دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

موضوع:

زیرمدول های اول از مدول های آرتینی

نگارش:

محمد سالاری

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد نیک مهر

اردیبهشت ۱۳۹۱

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: درباره ی زیرمدول های اول مدول های آرتینی

استاد راهنما: دکتر محمد جواد نیک مهر

نام دانشجو: محمد سالاری

شماره دانشجویی: ۸۸۰۴۱۹۴

اینجانب محمد سالاری دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

۱– حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می باشد. هرگونه کپی برداری به‌صورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز است.

۲– کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا زیرمدول های اول و زیرمدول های اول ضعیف از مدول های آرتینی را دسته‌بندی می‌کنیم. سپس بعضی نتایج ارزشمند روی مدول های اول را تعمیم می‌دهیم.

کلمات کلیدی : مدول های ثانویه، بعد مدول ها، مدول های ضربی، زیر مدول های اول، بعد کاهش یافته ی مدول ها، زیر مدول های اول ضعیف.

فهرست مندرجات

مقدمه

زیر مدول های اول به عنوان تعمیمی از مفهوم ایده‌آل های اول به مدول ها مطرح شده اند و تحقیقاتی در این زمینه از سال ۱۹۸۴ توسط ث. پ. لو[1] با ارائه ی مقاله ی زیرمدول های اول از مدول ها آغاز شد. بعد از آن ریاضیدانان متعددی به این شاخه از جبر علاقه مند شده و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. در این پایان نامه سعی شده مباحث اساسی در زیرمدول های اول، انواع آن و ارتباط آن ها با هم دیگر آورده شود.

این پایان نامه شامل چهار فصل بوده و در سرتاسر آن حلقه ها جابه جا یی و یک دار و مدول ها یکال می باشند.

در فصل اول مختصری از تعاریف و مفاهیم کلیدی از حلقه و مدول و فضا یای مربوطه را که برای فصل های بعدی ضروری هستند ارائه می‌کنیم. برای تهیه ی مطالب فصل اول از مراجع [۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۰, ۲۱] استفاده شده است.

در فصل دوم، ابتدا مدول های ضربی را معرفی کرده و پاره ای از خصوصیات مهم آن ها را مطالعه خواهیم کرد. مدول های ضربی رده ی بسیار با اهمیتی در نظریه ی مدول ها بوده که دارای خصوصیات زیبایی می باشند. سپس شکل همه ی زیر مدول های اول و بیشین از یک R−مدول ضربی را بر حسب ایده‌آل های اول و بیشین حلقه ی R، کاملاً مشخص می کنیم و نتیجه ی ۴.۲.۲ که مدول های ضربی آرتینی دوری هستند اثبات می شود. هم چنین زیر مدول های اول از مدول های

---

[1] C. P. Lu

ضربی وفادار مورد بررسی قرار می گیرد. برای تهیه ی مطالب فصل دوم از مرجع [۱۲] استفاده شده است.

در فصل سوم زیر مدول های چگال را معرفی کرده و قضیه ی ۱.۱.۳ اثبات می شود که هر مدول شبه انژکتیو یک $\pi-$ مدول است، هم چنین رابطه ی بین مدول اول و دامنه ی ددکیند[۲] طی قضیه ی۲.۲.۳ بررسی می شود. برای تهیه ی مطالب فصل سوم از مرجع [۲۲] استفاده شده است.

در فصل چهارم انواع زیر مدول هاو رابطه ی بین آن ها مورد بحث قرار داده می شود و گزاره هایی در این رابطه اثبات می شود. سپس قضیه ی اجتناب از ایده‌آل های اول به زیر مدول های اول تعمیم داده می شود. زیر مدول های اول را برای مدول های آرتینی مورد بحث قرار می دهیم. سپس مدول های زنجیری را معرفی کرده و مبحث بعد و بعد کاهش یافته ی مدول ها را بیان می کنیم. هم چنین تعمیمی از گزاره های ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ را بیان می کنیم. برای تهیه ی مطالب فصل چهارم از مراجع [۱۱, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹] استفاده شده است.

