وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

نمایش ماجرونا از گروه متقارن درجه ۴

استاد راهنما
دکتر قاسم صمدی آغداش

استاد مشاور
دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر
میثم ضیایی

مهر ماه ۱۳۹۱
تبریز- ایران

این صفحه عمدا خالی است

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم، شمع های فروزانی که شعله آنها چراغ راهم بود

بسمک القدوس قدسنی منی

الهی...

یکتای بی همتایی، قیوم توانایی، بر همه چیز بینایی، در همه حال دانایی، از عیب مصافایی، از شرک مبرایی، اصل هر دوایی، داروی دلهایی، شاهنشاه و فرمانروایی، به تو رسد ملک خدایی .

کجا باز یابیم آن‌روزی را که تو ما را بودی و من نبودم، تا باز رسم به آن‌روزی میان آتش و دودم، اگر بدو کیستی آن‌روز را یابم پرسودم و ربود خود را یابم به نبود خود خشنودم. از آن‌چه نخواستی چه آید و آن‌را که نخواندی کی آید، تلخ را چه سود اگرش آب خوش در جوار است و خار را چه حاصل از آن‌که بوی گل در کنار است.

اقرار کردم به مفلسی و هیچ‌کسی، ای یگانه که از هر لحاظ مقدسی، چه شود که اگر مفلسی را در نفس آخر و در اوج نیاز به فریاد رسی .

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

به تماشا سوگند و به آغاز کلام و به پرواز کبوتر از ذهن

واژه‌ای در قفس است!!!

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **قاسم صمدی آغداش** سپاس گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **قربانعلی حقیقت دوست**، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر **یوسف زمانی** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از برادران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند.

میثم ضیایی

مهر ماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

لیست جداول

چکیده

جبر گریس، جبر جابجایی غیرشرکت‌پذیر روی فضای برداری حقیقی از بعد ۱۹۶۸۸۴ می‌باشد، که گروه غول را به‌عنوان گروه خودریختی‌های خود دارد. این نوع جبر توسط ریاضی‌دان نامی، گریس در سال ۱۹۸۰ ساخته شد و متعاقباً در سال ۱۹۸۲، از آن برای ساخت گروه غول مورد استفاده واقع شد.
البته نکته‌ای که باید به‌آن اشاره کرد این‌است که گروه غول قبلاً در سال ۱۹۷۶ توسط فیشر و گریس ساخته شده بود، و چند ماه بعد مرتبه‌ی آن توسط گریس کشف گردید، و بعدها گریس گروه غول را به مانند گروه خودریختی‌های جبر گریس ساخت. جدول سرشت گروه غول، ۱۹۴ $\times$ ۱۹۴ آرایه‌ای بوده و توسط فیشر، دونالد و لینکستون به‌وسیله‌ی برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده توسط میشل تورن محاسبه شده‌است. همچنین گروه غول روی فضای برداری یک بعدی به‌طور بدیهی و روی مکمل متعامد آن در جبر گریس به‌طور تحویل‌ناپذیر و صادق عمل می‌کند. از سوی دیگر، گروه غول به‌عنوان گروه خودریختی‌های جبرعملگررأسی مونشین (که توسط لیپوسکی، مورمن، فرنکل و میاموتا ساخته شد)، شناخته شده‌است. انگیزه‌ی اصلی برای تولید مفهوم نمایش ماجرونا، نتایج قابل ملاحظه‌ی ساکوما است، که یک کلاس‌بندی از نمایش ماجرونای گروه دووجهی ارائه می‌دهد. در آن‌جا نه‌تای از این نوع نمایش‌ها موجود است، و هریک از آن‌ها بر پایه‌ی یک نشاننده از گروه‌های دووجهی در گروه غول استوار است.
در این پایان‌نامه قصد ما بررسی نمایش ماجرونا از گروه متقارن S_4 می‌باشد، که در واقع S_4- زیرجبرهای یک‌ریخت با انواعی از زیرجبرهای جبر گریس است. در این‌جا یک اصول‌بندی از نمایش ماجرونای گروه غول موجود است. این اصول‌بندی ما را قادر به مطالعه‌ی نمایش ماجرونا از گروه دلخواه G می‌سازد. این نمایش ممکن است موجود باشد یا نباشد، اما وقتی که G زیر گروهی از گروه غول است که توسط $2A$- برگردان‌های مشمول در G تولید شده است، نمایش همواره وجود دارد. در پایان نشان داده خواهد شد که چهار نوع یک‌ریخت از S_4- زیرجبرهای با انواع زیرجبرهای گریس موجود است. دوتای از این زیرجبرها از بعد ۱۳ و دوتای باقیمانده نیز از بعد ۹ و ۶ می‌باشند.
کلمات کلیدی: نمایش ماجرونا، گروه غول، جبر گریس.

