

سلام الغزالي



به نام خدا

مطالعه و بررسی فرمول تعمیم یافته جدید چگالی تراز هسته ای

به وسیله ی:

لیلا مومن زاده گلوندانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی  
از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

فیزیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر زهره کارگر، استادیار بخش فیزیک (استاد راهنما)

دکتر عزیز بهکامی، استاد بخش فیزیک

دکتر نادر قهرمانی، استاد بخش فیزیک

دکتر عبدالناصر ذاکری، استاد بخش فیزیک

شهریورماه ۱۳۸۷

با سپاس فراوان از زحمات استاد ارجمند؛

**سرکار خانم دکتر زهره کارگر**

که در کلیه مراحل پژوهش و نگارش این پایان

نامه راهنمای من بودند.

با تشکر از اساتید محترم؛

**جناب آقای دکتر عزیز بهگامی،**

**جناب آقای دکتر نادر قهرمانی**

**و جناب آقای دکتر عبدالناصر ذاکری**

که زحمت داوری این رساله بر عهده ایشان

بود.

## چکیده

### مطالعه و بررسی فرمول تعمیم یافته جدید چگالی تراز هسته ای

به وسیلهٔ :

### لیلا مومن زاده گلوندانی

اخیراً روش تعمیم یافته ای برای محاسبهٔ چگالی تراز هسته ای پیشنهاد شده است. این محاسبات شامل تعمیم روش معروف تبدیل لاپلاس است. با استفاده از عبارت جدید فرمول معروف بت چگالی تراز هسته ای در بازه های عدد جرمی ۴۱-۲۴، ۷۰-۵۵، ۱۰۴ و ۱۱۴ محاسبه و با داده های تجربی مقایسه شده است. این نتایج همچنین با فرمول بت و با مقادیر مناسب و مختلف از پارامترهای مدل *BSFG* مقایسه گشته است. بررسی ها نشان می دهد که نتایج حاصله با داده های تجربی بخوبی مطابقت دارد و این مسئله بر اعتبار روش جدید دلالت دارد. لذا تقریب های مختلف برای انجام تبدیلات معکوس لاپلاس چند بعدی معادل هم می باشند.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: مقدمه
۵	فصل دوم: محاسبه چگالی تراز با استفاده از تابع پارش
۶	۱-۲: تابع پارش ساده
۹	۲-۲: تابع پارش بزرگ
۱۴	۳-۲: فرمیون های بدون برهم کنش (گاز فرمی)
۱۷	۴-۲: مدل فواصل مساوی
۲۱	۵-۲: چگالی حالت برای یک سیستم با دو نوع فرمیون
۲۷	۶-۲: چگالی لایه ای
۲۹	۷-۲: مدل گاز فرمی شیفیت داده شده به عقب
۳۱	فصل سوم: محاسبه چگالی تراز با استفاده از فرمول تعمیم یافته جدید
۳۲	۱-۳: بدست آوردن چگالی حالت با فرمول جدید
۳۵	۲-۳: چگالی حالت هسته با $Z$ پروتون و $N$ نوترون
۳۸	۳-۳: چگالی لایه ای هسته با $Z$ پروتون و $N$ نوترون با استفاده از فرمول جدید
۳۹	فصل چهارم: روش انجام محاسبات
۷۹	فصل پنجم: نتایج
۸۳	مراجع

## فهرست جدول ها

صفحه	عنوان
	جدول ۴-۱- پارامتر چگالی هسته ای $a$ و $\Delta$ ، برای هسته های مورد مطالعه از گروه های مختلف :
۴۲ .....	Avriganu, Ignatyuke, Egidy[43], Egidy[42] گروه های

## فهرست شکل ها

صفحه	عنوان
۴۳	شکل ۱-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{24}Na$ .....
۴۳	شکل ۲-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{27}Al$ .....
۴۴	شکل ۳-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{24}Mg$ .....
۴۴	شکل ۴-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{25}Mg$ .....
۴۵	شکل ۵-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{28}Si$ .....
۴۵	شکل ۶-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{29}Si$ .....
۴۶	شکل ۷-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{30}P$ .....
۴۶	شکل ۸-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{31}P$ .....
۴۷	شکل ۹-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{32}P$ .....
۴۷	شکل ۱۰-۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{32}S$ .....