---

[۲] Dedekind

فصل ۱

پیش نیازها

دراین فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی از حلقه و مدول و انواع آن ها را بیان کرده هم چنین از قضایای مورد نیاز در فصل های بعد را ذکر می کنیم.

۱.۱ حلقه

تعریف ۱.۱.۱ عمل دوتا یی برمجموعه‌ای چونS، تابعی است ازحاصلضرب دکارتی$S \times S$ به S. اگر $\star$ عملی دوتا یی برS باشد، آن گاه برای تمام زوج های مرتب$s_1, s_2 \in S$ مقدار$s_1 \star s_2$ به طور یگانه تعریف می شودومتعلق به S است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیدR مجموعه ای دلخواه باشد، که برآن دوعمل دوتایی موسوم به جمع وضرب تعریف شده‌است وآن هابه ترتیب با$+$ و. نمایانده شوند. دراین صورت R یک حلقه نسبت به این اعمال نامیده می شود هرگاه ویژگی های زیربرقرارباشند.

(۱) قوانین انجمنی: برای هر$r_1, r_2, r_3 \in R$،

$$r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3, r_1.(r_2.r_3) = (r_1.r_2).r_3.$$

(۲) قانون جابه جایی (برای جمع): برای هر$r_1, r_2 \in R$،

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1.$$

(۳) قوانین پخشی: برای هر$r_1, r_2, r_3 \in R$،

$$r_1.(r_2 + r_3) = r_1.r_2 + r_1.r_3, (r_1 + r_2).r_3 = r_1.r_3 + r_2.r_3.$$

(۴) اعضای همانی: مجموعهR حاوی اعضای ۰و۱(نه لزوماًمتمایز) است که به ترتیب صفر عضو همانی جمعی ویک عضوهمانی ضربی نامیده می شوند، به قسمی که برای هر$r \in R$،

$$r + 0 = r, 0 + r = r$$

و

$$r.1 = r, 1.r = r.$$

(۵) وارون های جمعی: برای هر$r \in R$، معادلات

$$r + x = 0, x + r = 0$$

دارای جوابی چونx درR اندکه وارون جمعیr نامیده شده وبا$-r$ نمایش داده می شود.

می توان تعریف حلقه ی R رامختصراًاین چنین بیان کردکهRتحت جمع گروهی آبلی است، ودارای ضربی است که درقوانین انجمنی وپخشی صدق می کند. علاوه براین فرض می شودکهR دارای عضوهمانی ضربی است. توجه مابه این که هرحلقه یک گروه آبلی تحت جمع است به منزله برقراری قانون حذف برای جمع، یگانگی عضو همانی جمعی و وجود وارون جمعی برای هرعضو است.

سایرویژگی های مندرج درفهرست زیر رامی توان به سادگی تحقیق کرد.

فرض کنیدR حلقه ای باشد که $r_1, r_2, r_3 \in R$.

(الف) اگر$r_1 + r_2 = r_1 + r_3$، آن گاه$r_2 = r_3$.

(ب) اگر$r_1 + r_2 = 0$، آن گاه $r_2 = -r_1$.

(ج) اگر$r_1 + r_2 = r_1$، آن گاه $r_2 = 0$.

(د) برای هر$r \in R$ داریم $r.0 = 0$.

(ه) برای هر$r \in R$ داریم$(-1).r = -r$.

(و) برای هر$r \in R$ داریم$-(-r) = r$.

(ز) برای هر$r_1, r_2 \in R$ داریم$(-r_1).(-r_2) = r_1 r_2$.

هرحلقه تنهایک عضو همانی ضربی دارد. زیرااگر$1 \in R$ و$1' \in R$ و هردودرتعریف عضوهمانی ضربی صدق کنند، آن گاه $1' = 1.1'$ زیرا۱ یک عضوهمانی ضربی است و$1 = 1.1'$ زیرا$1'$ یک عضوهمانی است. درنتیجه $1 = 1.1' = 1'$، که نشان می دهد۱یگانه عضوی است که درتعریف صدق می کند.