مقدمه

هرچند نمایش ماجرونا [1] اولین‌بار توسط ایوانف [2] در [۶، ۵] مطرح گردید، اما این موضوع، البته نه تحت این نام، بلکه تحت عنوانی دیگر و در قالب جبر عملگر رأسی در [۱۲] و در سال **۲۰۰۷** توسط ساکوما [3] بررسی شده است، و در این‌جا ما تعمیمی از آن موضوع را با نام نمایش ماجرونا مورد مطالعه قرار می‌دهیم. البته نکته‌ی قابل ذکر این است که در فصل‌های (۱) و (۲) اندکی راجع به مفاهیم در [۱۲] نیز بحث خواهد شد.
همان‌طور که گفته شد جبر گریس [4] اولین بار توسط گریس در سال **۱۹۸۰** ساخته شد، و چیزی که در این پایان‌نامه به‌دنبال آن هستیم، مطالعه درباره‌ی زیرجبرهای یک‌ریخت با انواعی از زیرجبرهای جبر گریس می‌باشد. البته ذکر این مطلب خالی از فایده نمی‌باشد که قبل از ساکوما، میاموتا [5] نیز در [۸] و در سال **۱۹۹۶** در مفاهیمی مشابه با مفاهیم نمایش ماجرونا اما در قالب جبر عملگر رأسی، جبر گریس را مورد مطالعه قرار داده است.
هدف اصلی و درواقع موضوع اصلی این پایان‌نامه بررسی قضیه‌ی (۰.۱) می‌باشد.

قضیه ۰.۱ *گروه S_4 دقیقاً دارای چهار نمایش ماجرونا می‌باشد. تمامی این چهار نمایش برپایه‌ی یک نشانده از گروه S_4 در گروه غول استوار است.*

در فصل (۱) از این پایان‌نامه تعاریفی مقدماتی از انواع گروه‌ها، نمایش گروه، سرشت یک گروه، انواع جبرها و برخی مفاهیمی که در این پایان‌نامه ذکر آن‌ها ضروری می‌باشد، آورده شده‌است.
چیزی که باید به‌آن اشاره شود ملقمه‌ی غول می‌باشد که در فصل (۱) تعریف آن آورده شده‌است. در واقع بهترین روش برای درک صحیح گروه غول و رسیدن به تعریفی دقیقی از آن، تعریف این ملقمه است.
در فصل (۲) قضایایی در مورد جبرهای جابجایی غیرشرکت‌پذیر همراه با یک فرم دوخطی متقارن معین مثبت آورده شده است، و در برخی مواقع نیز این قضایا را درمورد حالت خاصی از

[1] Majorana
[2] Ivanov
[3] Sakuma
[4] Griess
[5] Miyamoto

این‌نوع جبرها یعنی جبر گریس بیان کرده‌ایم. قضایا و لم‌های موجود در این فصل اکثراً دارای اثبات می‌باشند، مگر در مواردی که آوردن برهان برای این مسائل، پایان‌نامه را از چهارچوب اصلی خارج می‌کند.
فصل (۳) نیز به تعریف نمایش ماجرونا، نمایش ماجرونای داخلی و خارجی اختصاص داده شده‌است. همچنین در این فصل گونه‌ی صریحی از قضیه‌ی ساکوما را نیز آورده‌ایم. باآوردن این قضیه تاحدودی ارتباط بین مفهوم نمایش ماجرونا و مفاهیم موجود در [۱۲] مشخص خواهد شد.
در فصل (۴) به‌طور اختصاصی به تعریف نمایش ماجرونا از گروه متقارن درجه‌ی چهار $S_۴$ پرداخته‌ایم. همچنین در راستای اثبات قضیه‌ی (۰.۱) این فصل را به دو بخش تقسیم می‌نمائیم، که بخش (۱.۴) نیز به چهار زیربخش مربوط به زیرجبرهای یک‌ریخت با انواعی از زیرجبرهای جبر گریس تقسیم شده است.

