بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

دوگان مسئله برنامه ریزی کسری خطی چندهدفی

توسط:

مریم دهینی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا صافی

استاد مشاور:

دکتر سامان بابایی کفایی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به:

آن کس که بداند و بداند که بداند

وآن کس که نداند و بداند که نداند

و بخواهد که بداند

قدردانی

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

با سپاس فراوان از خانواده ی دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی ام را پشت سر بگذارم. باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد عزیزم جناب آقای دکتر محمدرضا صافی که با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده اند.

همچنین برخود لازم می دانم از جناب آقای دکتر سامان بابایی کفاکی که زحمت مشاوره اینجانب را به‌عهده داشتند، و همچنین از جناب آقایان دکتر سعید محمدیان و دکتر علی اشرفی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، سپاسگزاری نمایم.

در خاتمه از دوستان عزیزم که با کمک های بی دریغ خود بر غنای علمی این اثر افزودند کمال تشکر را دارم.

«پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر فرما»

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه، نظریه دوگان برای مسئله برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی است. در این خصوص ابتدا مدل های مختلف دوگان را در مسئله برنامه ریزی کسری خطی تک هدفی که تاکنون ارائه شده اند، بیان می کنیم و سپس به کمک لم فارکاس یک مدل دوگان برای مسئله کسری خطی چند هدفی معرفی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه ریزی کسری خطی، برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی، دوگان برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی، لم فارکاس.

لیست تصاویر

فهرست مطالب

پیشگفتار

برنامه ریزی کسری خطی در موارد فراوانی از جمله برنامه ریزی مالی، برنامه ریزی تولید و غیره کاربرد دارد. در این نوع برنامه ریزی نسبت دو تابع خطی در نظر گرفته می شود.
هدف این پایان نامه بررسی نظریه دوگان برای مسائل کسری خطی چند هدفی است. در واقع در برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی، تصمیم گیرنده چندین تابع هدف کسری خطی را در نظر می گیرد و هدف وی این است که همه این اهداف را بهینه کند.
در طول پنجاه سال گذشته، نظریه دوگان در مسائل بهینه سازی چند هدفی، پیشرفت قابل ملاحظه ای را تجربه کرده است. اهمیت تکنیک های دوگان در مسائل برنامه ریزی خطی، به خوبی شناخته شده است که مهمترین آنها، بدون شک، تفسیر جواب های دوگان با توجه به مسئله اولیه می باشد.
این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است:
در فصل اول ،ابتدا برنامه ریزی خطی و دوگان آن را مرور می کنیم و سپس به معرفی مسئله کسری خطی تک هدفی و مسئله کسری خطی چند هدفی می پردازیم. همچنین یک روش حل برای برنامه ریزی کسری خطی تک هدفی، تحت عنوان روش تغییر متغیر و یک روش حل برای برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی، تحت عنوان روش متغیر زبانی ارائه می دهیم.
در فصل دوم چندین روش برای بدست آوردن دوگان یک مسئله کسری خطی تک هدفی معرفی می کنیم و قضیه های دوگان از جمله قضیه دوگان ضعیف و قضیه دوگان قوی را به اثبات می رسانیم.[۴, ۷, ۱۰, ۲۱, ۲۲]
سرانجام در فصل آخر، با استفاده از لم فارکاس، یک مسئله دوگان برای مسئله کسری چند هدفی در دو حالت خطی و غیر خطی بیان می کنیم. [۱۳]

فصل ۱

مقدمات

۱-۱ حالت کلی برنامه ریزی خطی تک هدفی و دوگان

مسائل دنیای واقعی هر روز پیچیده تر می شوند و بدون استفاده از مدل سازی ریاضی و حل آن، دست یابی به جواب در اغلب این مسائل نا ممکن خواهد بود. برنامه ریزی خطی، یکی از بخش های مهم و شاید مهمترین بخش در برنامه ریزی ریاضی است. در کنار این که بسیاری از مسائل دنیای واقعی به صورت مسائل برنامه ریزی خطی قابل فرمول بندی هستند، برای حل مسائل غیر خطی نیز از تبدیل آن ها به مسائل برنامه ریزی خطی استفاده می شود.