مجموعه های متنوعی ازاعدادابتدایی ترین مثال های حلقه‌هارافراهم‌می سازند. دراین مجموعه‌ها عمل ضرب جابه جایی است. مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ ازاعدادصحیح بایداولین مثال یک حلقه باشد. دراین حلقه ماویژگی اضافی این که اگر$z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ آن گاه $z_1 z_2 \neq 0$ راداریم. مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ ازاعدادگویا، مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ ازاعدادحقیقی، ومجموعه‌ی $\mathbb{C}$ ازاعدادمختلط نیزتشکیل حلقه می دهندودرهریک ازاین حلقه ها هرعضوناصفردارای وارون ضربی است.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد.

(الف) حلقه‌ی R جابه جایی نامیده می شودهرگاه $r_1 r_2 = r_2 r_1$ برای هر$r_1, r_2 \in R$.

(ب) حلقه‌ی R دامنه‌ی صحیح خوانده می شودهرگاه R جابه جایی باشد، $1 \neq 0$ و $r_1 r_2 = 0$ ایجاب نماید$r_1 = 0$ یا$r_2 = 0$ برای هر$r_1, r_2 \in R$.

(ج) حلقه‌ی R میدان نامیده می شودهرگاهR دامنه‌ی صحیحی باشدکه در آن برای هرعضوناصفر$r \in R$ عضوی چون $r^{-1} \in R$ وجودداشته باشد به قسمی که$r.r^{-1} = 1$.

برطبق تعریف فوق، $\mathbb{Z}$ یک دامنه‌ی صحیح است، امایک میدان نیست. مجموعه های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و$\mathbb{C}$میدان هستند زیرادرهرمجموعه‌وارون هرعضوناصفرمجدداًدر آن‌مجموعه‌است. حلقه‌ی $F[x]$ازچندجمله‌ای ها باضرایب دریک میدان F مثال دیگری ازیک دامنه‌ی صحیح است که میدان نمی باشد.

اگرقانون حذف برای ضرب درحلقه ای جابه جایی چون R برقرارباشد، آن گاه $r_1r_2 = 0$ برای هردوعضو$r_1, r_2 \in R$ ایجاب می کند $r_1 = 0$ یا$r_2 = 0$. برعکس چنان چه این شرط برقرارباشد و$r_1r_2 = r_1r_3$ آن گاه $r_1(r_2 - r_3) = 0$. لذااگر$r_1 \neq 0$ آن گاه $r_2 - r_3 = 0$ و$r_2 = r_3$. بنابراین دریک حلقه‌ی R که $0 \neq 1$ قانون حذف برای ضرب معتبراست اگروتنها اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد. ملاحظه می شود که هرمیدان دامنه‌ای صحیح‌است زیرا وجودوارون های ضربی برای‌اعضای ناصفرموجب برقراری قانون حذف است.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید R حلقه و S زیر مجموعه ای نا تهی از R باشد. در این صورت S زیر حلقه ی R است اگر تحدید عمل جمع و ضرب R بهS به ترتیب عمل جمع و ضرب روی S به وجود آورد و به علاوه S، با این عمل جمع و ضرب حلقه باشد.

فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت $\{0\}$ و R زیر حلقه های بدیهی R نام دارند. زیر حلقه ای از R مثل S را سره می گوییم اگر$S \neq R$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیدR وS دوحلقه باشند.

(الف)تابع $f : R \longrightarrow S$ را همریختی حلقه ای گویند هرگاه برای هر $r_1, r_2 \in R$:

(۱) $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$.

(۲) $f(r_1r_2) = f(r_1)f(r_2)$.

(۳) $f(1_R) = f(1_S)$.

(ب) همریختی حلقه ای f تکر یختی است هرگاه یک به یک باشد.

(ج) همریختی حلقه ای f بروریختی است هرگاه پوشا باشد.

(د) همریختی حلقه ای f یکریختی است هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

اگریک یکریختی از R به S موجود باشد، آن گاه R با S به عنوان حلقه یکریخت است.