شکل ۴-۱۱: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{33}S$ .....	۴۸
شکل ۴-۱۲: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{37}Ar$ .....	۴۸
شکل ۴-۱۳: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{38}Ar$ .....	۴۹
شکل ۴-۱۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{40}K$ .....	۴۹
شکل ۴-۱۵: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{41}Ca$ .....	۵۰
شکل ۴-۱۶: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{55}Mn$ .....	۵۰
شکل ۴-۱۷: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{56}Fe$ .....	۵۱
شکل ۴-۱۸: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{56}Fe$ .....	۵۱
شکل ۴-۱۹: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{57}Co$ .....	۵۲
شکل ۴-۲۰: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{60}Ni$ .....	۵۲
شکل ۴-۲۱: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{69}As$ .....	۵۳
شکل ۴-۲۲: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته $^{70}Ge$ .....	۵۳

- شکل ۴-۲۳: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته  $^{104}Pd$  ..... ۵۴
- شکل ۴-۲۴: چگالی تراز هسته ای تئوری به ازاء «پارامتر چگالی هسته ای» مختلف و نتایج تجربی برای هسته  $^{114}Sn$  ..... ۵۴
- شکل ۴-۲۵: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{24}Na$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۵۵
- شکل ۴-۲۶: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{24}Mg$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۵۶
- شکل ۴-۲۷: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{25}Mg$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۵۷
- شکل ۴-۲۸: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{27}Al$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۵۸
- شکل ۴-۲۹: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{28}Si$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۵۹
- شکل ۴-۳۰: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{29}Si$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۶۰
- شکل ۴-۳۱: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{30}P$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۶۱
- شکل ۴-۳۲: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{31}P$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۶۲
- شکل ۴-۳۳: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{32}P$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۶۳
- شکل ۴-۳۴: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{32}S$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۶۴
- شکل ۴-۳۵: مقایسه چگالی تراز هسته  $^{33}S$  با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف ..... ۶۵

شکل ۴-۳۶: مقایسه چگالی تراز هسته $^{37}Ar$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۶۶
شکل ۴-۳۷: مقایسه چگالی تراز هسته $^{38}Ar$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۶۷
شکل ۴-۳۸: مقایسه چگالی تراز هسته $^{40}K$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۶۸
شکل ۴-۳۹: مقایسه چگالی تراز هسته $^{41}Ca$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۶۹
شکل ۴-۴۰: مقایسه چگالی تراز هسته $^{55}Mn$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۰
شکل ۴-۴۱: مقایسه چگالی تراز هسته $^{56}Fe$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۱
شکل ۴-۴۲: مقایسه چگالی تراز هسته $^{56}Fe$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۲
شکل ۴-۴۳: مقایسه چگالی تراز هسته $^{57}Co$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۳
شکل ۴-۴۴: مقایسه چگالی تراز هسته $^{60}Ni$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۴
شکل ۴-۴۵: مقایسه چگالی تراز هسته $^{69}As$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۵
شکل ۴-۴۶: مقایسه چگالی تراز هسته $^{70}Ge$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۶
شکل ۴-۴۷: مقایسه چگالی تراز هسته $^{104}Pd$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۷
شکل ۴-۲۶: مقایسه چگالی تراز هسته $^{114}Sn$ با نتایج آزمایشی و نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف	۷۸

چگالی تراز<sup>۱</sup> (دانشیته سطوح) هسته ای در فیزیک هسته ای کاربرد های گوناگون و وسیعی دارد و از اهمیت بالایی برخوردار است. طی شصت سال اخیر مطالعات فراوانی روی چگالی هسته ای انجام گرفته است [۱،۲،۳]. چگالی تراز هسته ای نقش مهمی در تخمین سرعت واکنش هسته ای، محاسبات آماری اختر فیزیک و انرژی متوسط برخورد یون های سنگین ایفا می کند. به طور خاص چگالی تراز هسته ای در محاسبه سطح مقطع برخورد [۴] در گیراندازی<sup>۲</sup> نوترون و پروتون [۵] و محاسبات مدل هسته در فیزیک هسته ای موفق بوده است.