در مسائل برنامه ریزی خطی، هدف بهینه سازی یک تابع خطی با در نظر گرفتن محدودیت هایی است که به صورت معادلات و نا معادلات خطی نوشته می شوند. ناحیه شدنی آن ها ، یک چند وجهی محدب است و از اشتراک تعداد متناهی نیم فضا، که هر یک توسط یک نامعادله ی خطی تعریف شده اند، حاصل می گردد. یک الگوریتم برنامه ریزی خطی به دنبال یافتن نقطه ای(در صورت وجود) از چند وجهی است که تابع هدف در آن نقطه، بیشترین یا کمترین مقدار را دارا باشد.

برنامه ریزی خطی برای اولین بار توسط کانترویچ [۱] در سال ۱۹۳۹ مطرح شد.کانترویچ اولین مسئله برنامه ریزی خطی را در سال۱۹۳۹، در طول جنگ جهانی دوم، به منظور کاهش هزینه های ارتش و افزایش خسارت به دشمن به کار برد. این روش، محرمانه باقی ماند تا زمانی که جرج ب. دانتزیک [۲] در

[۱] Leonid Cantorovich

[۲] George Bernard Dantzing

سال ۱۹۴۷، روش سیمپلکس را منتشر کرد و جان وون نیومن [1] نظریه دوگان را به عنوان جوابی برای بهینه سازی عددی مطرح و آن را در زمینه نطریه ی بازی ها اعمال نمود.
هر مسئله برنامه ریزی خطی را به فرم کلی زیر می توان نمایش داد:

$$\begin{aligned} (p) \quad Min \quad & z(x) = c^T x \\ s.t \quad & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

که در آن $\mathbf{c}^T = (c_1, \ldots, c_n)$ و $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ بردارهایی از $\mathbb{R}^n$، $\mathbf{b}$ برداری از $\mathbb{R}^m$ و A ماتریسی $m \times n$ می‌باشد. هدف مسئله، یافتن مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ است به گونه‌ای که همه‌ی محدودیت‌های مذکور را برآورده کرده و بهترین مقدار را برای $z(x)$ فراهم آورد. ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ را ضرایب هزینه و $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را متغیرهای تصمیم گویند.
متناظر با هر مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی، یک مسئله‌ی خطی دیگر نیز وجود دارد که آن را دوگان مسئله‌ی اصلی می‌نامیم$0 < t_0^*$. فرم کلی مسئله‌ی دوگان، با توجه به مسئله‌ی اولیه‌ی (p) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (D) \quad Max \quad & u(y) = yb \\ s.t. \quad & yA \leqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در آن y برداری از $\mathbb{R}^m$ است که بردار تصمیم دوگان نامیده می‌شود.
بین جواب‌های مسئله‌ی دوگان و مسئله‌ی اولیه، روابط مفیدی وجود دارد که از آن‌ها اطلاعات با ارزشی راجع به مسئله‌ی اولیه به دست می آید. روابط دو مسئله به اختصار در زیر آمده است:

قضیه ۱-۱.۱. دوگان دوگان، مسئله‌ی اولیه است.

قضیه ۱-۲.۱. (قضیه دوگان ضعیف) مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی دلخواه مسئله‌ی کمینه سازی، همواره، بزرگتر یا مساوی مقدار تابع هدف به ازای هرجواب شدنی دلخواه مسئله‌ی بیشینه‌سازی

[1] John Von Neumann

است.

قضیه ۱-۱.۳. اگر $\mathbf{x}_\circ$ و $\mathbf{y}_\circ$ به ترتیب جواب‌های شدنی مسائل اولیه و دوگان باشند به نحوی که $\mathbf{cx}_\circ = \mathbf{y}_\circ\mathbf{b}$ ، آنگاه $\mathbf{x}_\circ$ و $\mathbf{y}_\circ$ جواب‌های بهینه‌ی مسائل نظیرشان هستند.

قضیه ۱-۱.۴. اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان، مقدار تابع هدف نامتناهی داشته باشد، آنگاه دیگری جواب شدنی ندارد.

قضیه ۱-۱.۵. (قضیه قوی دوگان) اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهینه داشته باشد، آنگاه هر دو مسئله جواب بهینه دارند و مقادیر تابع هدف بهینه‌ی آن‌ها مساوی است.

قضیه ۱-۱.۶. (قضیه اساسی دوگان) دقیقا یکی از عبارات زیر صحیح است:

۱) دو مسئله دارای جواب‌های بهینه‌ی $\mathbf{x}^*$ و $\mathbf{y}^*$ با $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$ هستند؛

۲) یک مسئله با مقدار تابع هدف نامتناهی، در حالی که دیگری نشدنی است؛

۳) هر دو مسئله نشدنی است.