فرض کنید R و R' دو حلقه و $f : R \longrightarrow R'$ همر یختی حلقه ای باشند. در این صورت به ازای زیر حلقه ای مثل S ازR، تصویر S تحت f، یعنی

$$f(S) = \{f(s)|s \in S\}$$

رادر نظر می گیریم به راحتی می توانیم نشان دهیم که $f(S)$ زیر حلقه ای از R' است در حالت خاص، زیر حلقه ی $f(R)$ از R' را با Imf نشان می دهیم و تصویر f نامیده می شود.

فرض کنید R و R' دو حلقه و $f : R \longrightarrow R'$ همر یختی حلقه ای باشند. در این صورت به ازای زیر حلقه ای مثل S' ازR' تصویر معکوس S' تحت f، یعنی

$$f^{-1}(S') = \{r \in R|f(r) \in S'\}$$

رادر نظر می گیریم به راحتی می توانیم نشان دهیم که $f^{-1}(S')$ زیر حلقه ای از R است در حالت خاص، زیرحلقه ی $f^{-1}(\{0\})$ از R رابا $Kerf$ نشان می دهیم و هسته‌ی f نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۶ فرض کنید R یک حلقه باشد. یک زیرمجموعه‌ی ناتهی I ازR یک ایده آل R خوانده می شود هرگاه

(۱) برای هر$i_1, i_2 \in I$، $i_1 + i_2 \in I$.

(۲) برای هر $i \in I$ وهر $r \in R$، $ir, ri \in I$.

برای هرحلقه ی R واضح است که مجموعه‌ی $\{0\} = (0)$ یک ایده آل است که ما از آن به عنوان ایده آل بدیهی یاد خواهیم کرد. هم چنین بدیهی است که مجموعه ی R خود یک ایده آل است.

فرض کنید $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ گردایه ای غیر تهی از ایده آل های R باشد. از تعریف ایده آل روشن است که $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ ایده آلی از Rاست.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $H\subseteq R$. ایده آل تولید شده توسط H را که با (H) نشان می دهند عبارت است ازاشتراک تمام ایده آل های R که شامل H هستند.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید I و J ایده آل هایی ازحلقه ی R باشند.

(الف) حاصل ضرب IJ ایده آل تولید شده توسط مجموعه ی $\{ij|i\in I, j\in J\}$ می باشد.

(ب)حاصل جمع $I+J$ ایده آل تولید شده توسط مجموعه ی $\{i+j|i\in I, j\in J\}$ می باشد.

(ج) ایده آل $(I:J)=\{r\in R|rJ\subseteq I\}$ ایده آل خارج قسمت خوانده می شود.

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنید R حلقه ای جابه‌جایی و $\emptyset\neq H\subseteq R$ باشد، آن گاه

$$(H)=\{\sum_{i=۱}^{n} r_i h_i : n\in N, r_۱,...,r_n\in R, h_۱,...,h_n\in H\}$$

هم چنین $(\emptyset)=\{۰\}$ ایده آل صفر از R است.

برهان : (گزاره‌ی ۱۸.۲ از [۲۱] ملاحظه شود). □

لم ۱.۱.۱ فرض کنید R و S حلقه های جابه‌جایی و$f:R\longrightarrow S$ همریختی حلقه ای باشد، در این صورت هسته ی f ایده آلی از R است.

برهان : (لم ۱.۲ از [۲۱] ملاحظه شود). □

لم ۲.۱.۱ فرض کنید R و S حلقه های جابه‌جایی و$f:R\longrightarrow S$ همریختی حلقه ای باشد $Ker f=\{۰_R\}$ اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.

برهان : (لم ۲.۲ از[۲۱] ملاحظه شود). □

لم ۳.۱.۱ فرض کنید R و S حلقه های جابه‌جایی و$f : R \longrightarrow S$ همر یختی حلقه ای و J ایده آلی از S باشد در این صورت $f^{-1}(J) = \{r \in R | f(r) \in J\}$ ایده آلی از R است.

برهان : (لم ۲.۱.۴۱ از [۲۱] ملاحظه شود). □

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید R و S حلقه های جابه‌جایی و$f : R \longrightarrow S$ همر یختی حلقه ای باشد.

