و $U = (u_{ij})_{m \times m}$ وجود داشته باشند بطوریکه:

• L یک ماتریس $m \times m$ و پایین مثلثی بوده و همه درایه‌های روی قطر اصلی آن، یک باشد ($l_{ii} = 1$).

• U یک ماتریس $m \times m$ و بالا مثلثی باشد.

$$A = LU \quad \bullet$$

ایده اصلی در تجزیه LU ماتریس A ، حل دستگاه‌های خطی مانند $AX = b$ می‌باشد. در این صورت برای حل دستگاه خطی $AX = b$ ، کافی است دستگاه‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} LY = b, \\ UX = Y. \end{cases}$$

همانطور که می‌دانیم، براحتی می‌توان دستگاه‌های $LY = b$ و $UX = Y$ را بترتیب با روش جایگذاری پیشرو^۱ و جایگذاری پسرو^۲ حل کرد.

^۱Forward

^۲Backward

۳.۱ کاربردهایی از توابع پایه ای شعاعی

توابع پایه ای شعاعی ابزار مفیدی جهت تقریب توابع چند متغیره می باشد و از این نوع توابع بطور عددی جهت تقریب معادلات با مشتقات جزئی استفاده می شود. در این مسیر سه روش مورد بررسی قرار می گیرد که به ترتیب تکنیکهای هم محل، فرمولهای متغیر و روشهای عناصر مرزی جهت حل معادلات دیفرانسیل بیضوی با مقادیر مرزی^۱ می باشند. دلایل متعددی وجود دارد که چرا توابع پایه ای شعاعی برای این روشها کاربرد دارد. مطالعات انجام شده نشان می دهد، اولین روش بسیار کاراست زیرا ما اطلاعات زیادی از دقت و وجود درونیاب های توابع پایه ای شعاعی داریم. بخصوص زمانی که داده های ما پراکنده می باشند که براحتی می توان از داده های هم محل بدون شبکه استفاده کرد. دلیل استفاده از روش دوم اینست که به کاربردهای روش عناصر متناهی^۲ معمولی شبیه می باشد. یعنی معمولاً توابع پایه ای شعاعی با محمل (support) فشرده بجای روش عناصر متناهی استاندارد با چندجمله ای های تکه ای چند متغیره به کار برده می شود. نهایتاً روش عناصر مرزی در بسیاری از زمینه ها که توابع پایه ای شعاعی بعنوان جوابهای اساسی (توابع گرین^۳) از عملگر های دیفرانسیلی بیضوی جزئی خصوصاً توانهای عملگر لاپلاس شناخته شده است، مناسب می باشد [۷۲].

نقشه برداری از تصاویر دو یا سه بعدی نظیر رخساره ها^۴ یا اسکن های دستگاه کاشف زیر دریایی بوسیله امواج صوت یا رد یاب صوت در زیر آب، از کاربردهای توابع پایه ای شعاعی میباشد. در اینجا درونیاب نقش اساسی را دارد. بخاطر اینکه بعضی ویژگی های مهم تصویر حتماً باید حفظ شود در حالیکه دیگر ویژگی ها لازم به نگاشت دقیق نیست، بنابر این با قادر ساختن یک مقایسه از بعضی شکلها که ممکن است در یک زمان متفاوت باشد، باقی را نگه می داریم. این موارد به مارکرز^۵ معروفند که برای مثال بعضی نقاط در استخوان بندی در اشعه X، بایستی با بقیه نقاط در زمان دیگری مقایسه شوند. الگوی همسان با این مورد نشان می دهد که اگر بخواهیم اسکن های ردیاب صوتی از یک لنگر گاه در دفعات متعددی مقایسه کنیم. صخره ها می توانند در اینجا به عنوان مارکر استفاده شوند.

^۱Elliptic partial differential equations

^۲Finite element

^۳Green's functions

^۴Portrait

^۵Markers

روش اسپلاین مکعبی^۱، روش خوبی برای این کاربردهای عملی مطرح گردید. کار بر روی این نوع از توابع پایه ای، منجر به ایجاد روشهایی برای ارزیابی های سریعتری از روشهایی مانند اسپلاین مکعبی و غیره گردید. زیرا بعد از درونیابی، درونیاب محاسبه شده بایستی جهت آنالیز و نمایش در محیط مشبک مربعی مورد ارزیابی قرار گیرد. بعضی کاربردهایی که ممکن است به درونیابی با داده های پراکنده منجر شوند، عبارتست از: اندازه گیری پتانسیل ثقلی یا دمای سطح زمین در ایستگاه های پراکنده یا دمای اشیاء چند بعدی دیگر. معمولاً تخمین های چند مربعی برای این نوع از مسائل مورد استفاده قرار می گیرند [۷۲].