فصل ۱
مقدمات و تعریف‌ها

مقدمه: در این فصل مطالبی از نظریه‌ی‌گروه‌ها بیان گردیده که اغلب آن‌ها برای ما شناخته شده می‌باشند، ولی برای درک مفاهیمی که در فصل‌های بعدی آورده شده‌اند ذکر و یادآوری آن‌ها ضروری و لازم می‌باشد. در ابتدای این فصل تعریف اولیه گروه را آورده و در ادامه به معرفی گروه‌های پراکنده و به‌خصوص گروه غول پرداخته‌ایم. هم‌چنین درباره‌ی برخی از جبرها مطالبی هر چند اندک ولی به اندازه برای ادامه‌ی کار آورده شده‌است.

۱.۱ گروه‌ها

تعریف ۱.۱ *یک گروه عبارت‌است از مجموعه‌ی G همراه با یک عمل دوتایی (در این‌جا برای راحتی کار آن را ضرب درنظر می‌گیریم) که در شرایط زیر صدق می‌کند*

۱) *برای هر* $g, h \in G$ *داریم* $gh \in G$،

۲) *برای هر* $g, h, k \in G$ *داریم* $g(hk) = (gh)k$،

۳) *عنصرهمانی* $e \in G$ *وجود دارد به‌طوری‌که برای‌هر* $g \in G$،

$$eg = ge = g,$$

۴) *برای‌هر* $g \in G$ *عضو وارون* $g^{-۱} \in G$ *وجود دارد به‌طوری‌که*

$$gg^{-۱} = g^{-۱}g = e.$$

بعلاوه اگر برای هر $g, h \in G$ *شرط* $gh = hg$ *برقرار باشد آن‌گاه* G *را یک گروه آبلی می‌گویند.*

نکته ۱.۲ *تعداد اعضای یک گروه را مرتبه‌ی آن گروه گفته و بسته به این‌که تعداد اعضای گروه متناهی یا نامتناهی باشد، گروه را (از مرتبه‌ی) متناهی یا نامتناهی می‌گویند.*

حال در این مکان قصد ما ارائه‌ی چند مثال از انواع گروه‌هایی است که در این پایان‌نامه از آن‌ها به وفور استفاده خواهدشد.

مثال ۱.۱ ۱) *گروه‌های دووجهی: این نوع از گروه‌ها به گروه دوران‌ها و انعکاس‌ها مشهور بوده و مرتبه‌ی آن‌ها $2n$ می‌باشد، که با D_{2n} نمایش داده می‌شوند،*

$$D_{2n} =< a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} > .$$

۲) *گروه‌های متقارن از درجه‌ی n : این گروه‌ها را با S_n نمایش داده و عبارتند از مجموعه‌ی جایگشت‌ها روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, ..., n\}$ که عمل روی آن‌ها همان ترکیب معمولی توابع می‌باشد. این گروه‌ها از مرتبه $n!$ می‌باشند.*

در عالم جبر انواع دیگری از گروه‌ها موجود می‌باشند که در صورت لزوم به آن‌ها اشاره خواهیم‌کرد، و چون هدف این پایان‌نامه معرفی کامل انواع گروه‌ها نمی‌باشد، از کنار این موضوع عبور کرده و فقط در پاراگراف زیر به نوع دیگری از گروه، که به گروه هیولا یا به‌طور دوستانه‌تر غول شهرت دارد، اشاره‌ای خواهیم‌کرد.