(الف) هرگاه J ایده آلی از S باشد ایده آل $f^{-1}(J)$ رابا J^c نشان داده و آن را تحدید(انقباض) J به R گویند.

(ب) هرگاه I ایده آلی از R باشد ایده آل $f(I)S$ را با I^e نشان داده و آن را توسیع (گسترش) I به S گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱ عبارتی به صورت $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ...$ که $(I_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ایده آل هایی از R هستند زنجیری افزایشی (صعودی) از ایده آل ها در R با شروع از I_0 گویند. هرگاه شمول ها به صورت اکید باشد آن را زنجیری اکیداً افزایشی از ایده آل ها در R با شروع از I_0 گویند. وقتی زنجیر فوق به I_n خاتمه پیدا کند آن را زنجیری افزایشی از ایده آل ها در R با شروع از I_0 و خاتمه در I_n گویند. درحالت کاهشی (نزولی) تعریف ها مشابه است.

تعریف ۱۱.۱.۱ یک حلقه ی R در شرط زنجیر افزایشی (ACC) روی ایده آل هاصدق می کند (نوتری است.) هرگاه برای هر زنجیر افزایشی $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ...$ از ایده آل ها در R، عدد $n \in \mathbb{N}_0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $i \geq n$، $I_i = I_n$.

یک حلقه ی R در شرط زنجیر کاهشی (DCC) روی ایده آل هاصدق می کند (آرتینی است.) هرگاه برای هر زنجیر کاهشی $I_0 \supseteq I_1 \supseteq ...$ از ایده آل ها در R، عدد $n \in \mathbb{N}_0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $i \geq n$، $I_i = I_n$.

اگر I ایده آلی درحلقه‌ی R باشد، آن گاه I زیرگروهی ازگروه جمعی R است لذا هم دسته های I در R یک گروه آبلی $\frac{R}{I}$ معین می کنند. هم دسته های I با نماد جمعی و به شکل $r+I$ برای اعضای $r \in R$ نمایانده می شوند.

قضیه ۱.۱.۱ برای ایده آل I از حلقه R گروه آبلی $\frac{R}{I}$ دارای یک ساختارطبیعی حلقه است.

برهان : (قضیه‌ی ۵.۲.۱ از[۱۰] ملاحظه شود). $\square$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید I ایده آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت$\frac{R}{I}$ همراه باجمع وضرب هم دسته های I، به حلقه‌ی خارج قسمتی R به پیمانه I موسوم است.

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ آشناترین حلقه‌ی خارج قسمتی است که برای آن نماد$\mathbb{Z}_n$ را به کار خواهیم برد.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنید I ایده آلی ازحلقه‌ی R باشد. در این صورت،

(i) یک تناظر یک به یک بین ایده آل های $\frac{R}{I}$ وایده آل های R که شامل I هستند وجود دارد.

(ii) هرگاه J ایده آلی ازR باشد به طوری که $I \subseteq J \subseteq R$، آن گاه $(\frac{R}{J}) \cong \frac{(\frac{R}{I})}{(\frac{J}{I})}$.

برهان : (گزاره‌ی ۹.۲.۱ از[۱۰] ملاحظه شود). $\square$

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید I ایده آلی سره در یک حلقه R باشد.

(الف) ایده آل I یک ایده آل بیشین ازR نامیده می شود هرگاه برای هر ایده آل J از R به قسمی که $I \subseteq J \subseteq R$، داشته باشیم $J=I$ یا $J=R$.

(ب) حلقه‌ی R یک حلقه‌ی ساده نامیده می شود هرگاه ایده آل صفر($\circ$) یک ایده آل بیشین در R باشد.

به طور مشابه ایده آل $I \neq (\circ)$ یک ایده آل کمین از R نامیده می شود هرگاه برای هر ایده آل J از R به قسمی که $(\circ) \subseteq J \subseteq I$، داشته باشیم $J=I$ یا $J=(\circ)$.

گزاره ۳.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی ازحلقه R باشد.