قضیه ۱-۱.۷. (قضیه مکمل زاید) فرض کنید $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ و $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ جواب‌های شدنی دلخواه مسائل اولیه و دوگان باشند. آنگاه $\mathbf{x}^*$ و $\mathbf{y}^*$ بهینه هستند اگر و تنها اگر:

$$y_i^*(a^i\mathbf{x}^* - b_i) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, m \quad \text{و} \quad (c_j - \mathbf{y}^*a_j)x_j^* = 0\ ,\ j = 1, \ldots, n$$

۱-۲ معرفی برنامه ریزی کسری خطی و کاربردهای آن

مسئله برنامه ریزی کسری خطی (LFP) حالت خاصی از دامنه گسترده برنامه ریزی ریاضی است که به طور مدون، اولین بار در سال۱۹۶۲ توسط چارنز [1] و کوپر [2] معرفی شد.[۱۰]

برنامه ریزی کسری خطی یک ابزار نیرومند برای فرموله کردن طیف گسترده ای از مسائل است و بسیاری از مسائل دنیای واقعی را می توان به صورت مسائل برنامه ریزی کسری خطی فرمول بندی کرد. کاربردهای (LFP)در شاخه های مختلف به خصوص در اقتصاد مشهود است. البته خطی بودن مساله موجب می شود برخورد با آن ساده تر بوده و بیشتر مورد توجه واقع شود. از آن جا که همه مسائل دنیای

[1] charnes

[2] cooper

واقعی در قالب خطی بودن توصیف نمی شود، لذا (LFP)عنوان برنامه ریزی غیر خطی مورد توجه است. این شاخه از برنامه ریزی غیر خطی به جهت دامنه وسیع دنیای واقعی که قابلیت فرموله شدن با آن را دارند توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است.
برنامه ریزی های کسری به خصوص کسری خطی در مسائل برنامه ریزی مالی و تصمیم گیری های مدیریت دارای کاربرد هستند. از جمله می توان به نمونه های زیر اشاره کرد :
. (الف) بیشینه سازی بازده:
فرض کنیم شرکتی n نوع کالا تولید می کند همچنین فرض می کنیم p_j سود به دست امده از هر واحد کالای نوع j ام و $p_۰$ سود ثابت شرکت باشد که مقدارش مستقل از حجم خروجی است. تولید یک واحد jام هزینه ای برابر d_j در بر دارد و هزینه ثابت شرکت برابر$d_۰$ است که مقدارش به فعالیت های تولیدی شرکت بستگی ندارد و در هر شرایطی حتی در صورت عدم تولید کالا باید پرداخته شود. فرض می کنیم b_i حجمi امین منبع در دسترس شرکت باشد و a_{ij} سهم هزینه منبع i برای تولید یک واحد از کالای نوع j ام باشد. شرکت باید تصمیم بگیرد چند واحد از هر کالا تولید کند تا نسبت سود کل به هزینه کل بیشینه شود.متغیر تصمیم x_jحجم خروجی کالای j ام به ازای $j = ۱, ۲, ..., n$ است.تابع هدف مساله به صورت نسبت سود کل شرکت به هزینه های کل شرکت تعریف می شود:

$$
\begin{aligned}
(P) \quad Max \qquad & Q(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{\sum_j p_j x_j + p_۰}{\sum_j d_j x_j + d_۰} \\
s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \mathbf{b_i} \\
& \mathbf{x_j} \geqslant ۰ \\
& i = ۱, \ldots, m \\
& j = ۱, \ldots, n
\end{aligned}
$$

(ب)بیشینه سازی بهره وری(تولید)

(ج) کمینه سازی نسبت هزینه به زمان

(د) بیشینه سازی خروجی به ورودی

(ه) کمینه سازی وام های خارجی به مجموع وام ها

.

۱-۳ مسئله برنامه ریزی کسری خطی تک هدفی

برنامه ریزی کسری خطی تک هدفی را به صورت زیر فرمول بندی می کنیم:

$$(P) \quad max \quad Z(\mathbf{x}) = \frac{c^T\mathbf{x}+\alpha}{d^T\mathbf{x}+\beta}$$

$$s.t \quad \mathbf{x} \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \circ\} \tag{۱-۳}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $c^T \in \mathbb{R}^n$ و $d^T \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ بردار منابع و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس ضرایب تکنولوژیکی است. تابع هدف مسئله به صورت خارج قسمت دو تابع خطی تعریف می شود. در این پایان نامه S را مجموعه ای کراندار فرض می کنیم.