گروه غول از نوع گروه‌های پراکنده که زیرمجموعه‌ای از گروه‌های ساده است، می‌باشد. علت انتخاب نام پراکنده برای این گروه‌ها این می‌باشد که هر کدام از گروه‌های ساده خانواده‌ای نامتناهی از گروه‌های ساده‌ی متناهی می‌باشند، اما هیچ‌یک از گروه‌های پراکنده عضوی از خانواده‌ی گروه‌های ساده نیستند.
در حدود صد سال پیش تنها گروه‌های پراکنده، گروه‌های ماتیو M_{11}, M_{22}, M_{23} و M_{24} بودند که توسط امیل ماتیو [1] در سالهای ۱۸۶۱ و ۱۸۷۳ توصیف گردیده‌اند.
یکی از مسائل عمده که در نظریه‌ی نمایش گروه‌ها به اثبات رسیده است، پیدا کردن جدول سرشت M_{24} توسط فربینیوس [2] می‌باشد. او هم‌چنین نشان داد که تمامی گروه‌های ماتیو زیرگروهی از M_{24} می‌باشند.
حال دوباره به مفهوم گروه غول برمی‌گردیم. همان‌طور که گفته شد این گروه از دسته‌ی گروه‌های پراکنده بوده و توسط فیشر [3] و گریس به‌عنوان یک گروه پراکنده از بزرگترین مرتبه کشف گردید. مرتبه‌ی این گروه عبارت‌است از:

$$\text{۸۰۸۰ ۱۷۴۲۴ ۷۹۴۵۱ ۲۸۷۵۸ ۸۶۴۵۹ ۹۰۴۹۶ ۱۷۱۰۷ ۵۷۰۰۵ ۷۵۴۳۶ ۸۰۰۰۰ ۸۰۰۰۰} =$$
$$۲^{۴۶}.۳^{۲۰}.۵^{۹}.۷^{۶}.۱۱^{۲}.۱۳^{۳}.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹.۳۱.۴۱.۴۷.۵۹.۷۱$$

[1] Emil Mathieu
[2] Frobenious
[3] Ficsher

علامت اختصاری گروه	مرتبه	نام کاشف	A
$M_{۱۱}$	$۲^{۴}.۳^{۲}.۵.۱۱$	ماتیو	۱
$M_{۱۲}$	$۲^{۶}.۳^{۳}.۵.۱۱$	ماتیو	۲
$M_{۲۲}$	$۲^{۷}.۳^{۲}.۵.۷.۱۱$	ماتیو	۲
$M_{۲۳}$	$۲^{۷}.۳^{۲}.۵.۷.۱۱.۲۳$	ماتیو	۱
$M_{۲۴}$	$۲^{۱۰}.۳^{۳}.۵.۷.۱۱.۲۳$	ماتیو	۱
$J_{۲}$	$۲^{۷}.۳^{۳}.۵^{۲}.۷$	هال- یانکو	۲
Suz	$۲^{۱۳}.۳^{۷}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳$	سوزوکی	۲
HS	$۲^{۹}.۳^{۲}.۵^{۳}.۷.۱۱$	هیگمن-سیمز	۲
MCL	$۲^{۷}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷.۱۱$	مک لافلن	۲
$Co_{۳}$	$۲^{۱۰}.۳^{۷}.۵^{۳}.۷.۱۱.۲۳$	کانوی	۱
$Co_{۲}$	$۲^{۱۸}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷.۱۱.۲۳$	کانوی	۱
$Co_{۱}$	$۲^{۲۱}.۳^{۹}.۵^{۴}.۷^{۲}.۱۱.۱۳.۲۳$	کانوی- لیچ	۱
He	$۲^{۱۰}.۳^{۳}.۵^{۲}.۷^{۳}.۱۷$	هلد- هایمن- مکوی	۲
$Fi_{۲۲}$	$۲^{۱۷}.۳^{۹}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳$	فیشر	۲
$Fi_{۲۳}$	$۲^{۱۸}.۳^{۱۳}.۵^{۲}.۷.۱۱.۱۳.۱۷.۲۳$	فیشر	۱
$Fi'_{۲۴}$	$۲^{۲۱}.۳^{۱۶}.۵^{۲}.۷^{۳}.۱۱.۱۷.۱۳.۲۳.۲۹$	فیشر	۲
HN	$۲^{۱۴}.۳^{۶}.۵^{۶}.۷.۱۱.۱۹$	هاردا- نورتون	۲
Th	$۲^{۱۵}.۳^{۱۰}.۵^{۳}.۷^{۲}.۱۳.۱۹/۳۱$	تامپسون	۱
BیاBM	$۲^{۴۱}.۳^{۱۳}.۵^{۶}.۷^{۲}.۱۱.۱۳.۱۷.۱۹.۲۳.۳۱.۴۷$	فیشر-لئون	۱
M	$۲^{۴۶}.۳^{۲۰}.۵^{۹}.۷^{۶}.۱۱^{۲}.۱۳^{۳}.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹.۳۱.۴۱.۴۷.۵۹.۷۱$	فیشر- گریس	۱
$J_{۱}$	$۲^{۳}.۳.۵.۷.۱۱.۱۹$	یانکو	۱
ON	$۲^{۹}.۳^{۴}.۷^{۳}.۵.۱۱.۱۹.۳۱$	انان	۲
$J_{۳}$	$۲^{۷}.۳^{۵}.۵.۱۷.۱۹$	یانکو- مکوی	۲
Ly	$۲^{۸}.۳^{۷}.۵^{۶}.۷.۱۱.۳۱.۳۷.۶۷$	لیونز	۱
Ru	$۲^{۱۴}.۳^{۳}.۵^{۳}.۷.۱۳.۲۹$	رودوالیس- والز	۱
$J_{۴}$	$۳۱.۳۷.۴۳$	یانکو، پارکر بنسون، کنوی، تاکاری	۱