بسیاری از کاربردها پیرامون درونیابی با ابعاد بالا یا مسائل تقریب می باشد که داده ها از کانال های زیادی ایجاد می شود. برای مثال می توان به اندازه گیری قطبهای مغناطیسی فعالیت مغز از سلول های عصبی. کاربردهای عملی از فیزیک عصب، داده ۱۰۰-۵۰ بعد که از اندازه گیری قطب های مغناطیسی مغز میگیرد را تولید می کند و برای هموار شدن به پس پردازش^۲ نیازمند می باشد. برای این موضوع توابع پایه ای شعاعی بطور چشمگیری مورد استفاده قرار می گیرند [۱۷].

تقریب حالتی که بوسیله شبکه های عصبی ایجاد شد، معمولاً به مسائل درونیابی در چند بعد با داده های پراکنده منجر می شود. گیروسی^۳ از توابع پایه ای شعاعی بعنوان روش مناسب برای این موضوع نام برد که تا اندازه ای بخاطر در دسترس بودن آنها در ابعاد دلخواه و هموار بودن آنها می باشد. کاربرد نمونه ای دیگر در ردیاب آتش می باشد. مدل پیشرفته ردیاب آتش بایستی چندین پارامتر اندازه گیری شده نظیر رنگ، شعاع، چگالی، جابجایی شیء مشاهده شده که آیا این شیء در اتاق می باشد یا نه را در نظر بگیرد. یعنی وسیله قبل از اجرا باید چندین موقعیت توصیفی را در نظر بگیرد و مقدار دهی کند. صفر یعنی هیچ آتشی در کار نیست و یک یعنی آتش، که این مقادیر توسط وسیله درونیابی می شود. که وسیله با مفهوم ضمنی می تواند در زندگی حقیقی ما با استفاده از توابع پایه ای شعاعی تاثیر بگذارد.

روشهای توابع پایه ای شعاعی برای این کاربردها بسیار موفق بوده است زیرا ابزار های خوبی برای مسائل با ابعاد بالا می باشند که بی تردید کاربردهای بیشتری در زندگی پیدا می کنند، همانطوریکه که چند جمله ای های اسپلاین در ۳۰ سال گذشته تاکنون پیدا کرد [۱۸].

^۱Thin plate spline

^۲post-processing

^۳Girosi

در انتها فهرستی از کاربرد های روش توابع پایه ای شعاعی بیان میکنیم [۱۹]:

- در اغلب شاخه های علوم و مهندسی بوسیله مدل بندی داده های پراکنده (مانند برازش انرژی پتانسیل در شیمی، پیوند میان مدل های مهندسی با مجموعه های با پارامتر ناسازگار، مسائل نقشه برداری در زمین سنجی، ژئوفیزیک و علم هواشناسی)

- در بسیاری از شاخه های علوم و مهندسی جهت حل معادلات با مشتقات جزئی (حل معادلات دینامیک گاز، معادلات بولتزمن^۱ و فوکر- پلانک^۲ در فضای فازی ۶- بعدی، مسائل در بردارنده حرکت بی قاعده نظیر ضربه و تکان، تجزیه چند مقیاسی، تغییر شکل مواد حجیم، مطالعات کشسانی روی مسائل خم شدن پوسته ها و لایه ها، کاربردهایی در نانو تکنولوژی)

- در مدل های غیر یکنواخت (عکسبرداری پزشکی، تجدید آرایش گراف های پزشکی^۳)

- در ریاضیات مالی (تعیین ارزش معامله^۴)

- در گرافهای کامپیوتری (نمایش سطح ها از اطلاعات نقطه ای مثل داده اسکن شده بوسیله لیزر، پیچش عکس^۵)

- در یادگیری تئوری های شبکه های عصبی و استخراج داده (مثل تقریب هسته^۶، ابزارهای برداری پشتیبان^۷)