(i) ایده‌آل I یک ایده‌آل بیشین از R است اگر و تنها اگر حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ یک حلقه ساده باشد.

(ii) اگر R حلقه ای جابه جایی باشد، آن گاه I یک ایده‌آل بیشین است اگرو تنها اگرحلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ یک میدان باشد.

برهان : (گزاره‌ی ۱۱.۲.۱ از[۱۰] ملاحظه شود). □

تعریف ۱۴.۱.۱ حلقه ی جابه جایی R را که دقیقاًیک ایده‌آل بیشین دارد موضعی می گوییم.

تعریف ۱۵.۱.۱ در حلقه‌ی جابه جایی R اشتراک همه ایده‌آل های بیشین را رادیکال جیکوبسن[1] گویند و با $Jac(R)$ نشان می دهند.

لم ۴.۱.۱ فرض کنید R حلقه ای جابه جایی باشد و $r \in R$. در این صورت $r \in Jac(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $r' \in R$، $1 - rr'$ عضو وارون پذیر R باشد.

برهان : (لم ۱۷.۳از [۲۱] ملاحظه شود). □

تعریف ۱۶.۱.۱ ایده‌آل های $I_1, ..., I_n$ از حلقه‌ی R کوماکزیمال خوانده می شوند هر گاه برای هر $j \neq k$ داشته باشیم $I_j + I_k = R$.

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه‌ی باقیمانده‌ی چینی) فرض کنید $I_1, ..., I_n$ ایده‌آل های کوماکزیمال در حلقه‌ی R باشند.

(i) حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{(\bigcap_{j=1}^{n} I_j)}$ یکریخت است با $(\frac{R}{I_1}) \oplus ... \oplus (\frac{R}{I_n})$.

(ii) اگر R جابه جایی باشد، آن گاه $\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$.

[1] Jacobson

برهان : (قضیه‌ی ۱.۲.۱۲ از [۱۰] ملاحظه شود).

تعریف ۱.۱.۱۷ فرض کنید P ایده‌آلی سره از حلقه‌ی جابه جایی R باشد. گوییم P ایده‌آلی اول از R است هرگاه برای همه $r_1, r_2 \in R$ ، $r_1 r_2 \in P$ ایجاب نماید $r_1 \in P$ یا $r_2 \in P$.

مجموعه‌ی ایده‌آل های اول حلقه ی R را با $Spec(R)$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۱.۱۸ ارتفاع یک ایده‌آل اول P از حلقه ی R برابر n است$htP = n$، هرگاه زنجیر $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n = P$ به طول n از ایده‌آل های اول حلقه ی R بزرگ ترین طول را داشته باشد اگر چنین زنجیری وجود نداشته باشد، $htP = \infty$.

تعریف ۱.۱.۱۹ بعد کرول حلقه ی R را بانماد $dimR$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شود هر گاه$Spec(R) \neq \emptyset$، برابرسوپرمم مجموعه ی ارتفاع های تمام ایده‌آل های اول از R است و اگر $Spec(R) = \emptyset$ تعریف می کنیم $dimR = -1$.

گزاره ۱.۱.۴ ایده‌آل سره‌ی P از حلقه‌ی جا به جایی R مفروض است.

(i) ایده‌آل P ایده‌آلی اول از R است اگر و تنها اگربرای همه ایده‌آل های I و J از R، $IJ \subseteq P$ ایجاب نماید $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

(ii) ایده‌آل P ایده‌آلی اول از R است اگر و تنها اگر حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{P}$ دامنه ای صحیح باشد.

(iii) اگر P ایده‌آلی بیشین از R باشد، آن گاه P ایده‌آلی اول از R است.