تذکر ۱-۲.۱ چنانچه شرط مخالف صفر بودن مخرج برای تابع هدف برآورده شود، به دلیل محدب بودن فضای جواب شدنی، مخرج تغییر علامتی نخواهد داشت. بنابر این مخرج تابع هدف یا همواره مثبت و یا همواره منفی خواهد بود پس می توان مخرج را همواره مثبت در نظر گرفت. (اگر مخرج منفی باشد صورت و مخرج را در یک منفی ضرب می کنیم) یعنی:

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad d^T + \beta > \circ$

قضیه ۱-۳.۱. اگر مساله کسری خطی (۱-۳) جواب بهینه داشته باشد حداقل یک نقطه راسی ناحیه S وجود دارد که جواب بهینه مسئله است.

اثبات. به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

□

برای حل مسئله برنامه ریزی کسری خطی چندین روش وجود دارد که ابتدا تعدادی از آن ها را نام می بریم و سپس یکی از آنها را به طور کامل شرح می دهیم. برای مطالعه بیشتر می توانید به

مراجع[۱,۶,۲۶] مراجعه کنید. این روش ها عبارتند از:

۱.روش تغییر متغیر.

۲.روش هندسی.

۳.روش سیمپلکس محدب.

۴.الگوریتم گیلمور[۱] و گومری[۲] برای حل مسئله برنامه ریزی کسری خطی.

۵.روش پارامتری.

۶. روش راس مجاور.

۷. روش بهنگام کردن تابع هدف.

۸.روش تانتاوی[۳].

۱-۳-۱ روش تغییر متغیر

روش تغییر متغیر اولین بار توسط چارنز و کوپر در سال ۱۹۶۲ مطرح شد[۵].با فرض اینکه مخرج کسر تابع هدف در تمام نقاط ناحیه S مثبت است، روش تغییر متغیر چارنز و کوپر را برای حل مسئلهLFP (۱-۳) ارائه می دهیم. ابتدا قرار می دهیم:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{d^T x + \beta}$$

با اعمال این تغییر متغیر تابع هدف مسئله (۱-۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{Z} = c^T x + \alpha t$$

حال تغییر متغیر زیر را اعمال می کنیم:

$$\mathbf{Y} = tx$$

[۱] Gilmor

[۲] Gomery

[۳] Tantavi

لذا مسئله (۳-۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} min \quad & c^TY + \alpha t \\ s.t \quad & AY - bt = 0 \\ & d^TY + \beta t = 1 \\ & Y \geqslant 0, t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

که در آن $Y \in \mathbb{R}^n$، $t \in \mathbb{R}$ می باشند.نکته قابل توجه این است با اعمال تغییر متغیر های ذکر شده تعداد محدودیت های مسئله (۱-۳) از m به $m+1$ و تعداد متغیرهای مسئله مذکور از n به $n+1$ افزایش می یابد.مسئله (۱-۴) یک مسئله برنامه ریزی خطی است که با روش سیمپلکس قابل حل است.

قضیه ۱-۳.۲. اگر (y,t) جواب شدنی مسئله (۱-۴)باشد، آنگاه $t > 0$ خواهد بود.

اثبات. به مرجع [۲] مراجعه شود.

□

قضیه ۱-۳.۳. اگر (Y^*, t^*) جواب بهینه مسئله (۱-۴) باشد آنگاه $X^* = \dfrac{Y^*}{t^*}$ جواب بهینه مسئله کسری خطی (۱-۳) است.

اثبات. به مرجع [۲] مراجعه شود.

□

مثال. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
max \quad & z = \frac{\mathbf{8x_1 + 6x_2 - 5}}{\mathbf{-4x_1 + 2x_2 - 40}} \\
s.t \quad & \mathbf{x_1 + x_2 \leqslant 10} \\
& \mathbf{3x_1 - 5x_2 \leqslant 6} \\
& \mathbf{x_1, x_2 \geqslant 0}
\end{aligned}
$$

برای هر x از ناحیه شدنی$(-4\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} - 40 < 0)$. بنابراین مسئله خطی زیر را حل می کنیم:

$$
\begin{aligned}
max \quad & \mathbf{Z = -8y_1 - 6y_2 + 5t} \\
s.t \quad & \mathbf{y_1 + y_2 - 10t \leqslant 0} \\
& \mathbf{3y_1 - 5y_2 - 6t \leqslant 0} \\
& \mathbf{4y_1 - 2y_2 + 40t = 1} \\
& \mathbf{y_1, y_2 \geqslant 0, t \geqslant 0}
\end{aligned}
$$