جدول ۱.۱ : گروه‌های پراکنده

در جدول (۱.۱) **۲۶** گروه پراکنده را آورده‌ایم؛ در این جدول یک ستون برای نام کاشف گروه، در کنار آن یک ستون برای مرتبه‌ی گروه و ستون آخر نیز برای نام اختصاری گروه تخصیص یافته است، هم‌چنین ستون A نیز نشان‌دهنده‌ی مرتبه‌ی خودریختی‌های بیرونی گروه‌های موجود در جدول می‌باشد. حال در این‌جا بحث در مورد انواع گروه‌ها و هم‌چنین گروه‌های پراکنده را به پایان رسانده و اطلاعات بیشتر در [۳] موجود می‌باشد.

۲.۱ نظریه نمایش گروه‌ها

قصد ما در این قسمت گریزی مختصر بر مفاهیم مربوط به نظریه‌ی نمایش گروه‌ها مانند G و FG - مدول‌ها، نمایش یک گروه، سرشت‌ها و جدول سرشت یک گروه می‌باشد.

تعریف ۱.۳ *یک نمایش از گروه G روی میدان دلخواه F عبارت‌است از هم‌ریختی*

$$\rho : G \longrightarrow GL_n(F),$$

n را درجه‌ی ρ می‌گویند.

تعریف ۱.۴ *دو نمایش $\rho : G \longrightarrow GL_n(F)$ و $\sigma : G \longrightarrow GL_m(F)$ را هم‌ارز می‌نامیم هرگاه*

۱. $n = m$،

۲. *یک ماتریس معکوس‌پذیر مانند T موجود باشد به‌طوری‌که برای‌هر $g \in G$*

$$g\sigma = T^{-۱}(g\rho)T.$$

تعریف ۱.۵ *نمایش $\rho : G \longrightarrow GL_۱(F)$ بدیهی نام‌دارد هرگاه برای‌هر $g \in G$ داشته‌باشیم:*

$$g\rho = (۱).$$

هم‌چنین نمایش $\rho : G \longrightarrow GL_n(F)$ را صادق می‌نامند هرگاه $Ker\rho = \{۱\}$ ، که در آن ۱ عنصرهمانی گروه می‌باشد.