سطوح انرژی هسته ای را می توان با توجه به میزان انرژی برانگیختگی<sup>۳</sup> به دو ناحیه، سطوح انرژی با انرژی برانگیختگی بالا و انرژی برانگیختگی پایین تقسیم نمود. این تقسیم از آن جا ناشی می شود که برای تجزیه و تحلیل هر کدام روش های جداگانه ای به کار گرفته می شود. روش بنیاب سنجی<sup>۴</sup> که برای سطوح با انرژی برانگیختگی پایین و روش آماری<sup>۵</sup> که برای سطوح با انرژی برانگیختگی بالا مورد استفاده قرار می گیرد.

از خصوصیات سطوح با انرژی برانگیختگی پایین می توان به تعداد کم و جدایی قابل تشخیص و سادگی تجزیه و تحلیل آن ها نام برد، برای بررسی آن ها روش بنیاب سنجی بسیار مناسب بوده و اطلاعات ارزشمندی راجع به نحوه قرار گرفتن نوکلئونها و اندرکنش<sup>۶</sup> باقی مانده به ما می دهد. با زیاد شدن انرژی برانگیختگی فاصله بین سطوح به طور چشمگیری کاهش یافته و نحوه تجزیه و

---

<sup>1</sup>. Nuclear Level Density

<sup>2</sup>. Capture

<sup>3</sup>. Excitation Energy

<sup>4</sup>. Spectroscopic

<sup>5</sup>. Statistical

<sup>6</sup>. Residual Interactions

تحلیل آن‌ها پیچیده‌تر می‌شود. فاصله متوسط این سطوح  $10^6$  مرتبه کوچک‌تر از مقداری است که مدل تک‌ذره‌ای مستقل به ما می‌دهد (در هسته‌های  $A \sim 100$ ).

وجود چنین ترازهای پیچیده‌ای را می‌توان بوسیله رزونانس تسخیر نوترون مشاهده کرد. در واقع این آزمایشات و شواهد تجربی دیگر نشان می‌دهد که ما برای توصیف هسته به تعداد درجات آزادی زیادی نیاز داریم. این مشاهدات در واقع مفهوم هسته مرکب [۶] که بوسیله بور [۷،۸] ابداع شد را تأیید می‌کند که در این حالت سیستم برهم کنشی (هسته+نوترون)، یک پیکربندی با ساختار بسیار پیچیده‌ای بنام هسته مرکب را پدید می‌آورند که مستقل از چگونگی تشکیل خود و امی باشد. در واقع هسته مرکب در یک مجموعه از برهم کنش‌های چنان پیچیده‌ای بوجود می‌آید که احتمالاً جزئیات مرحله اولیه تشکیلش را بخاطر نمی‌آورد، از اینرو واپاشی اش باید مستقل از نحوه تشکیلش باشد.

با توجه به این توصیفات و شواهد تجربی لازم است که روش بنیاب سنجی در مقایسه با روش آماری که توضیح جامع‌تری از هسته مرکب و نحوه واپاشی<sup>۱</sup> آن می‌دهد کنار گذاشته شود.

از دیدگاه آماری، مهمترین کمیتی که خواص آماری هسته را توضیح می‌دهد، چگالی تراز سیستم می‌باشد که برحسب تابعی از تعداد ذرات، تکانه زاویه‌ای<sup>۲</sup>، ایزواسپین<sup>۳</sup> و ... بیان می‌شود [۹]. از نظر تئوری محاسبات چگالی تراز هسته‌ای بوسیله بت<sup>۴</sup> [۲] پایه‌گذاری شد و پس از آن مطالعات زیادی روی چگالی تراز هسته‌ای [۱۰، ۱۱، ۱۲] انجام شد و با استفاده از تابع پارش<sup>۵</sup> گسترش یافت.