جواب بهینه این مسئله به صورت$(y_1^*, y_2^*, t^*) = (0, 0, \frac{1}{40})$ است. لذا جواب بهینه مسئله کسری خطی $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$با مقدار هدف $Z^* = \frac{1}{8}$.است خلاصه آنکه در روش تغییر متغیر، حل مسئله برنامه ریزی کسری خطی از طریق حل یک مسئله هم ارز صورت می گیرد. روش مذکور کاملا کارا بوده و در صورتی که مسئله برنامه ریزی خطی متناظر دارای جواب بهینه باشد، مسئله برنامه ریزی کسری خطی نیز چنین خواهد بود.

۱-۴ مسئله برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی

در جهان واقعی، یک تصمیم گیرنده (DM) با مسائلی رو به رو می شود که باید چندین نسبت را بهینه کند. برای مثال در یک شرکت تولیدی باید نسبت های خروجی به هزینه، سود به هزینه، خروجی به کارگران و غیره بهینه شوند.
در این مواقع با مسئله ای سروکار داریم که دارای چندین تابع هدف است. اگر صورت و مخرج کسر هر دو خطی باشند آن گاه آن مسئله، مسئله کسری خطی چند هدفی $(MOLFP)$ نامیده می شود.
فرم عمومی یک مسئله برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} min(max) \quad & Z(\mathbf{x}) = (Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x}), ..., Z_k(\mathbf{x})) \\ s.t \quad & \mathbf{x} \in S = \{x \in \mathbb{R} \mid A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0\} \end{aligned} \tag{۱-۵}$$

بطوریکه S یک مجموعه کراندار و محدب است و

$$Z_i(x) = \frac{N_i(x)}{D_i(x)} = \frac{c_i^T x + \alpha_i}{d_i^T x + \beta_i} \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad k \geqslant 2$$

$$c_i^T, d_i^T \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

همانند مسئله برنامه ریزی تک هدفی فرض می کنیم برای هر i ، $d_i^T\mathbf{x} + \beta_i > 0$.
چون در مسئله $(MOLFP)$ همزمان باید چند تابع هدف بهینه شود جواب بهینه کارای قوی و ضعیف معرفی می شود که در زیر آنها را تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۴-۱. نقطه $\bar{x} \in S$ کارای قوی نامیده می شود اگر و فقط اگر هیچ x ای وجود نداشته باشدکه:

$$\forall i, \quad \frac{N_i(x)}{D_i(x)} \geqslant \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})}$$

و برای حداقل یک i داشته باشیم:

$$\frac{N_i(x)}{D_i(x)} > \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})}$$

تعریف ۱-۴.۲. نقطه $\bar{x} \in S$ ، کارای ضعیف نامیده می شود اگر و فقط اگر هیچ $x \in S$ ای وجود نداشته باشد که:

$$\forall i, \quad \frac{N_i(x)}{D_i(x)} > \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})}$$

برای حل مسئله $(MOLFP)$ روش های متفاوتی وجود دارد. در مرجع[۲] تعدادی از آنها بررسی شده است و این روش ها عبارتند از:

۱-روش برنامه ریزی آرمانی

۲-روش سری تیلور

۳-روش متغیر زبانی

۴-روش تعاملی

۵-روش برنامه ریزی فازی

حال روش متغیر زبانی را شرح می دهیم.

۱-۴-۱ روش متغیر زبانی

در این بخش به معرفی روشی می‌پردازیم که لوهانجولا[۱] در سال ۱۹۸۳ بیان کرد [۱۶]. این روش که براساس متغیرهای زبانی بیان می‌شود به همین نام یعنی روش متغیرهای زبانی معروف است. اما چون در این روش تضمینی برای کارایی جواب بهینه بدست آمده وجود نداشت، در سال ۱۹۹۲ داتا[۲] روش دیگری را با استفاده از متغیرهای زبانی بیان کرد که کارایی جواب بهینه را تضمین می‌کند [۹].

ما در این بخش، ابتدا متغیر زبانی را تعریف می‌کنیم و پس از بیان روش لوهانجولا، روش داتا را بیان می‌کنیم و در ادامه مثالی را با هر دو روش حل می‌کنیم.

ما در زبان طبیعی و در استدلال‌های محاوره ای از متغیرهایی که مقادیر آنها نادقیق و مبهم هستند بیشتر

[۱] Luhanjula

[۲] Dutta