تعریف ۱.۶ *فرض کنید G یک گروه و V یک فضای برداری روی میدان دلخواه F باشد (که بعداً آن را $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ درنظر خواهیم گرفت)، اگر نگاشتی مانند $\sigma : G \times V \longrightarrow V$*

$$\sigma(g, v) = gv$$

موجود باشد که برای‌هر $g, h \in G$ ، $v, v_1, v_2 \in V$ و $\lambda \in F$ ،
در شرایط زیر صدق کند

۱. $(gh)v = g(hv)$ ،

۲. $g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2$ ،

۳. $g(\lambda v) = \lambda(gv)$ ،

۴. $1v = v$ ،

آن‌گاه V را یک G - مدول می‌گویند.

مثال ۱.۲ [۷] (صفحه ۳۹) *اگر $\rho : G \longrightarrow GL_2(F)$ یک نمایش از گروه D_8 و $V = F^2$ فضای برداری مورد نظر ما باشد آن‌گاه با تعریف زیر می‌توان یک G - مدول ساخت؛*

$$vg = v(g\rho), \quad \forall v \in V, \ \forall g \in G$$

قضیه ۱.۱ *فرض کنید V یک فضای برداری با پایه‌ی $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ می‌باشد و هم‌چنین $v_i g$ برای هر $i \in \{1, \cdots, n\}$ ، تعریف شده‌است و داریم*

۱. *برای‌هر* $g \in G$ $\quad v_i g \in V$ ،

۲. *برای‌هر* $g, h \in G$ $\quad v_i(gh) = (v_i g)h$ ،

۳. $v_i 1 = v_i$ ،

۴. $(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \cdots + \lambda_n(v_n g)$ ،

که در آن برای‌هر $\lambda_i \in F$، . آن‌گاه V یک G - مدول می‌باشد.

برهان : v و u را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

که در آن برای‌هر i ، λ_i و μ_i اعضایی از میدان F هستند. حال برای اثبات قضیه کافی است که شرایط موجود در تعریف (۱.۶) را مورد بررسی قراردهیم.

۱. $vg = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i g) \in V$ ،

۲. $v(gh) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)(gh) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i(gh)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ((v_i g)h) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i g))h =$
$$((\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)g)h = (vg)h,$$

۳. $(v+u)g = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i)g = (\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)v_i)g = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)(v_i g) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i g) +$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (v_i g) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)g + (\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i)g = vg + ug,$$

۴. $v1 = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i 1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = v$.

□

تعریف ۱.۷ *اگر $X = \{1, \cdots, n\}$، $G \leq S_X$ و V یک فضای برداری روی میدان F با پایه‌ی مرتب $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ باشد، آن‌گاه با تعریف $v_i g = v_{ig}$، V تبدیل به یک G-مدول می‌شود که به آن مدول جایگشتی می‌گویند.*

تعریف ۱.۸ *فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و G یک گروه باشد. آن‌گاه V را یک FG-مدول می‌گوییم هرگاه برای‌هر $v \in V$ و هر $g \in G$، vg تعریف شود و در شرایط زیر صدق نماید*

۱. $vg \in V$،

۲. $v(gh) = (vg)h$،

۳. $(u+v)g = ug + vg$،

۴. $(\lambda v)g = \lambda(vg)$،

۵. $v1 = v$،

که در آن $u, v \in V$، $\lambda \in F$ و $g, h \in G$.

نکته ۱.۹ *تنها تفاوت G- مدول با FG- مدول در این‌است که با حذف شرط ضرب اسکالر، G- مدول برای گروه‌های جمعی آبلی نیز تعریف می‌گردد. در واقع تعریفی که در این‌جا ارائه گردیده است یک حالت کلی برای G- مدول می باشد، اما FG- مدول برای فضای برداری تعریف می‌شود، به عبارتی دیگر تعریف FG- مدول به میدان F بستگی دارد. از این گفته‌ها نتیجه می‌گیریم که تمام قضایای G- مدول‌ها و FG- مدول‌ها یکسان می‌باشند.*

حال فرض کنید V یک FG- مدول باشد، نگاشت $\theta : V \longrightarrow V$ را با ضابطه‌ی $\theta : v \longrightarrow vg$ برای‌هر