در ساده‌ترین شکل چگالی تراز هسته‌ای برای حالتی که در آن هسته به صورت گازی از فرمیون‌های بدون برهم‌کنش که در حجم هسته محبوس می‌باشد مورد بررسی قرار گرفت که ساده‌ترین فرم مدل گاز فرمی، بصورت مدل با فواصل مساوی است [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱].

---

<sup>1</sup>. Decay

<sup>2</sup>. Angular Momentum

<sup>3</sup>. Isospin

<sup>4</sup>. Bethe

<sup>5</sup>. Partition Function

در این مدل بت نشان داد که با فرض مشخص بودن چگالی ترازهای انرژی تک ذره‌ای ( $g$ ) چگالی ترازهای هسته بر حسب ( $g$ ) به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(U) = \frac{\pi}{12} \frac{e^{2\sqrt{aU}}}{a^{1/4} U^{3/4}}$$

که در آن  $a = \frac{\pi^2}{6} g$  پارامتر چگالی تراز هسته ای<sup>۱</sup> [۱۷،۱۸] و  $U$  انرژی برانگیختگی می‌باشد. گاهی انرژی برانگیختگی را با  $E^*$  نشان می‌دهند.

در هر صورت در مدل ساده اولیه بت کمبودهایی وجود دارد، به عنوان مثال اثرات لایه‌ای و زوجیتی و تغییر شکل [۱۹] و همچنین اصلاحات مربوط به تعیین فاکتور قطع اسپینی<sup>۲</sup> [۲۰] در نظر گرفته نشده است.

برای بهبود بخشیدن اعتبار محاسبات چگالی هسته ای روش های پیچیده ای بر اساس نگرش های آماری و استفاده از مدل های واقعی تر از چگالی تراز تک ذره ای پیشنهاد شد [۲۱،۲۲،۲۳،۱۷]. اما این مدل ها مخصوصاً به خاطر وابستگی خیلی قوی آنها به انتخاب پتانسیل تک ذره ای خالی از تردید نبودند و بخوبی با داده های آزمایشگاهی جور نمی‌شوند.

از طرف دیگر تلاش های زیادی برای حل این مشکل بوسیله نگرش های نیمه تجربی صورت پذیرفت که این تلاش ها یا بصورت تصحیح و بهبود پارامترهای فرمول های مدل فواصل مساوی و یا با معرفی تصحیحات لایه ای بر حسب انرژی بصورت شیفت دادن انرژی حالت پایه انجام پذیرفت. در واقع برای همخوانی با داده های تجربی، چندین تصحیح با در نظر گرفتن اثرات لایه ای و زوجیتی و تغییر شکل بر روی فرمول اولیه بت انجام شد که در نهایت منجر به مدل مشهور « گاز فرمی به عقب شیفت داده شده »<sup>۳</sup> [۱۹،۲۴] شد.

<sup>1</sup>. Nuclear Level density Parameter

<sup>2</sup>. Spin Cut off Factor

<sup>3</sup>. Back Shifted

اخيراً محاسبه تعمیم یافته‌ای برای چگالی تراز هسته‌ای پیشنهاد شده است. این محاسبات شامل تعمیم روش معروف تبدیل لاپلاس<sup>۱</sup> است. با استفاده از فرمول معروف بت چگالی تراز هسته‌ای برخی از هسته‌ها محاسبه و با فرمول قبلی و نیز با داده‌های تجربی مقایسه می‌شوند. همچنین دقت و بازه انرژی مربوط بررسی خواهد شد.