برهان : (گزاره‌ی ۱.۳.۲ از[۱۰] ملاحظه شود). □

اگر R حلقه ای جابه جایی باشد، آن گاه R دامنه ای صحیح است اگر و تنها اگر ایده‌آل صفر از R ایده‌آلی اول باشد. این ملاحظه مثالی فراهم می کند یعنی ایده‌آل صفر از $\mathbb{Z}$، که ایده‌آلی اول است ولی بیشین نیست.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنید D دامنه‌ای صحیح‌باشد. در این صورت رده‌های هم‌ارزی مجموعه‌ی

$$\{(a,b)|\ a,b\in D,\ b\neq 0\}$$

تحت رابطه هم ارزی تعریف شده به وسیله $(a,b)\sim(c,d)$ اگر $ad=bc$، با $[a,b]$ نمایانده خواهد شد. مجموعه ی تمام چنین رده های هم ارزی با $Q(D)$ نمایانده خواهد شد.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید D دامنه ای صحیح است. در این صورت $Q(D)$ میدانی است که زیر حلقه ای یکریخت باD راشامل است.

برهان : (قضیه‌ی ۵.۳.۱ از[۱۰] ملاحظه شود). □

تعریف ۲۱.۱.۱ میدان $Q(D)$ تعریف شده در تعریف ۲۰.۱.۱ به میدان خارج قسمتی یا میدان کسرهای D موسوم است. کلاس های هم ارزی $[a,b]$ از $Q(D)$ عموماًبا$\frac{a}{b}$ یاab^{-1} نمایانده خواهند شد.

اگر نماد $\frac{a}{b}$ را به کار ببریم، آن گاه عضوی چون $d\in D$ را با کسر $\frac{d}{1}$ یکی گرفته و می توان D را زیر حلقه ای از$Q(D)$ بگیریم.

تعریف ۲۲.۱.۱ دامنه‌ی صحیحی، واجد این ویژگی که هر ایده‌آل‌سره ی آن را بتوان به صورت حاصل ضرب تعداد متناهی از ایده‌آل های اول نوشت، موسوم به دامنه‌ی ددکیند[۲] است.

مثال ۱.۱.۱ دامنه ی ایده آل اصلی، دامنه‌ی ددکیند است.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید D دامنه ی صحیحی با میدان کسرهای K باشد. یک ایده‌آل تقسیمی از D یک $D-$ زیر مدول I از K است هرگاه $0\neq d\in D$ موجود باشد که $dI\subseteq D$.

تعریف ۲۴.۱.۱ یک ایده‌آل تقسیمی I از دامنه ی صحیح D وارون پذیر است هرگاه ایده‌آل تقسیمی J از D موجود باشد که $IJ=R$.

[۲] Dedekind

قضیه ۴.۱.۱ شرایط زیر روی یک دامنه ی صحیح D هم ارزند.

(i) D دامنه ای ددکیند است.

(ii) هر ایده‌آل غیر صفر در D وارون پذیر است.

برهان : (قضیه ی ۱۰.٦ از [۱۴] ملاحظه شود). □

تعریف ۲۵.۱.۱ می گوییم که زیر مجموعه S از حلقه‌ی جابه جایی R ضربی بسته است اگر

(۱) $1 \in S$.

(۲) اگر $s_1, s_2 \in S$، آن گاه $s_1 s_2 \in S$.

لم ۵.۱.۱ فرض کنید R حلقه ای جابه‌جایی و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $\sqrt{I} = \{r \in R | \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}$ ایده‌آلی از R شامل I است.

برهان : (لم ۴٦.۳ از [۲۱] ملاحظه شود). □

تعریف ۲٦.۱.۱ فرض کنید R حلقه ای جابه‌جایی و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $\sqrt{I} = \{r \in R | \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}$ را رادیکال I می گویند.

لم ٦.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه ی جابه‌جایی R باشد. در این صورت $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in Spec(R) \\ I \subseteq P}} P$.

برهان : (لم ۴۸.۳ از [۲۱] ملاحظه شود). □

نتیجه ۱.۱.۱ اگر $\sqrt{0}$ رادیکال پوچ حلقه ی جابه‌جایی R باشد، آن گاه $\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$.

برهان : (نتیجه ی ۴۹.۳ از [۲۱] ملاحظه شود). □

لم ۷.۱.۱ فرض کنید P ایده‌آلی اول از حلقه ی جابه‌جایی R و $I_1, ..., I_n$ ایده‌آل هایی از R باشند، آن گاه جملات زیر هم ارزند.