- در بهینه سازی

^۱Boltzmann

^۲Fokker-Planck

^۳Tomographic reconstruction

^۴Option pricing

^۵Image warping

^۶Kernel approximation

^۷Support vector machines

فصل ۲

توابع پایه‌ای شعاعی

۱.۲ مقدمه

بکارگیری توابع پایه‌ای شعاعی^۱ (RBF) در سال ۱۹۷۱ بوسیله رولند هاردی^۲ مطرح شد. او در اصل روش را برای تابع شعاعی چندمربعی^۳ ارائه کرد. این روش از یک مسئله نقشه‌کشی پدیدار شد، که در آن به یک درونیاب دو متغیره از داده‌های پراکنده و تنک نیاز داشت تا توپوگرافی و کانترهای حاصل را تقریب بزند. هیچ یک از روشهای تقریب موجود (از قبیل سری‌های فوریه، چندجمله‌ای‌ها، اسپلاین‌های دو متغیره) تقریب مطلوبی را ارائه نمی‌کردند، زیرا آنها برای داده‌های با تعداد اندک یا بیش از حد هموار یا بیش از حد دارای نوسان بودند. در واقع درونیابی چندجمله‌ای به این دلیل رضایت‌بخش نبود که برای نقاط گره‌ای کم، روش قادر نبود تا بطور دقیق تغییرات سریع را در سطوح توپوگرافی ارائه کند. درونیابی فوریه نیز با نقاط داده‌ای کم، مشکل داشت. سری‌های فوریه در نقاط کم، تابعی ایجاد می‌کند که به نوسانات زیاد در بین نقاط داده‌ای میل می‌کند [۲۲]. بعلاوه، نامنفردی ماتریس‌های درونیاب آنها نیز تضمین شده نبودند. در حقیقت، قضیه هار^۴ وجود یک مجموعه از گره‌های متمایز را مطرح کرد که بواسطه آن، ماتریس درونیاب حاصل از توابع پایه‌ای که مستقل از این گره‌ها هستند در دو یا بعدها بالاتر منفرد است [۲۳]. مشکلات این روشها باعث شد تا هاردی به فکر ارائه یک روش جدید باشد. از طریق سعی و خطا، هاردی سرانجام روش چندمربعی را کشف کرد. او در گام اول بحث روی مسئله یک بعدی را آغاز کرد. هاردی می‌خواست یک تابع

^۱Radial Basis Function

^۲R. Hardy

^۳Multiquadric

^۴Haar theorem

مطلوب ایجاد کند که بتواند یک منحنی توپوگرافی را تقریب بزند. در حال مطالعه این مسئله، او کشف کرد که داده می‌تواند بخوبی بوسیله تابع درونیاب خطی تکه‌ای تقریب زده شود [۲۴] و برای n نقطه $\{x_j\}_{j=1}^n$ و مقادیر تابعی متناظر $\{f_j\}_{j=1}^n$ تابع درونیاب زیر را ارائه کرد:

$$s(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j |x - x_j|, \quad (1.2)$$

که λ_j ها بوسیله شرایط درونیابی $s(x_j) = f_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ تعیین می‌شوند. از لحاظ هندسی، تابع فوق، داده‌ها را بوسیله ترکیب خطی از n انتقال تابع قدرمطلق $|x|$ درونیابی می‌کند، بطوریکه رأس $|x|$ در یکی از نقاط داده‌ای مرکزدهی می‌شود.

اما تابع درونیاب (۱.۲) در نقاط مرکزی مشتق‌پذیر نبود. لذا نمی‌توانست به خوبی قله‌ها و دره‌ها را تقریب بزند. هاردی این مشکل را با حذف تابع پایه‌ای قدرمطلق در رابطه (۱.۲) و جایگزینی آن با یک تابع بطور پیوسته مشتق‌پذیر حل کرد. او تابع $\sqrt{c^2 + x^2}$ را پیشنهاد کرد که c ثابت غیر صفر دلخواه است [۲۴]. روش درونیابی جدید بصورت زیر بیان شد:

$$s(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sqrt{c^2 + (x - x_j)^2}, \quad (2.2)$$

که دوباره، λ_j ها بوسیله شرایط درونیابی تعیین میشوند. در تابع فوق اگر $c \neq 0$ آنگاه $s(x)$ یک درونیاب بطور پیوسته مشتق‌پذیر خواهد بود. به هر حال، اگر $c = 0$ باشد آنگاه تابع (۲.۲) با تابع درونیاب (۱.۲) هم‌ارز خواهد بود. تفسیر هندسی روش جدید با روش قبلی تقریباً یکسان است. روش جدید از تابع پایه‌ای قدرمطلق استفاده نمی‌کند ولی در عوض از ترکیب خطی از انتقالهای تابع پایه‌ای درجه دو استفاده می‌کند و می‌تواند یک نمایش دقیق از منطقه توپوگرافیک فراهم کند. با استفاده از این روش، هاردی نقاط عطف و ماکسیمم منطقه توپوگرافیک را پیدا کرد. او روش جدید را برای بیش از یک بعد نیز بکار گرفت. همانطور که می‌دانیم قدرمطلق اختلاف فاصله نقاط در فضای یک بعدی، فاصله اقلیدسی میان دو نقطه می‌باشد. برای مثال، $|x - x_j| = \sqrt{(x - x_j)^2}$. اکنون او نیاز داشت تا یک تابع درونیاب به فرم (۲.۲) برای فضای دوبعدی ایجاد کند. آنچه هاردی ایجاد کرد یک تابع درونیاب بر اساس انتقالهایی از تابع فاصله اقلیدسی در فضای دو بعدی بود. لذا برای n نقطه پراکنده متمایز $\{x_j, y_j\}_{j=1}^n$ و مقادیر