در فصل دوم این رساله روش کلی برای محاسبه چگالی تراز ارائه شد و سپس این روش برای ساده ترین مدل هسته ای که همان گاز فرمی است، با یک نوع ذره مستقل بکار برده شد، و در ادامه چگالی تراز برای سیستمی با دو نوع فرمیون محاسبه می‌شود. در فصل سوم چگالی تراز هسته ای با روش جدید محاسبه می‌شود. در فصل چهارم روش انجام محاسبات با استفاده از معادلات بدست آمده از فصل سوم بیان می‌شود. نتایج چگالی تراز تئوری به ازاء پارامتر چگالی هسته ای مختلف و نتایج تجربی و همچنین نتایج حاصل از محاسبات گروه های مختلف در نمودار های چگالی تراز بر حسب انرژی برانگیختگی در شکل های (۴-۱) تا (۴-۴) نشان داده می‌شود. در فصل پنجم نتایج بدست آمده از محاسبات مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

---

<sup>۱</sup>.Laplace Transform

# فصل دوم

محاسبه چگالی تراز با استفاده از تابع پارش



۲- محاسبه چگالی تراز<sup>۱</sup> با استفاده از تابع پارش

۱-۲- تابع پارش ساده

هرگاه یک سیستم با مقادیر ویژه انرژی  $E_1, E_2, \dots, E_i$  داشته باشیم، برای چنین سیستمی با

طیف انرژی گسسته  $E_i$  تابع پارش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(\beta) = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (1-2)$$

اگر هسته برانگیخته<sup>۲</sup> را به صورت یک سیستم در حال تعادل در نظر بگیریم  $\beta$  عکس دما است.

و چگالی حالت<sup>۳</sup> را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از یک سری توابع دلتای دیراک نمایش داد:

$$\omega(E) = \sum_i \delta(E - E_i) \quad (2-2)$$

که این در یک فاصله انرژی که تعداد زیادی حالات را شامل می‌شود متوسط‌گیری شده است. معادله

(۱-۲) را می‌توان با استفاده از معادله (۲-۲) به صورت زیر نوشت:

$$Z(\beta) = e^{\beta E_1} + \dots + e^{-\beta E_i} = \int_0^{\infty} \omega(E) e^{-\beta E} dE \quad (3-2)$$

---

<sup>1</sup>. Level density  
<sup>2</sup>. Excited Energy  
<sup>3</sup>. State density

زیرا هرچه تعداد ترازها زیاد شود، فاصله بین آنها کم می‌شود و  $Z(\beta)$  تقریباً پیوسته در نظر گرفته می‌شود.  $\omega(E)dE$  تعداد حالت‌هایی است که بین انرژی  $E$  و  $E+dE$  قرار دارد. برای بدست آوردن  $\omega(E)$  می‌توان تبدیل لاپلاس معادله (۲-۳) را معکوس کرد.

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Z(\beta) e^{\beta E} d\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\ln Z(\beta) + \beta E} d\beta \quad (۴-۲)$$

با توجه به این واقعیت که انتگرال ده تابعی از  $\beta$  است برای محاسبه انتگرال ده از تقریب نقطه زینی<sup>۱</sup> [۱۳] استفاده می‌کنیم. بنابراین عمده‌ترین نقش را در انتگرال ده، ناحیه کوچکی حول نقطه پایدار<sup>۲</sup>،  $\beta_0$  خواهد داشت.

$$\left( \frac{\partial (e^{\beta E} Z(\beta))}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} = 0$$

$$\left( EZ(\beta) e^{\beta E} + \frac{\partial Z(\beta)}{\partial \beta} e^{\beta E} \right)_{\beta_0} = 0$$

$$\left[ e^{\beta E} \left( EZ(\beta) + \frac{\partial Z(\beta)}{\partial \beta} \right) \right]_{\beta_0} = 0$$

$$EZ(\beta_0) + \frac{\partial Z(\beta_0)}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\frac{\partial Z(\beta_0)}{Z(\beta_0)} \frac{1}{\partial \beta_0} + E = 0$$

$$\frac{\partial \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0} + E = 0 \quad (۵-۲)$$

با تغییر متغیر  $f(\beta) = \ln Z(\beta) + \beta E$  و بسط آن حول نقطه  $\beta_0$  تا مرتبه دوم خواهیم داشت:

$$f(\beta) = \ln Z(\beta_0) + \beta_0 E + \frac{\partial f}{\partial \beta_0} (\beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_0^2} (\beta - \beta_0)^2 \quad (۶-۲)$$

<sup>۱</sup>. Saddle Point Approximation

<sup>۲</sup>. Stationary Point

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0} + E = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta_0^2} = \frac{\partial^2 \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0^2} \quad (7-2)$$

با جایگزین کردن معادلات (۶-۲) و (۷-۲) در معادله (۴-۲) خواهیم داشت:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp \left\{ \ln Z(\beta_0) + \beta_0 E + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^2 \frac{\partial^2 \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0^2} \right\} d\beta \quad (8-2)$$

با تغییر متغیر  $B = \frac{\partial^2 \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0^2}$  داریم:

$$\omega(E) = \frac{\exp(\ln Z(\beta_0) + \beta_0 E)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp \left[ \frac{1}{2} B (\beta - \beta_0)^2 \right] d\beta$$

با تغییر متغیر  $d\beta = d\beta'$ ،  $\beta_0 = i\beta_0'$ ،  $\beta = i\beta'$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp \left( \frac{1}{2} B (\beta - \beta_0)^2 \right) d\beta &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp \left( \frac{1}{2} B (\beta^2 - \beta_0^2 - 2\beta\beta_0) \right) d\beta \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} B \beta_0^2 \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp \left( \frac{1}{2} B \beta'^2 - B \beta_0' \beta' \right) d\beta \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} B \beta_0^2 \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\frac{1}{2} B \beta'^2 + B \beta_0' \beta'} d\beta \end{aligned}$$

از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 \pm \beta x} dx &= \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\beta^2 / 4\alpha} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} B \beta'^2 + B \beta_0' \beta'} &= \left( \frac{\pi}{\frac{1}{2} B} \right)^{\frac{1}{2}} e^{B^2 \beta_0'^2 / 2B} = \left( \frac{2\pi}{B} \right)^{\frac{1}{2}} e^{B \beta_0'^2 / 2} \\ i \int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{1}{2} B \beta'^2 - B \beta_0' \beta'} &= i \left( \frac{2\pi}{B} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{B \beta_0'^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\omega(E) = \frac{\exp\{\ln Z(\beta_0) + \beta_0 E\}}{\left\{2\pi \frac{\partial^2 \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0^2}\right\}^{1/2}} \quad (9-2)$$

با استفاده از این رابطه، با داشتن تابع پارش ساده و انرژی و دما می توانیم چگالی حالت را به دست آوریم.

در مکانیک آماری کمیت  $\ln Z(\beta_0) + \beta_0 E = S$  آنترופی سیستم ترمودینامیکی تعریف می شود و مقدار  $\beta$  در نقطه پایدار  $\beta_0$  مساوی با عکس دمای سیستم است.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\beta_0} \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial}{\partial E} \{\ln Z(\beta_0) + \beta_0 E\} \\ &= \frac{\partial \beta_0}{\partial E} \frac{\partial}{\partial \beta_0} \{\ln Z(\beta_0)\} + \beta_0 + E \frac{\partial \beta_0}{\partial E} \\ &= \frac{\partial \beta_0}{\partial E} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_0} [\ln Z(\beta_0)] + E \right\} + \beta_0 \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (9-2) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \beta_0 = \frac{1}{T} \quad (10-2)$$

با مشتق گیری از معادله (9-2) و جایگزینی آن در معادله (10-2)،  $\omega(E)$  را می توان به صورت

زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0} = -E &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left( \frac{\partial \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0} \right) = -\frac{\partial E}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 \ln Z(\beta_0)}{\partial \beta_0^2} &= -\frac{\partial E}{\partial \beta_0} \\ \omega(E) &= \frac{\exp(S)}{\left(-2\pi \frac{\partial E}{\partial \beta_0}\right)^{1/2}} \quad (11-2) \end{aligned}$$