بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فن‌آوری

دانشگاه علوم پایه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی‌محض

جبرهای باناخ تقریباً میانگین‌پذیر

توسط

الهام طهماسبی

استاد راهنما

دکتر مرتضی ابطحی

استاد مشاور

دکتر غلامرضا عباسپور

شهریورماه ۱۳۸۸

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه **ایثار** و از **خودگذشتگی**،

به پاس **عاطفه سرشار** و **گرمای امیدبخش وجودشان** که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس **قلب‌های بزرگشان** که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس **محبت‌های بی‌دریغشان** که هرگز فروکش نمی‌کند؛

این مجموعه را به خانواده عزیزم تقدیم می‌کنم که اگر سایه گسترده‌شان نبود، زندگی چیزی برای تعریف نداشت.

تقدیر و تشکّر

مشتاقم نهایت تشکر و قدردانی را از استاد راهنمای فرزانه‌ام **دکتر مرتضی ابطحی ایوری** داشته باشم که طی این دوره از تحصیلات و بخصوص در این پایان‌نامه با راهنمایی‌های روشنگرانه خود صبورانه مرا یاری نمودند.

همچنین از اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر سید علی تقوی و جناب آقای دکتر عباس فخاری که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند و افتخار شاگردی‌شان را نیز داشته‌ام و استاد مشاورم جناب آقای دکتر عباسپور سپاسگزارم.

در پایان از وجود پرمهر **مادرم** و **برادرم، مرتضی**، که در این مدت یار و مشوق من در امر تحصیل بوده‌اند صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می‌کنم و امیدوارم که خداوند توفیق جبران گوشه‌ای از زحمات تمامی عزیزانی که لطفشان شامل حال من شده است را عطا فرماید.

و برای دوستان بسیار بسیار عزیزم که طراوت و نشاط را با لحظات این دو سال آمیختند و تا همیشه در زندگی‌ام ماندگار شدند، آرزوی بهروزی و سعادت دارم.

الهام طهماسبی

شهریورماه ۸۸

چکیــده

جبرهای باناخ تقریباً میانگین‌پذیر

به‌وسیله‌ی:

الهام طهماسبی

جبر باناخ A به‌طور تقریبی میانگین‌پذیر است هرگاه برای هر A-مدول X هر اشتقاق پیوسته $D : A \to X^*$ تقریباً درونی باشد.

در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که تقریباً میانگین‌پذیری و تقریباً انقباض‌پذیری خواص یکسانی دارند. همچنین نشان می‌دهیم که به‌طور یکنواخت میانگین‌پذیری تقریبی و میانگین‌پذیری نیز خواص یکسانی دارند. نتایج به‌دست آمده روی جبرهای باناخ دنباله‌ای، جبرهای لیپ‌شیتس و جبرهای برلینگ برقرارند.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ میانگین‌پذیر، گروه میانگین‌پذیر، جبر باناخ تقریباً میانگین‌پذیر، قطر تقریبی، همانی تقریبی، جبرهای برلینگ، اشتقاق.

فهرست مطالب

ز

پیشگفتار

اصطلاح میانگین‌پذیری اولین بار در سال ۱۹۰۴ توسط **لبگ**[1] و در ارتباط با قضیه‌ی همگرایی یکنوا مطرح شد. بحث در اندازه‌ی ناوردای انتقال μ روی $\mathbb{R}$، که مثبت و شمارش‌پذیر جمعی باشد و $\mu([0,1]) = 1$، منجر به بررسی میانگین‌پذیری گروه‌ها شد.

فون نویمان[2] در سال ۱۹۲۹ رده‌هایی از گروه‌های میانگین‌پذیر را معرفی کرد. به دلیل اثبات روابطی بین گروه‌های میانگین‌پذیر و جبرهای گروهی باناخ توسط **جانسون**[3] در سال ۱۹۷۲، میانگین‌پذیری این جبرها نیز مطرح شد. میانگین‌پذیری یک جبر باناخ به چند روش قابل بررسی است که در فصل دوم به این روش‌ها اشاره می‌نماییم.

در این پایان‌نامه، مفاهیم جدیدی از میانگین‌پذیری و انقباض‌پذیری معرفی می‌گردد. مثال‌هایی ارائه خواهیم کرد که بیشتر مفاهیم جدید را نشان می‌دهد. نظریه‌ی کلی، گسترش این مفاهیم و مطالعه‌ی رده‌های خاصی از جبرهای باناخ تقریباً میانگین‌پذیر است. در این پایان‌نامه توجه خاصی به جبرهای باناخ، تعریف‌شده بر روی گروه‌های موضعاً فشرده می‌شود.

فصل اول شامل تعاریف و قضایایی است که در فصول بعد از آنها استفاده خواهیم کرد. این تعاریف و قضایا از مراجع [۲]، [۳]، [۷]، [۱۴]، [۱۶]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰] گرفته شده است.

در فصل دوم به بیان ویژگی‌های مقدماتی جبرهای باناخ به‌طور تقریبی میانگین‌پذیر می‌پردازیم سپس رابطه‌ی بین وجود همانی تقریبی و مجموع مستقیم جبرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[1] Lebesgue

[2] Von Neumann

[3] Johnson

در فصل سوم از این پایان‌نامه تعاریف جدیدی از تقریباً میانگین‌پذیری جبرها از قبیل میانگین‌پذیری تقریبی به‌طور کراندار، میانگین‌پذیری تقریبی به‌طور یکنواخت و جبرهای باناخ دنباله‌ای را ارائه می‌دهیم.

در فصل چهارم یک سرشت‌نمایی کامل از میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای روی گروه‌های موضعاً فشرده‌ی وزن‌دار ارائه و مفاهیم جدید را برای این جبرها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مطالب این پایان‌نامه از مقاله‌ی

Generalized notions of Amenability, II

F. Ghahramani, R. J. Loy and Y. Zhang, J. Funct. Anal 254 (2008) 1776-1810

می‌باشد. در انتها واژه‌نامه فارسی به انگلیسی و کتاب‌نامه مورد استفاده در این پایان‌نامه درج شده است.

فصلِ ۱

تعاریف و قضایای مقدّماتی

در این فصل، که شامل هشت بخش می‌باشد، مقدماتی راجع به آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی، جبرهای باناخ، مثال‌هایی از جبرهای باناخ، همانی تقریبی، ضرب تانسوری، مدول‌های باناخ و گروه‌های توپولوژیک موضعاً فشرده ارائه می‌دهیم. اما از آنجا که انتظار می‌رود خواننده با این مطالب آشنایی داشته باشد، از بیان جزئیات و اثبات آنها خودداری می‌کنیم. مطالب این فصل از مراجع [۲]، [۳]، [۷]، [۱۴]، [۱۶]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰] گرفته شده است.

۱-۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱ فرض کنیم $(X,+)$ یک گروه آبلی باشد و برای هر عدد مختلط λ و هر $x \in X$، $\lambda x \in X$. در این صورت X را یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط گوییم هرگاه برای هر $x,y \in X$ و هر $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$،

۱. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$؛

۲. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$؛

۳. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$؛

۴. $1x=x$.

تعریف ۲.۱ یک تبدیل خطی از فضای برداری V به‌توی فضای برداری W، نگاشتی است مانند $T : V \longrightarrow W$ به‌طوری که به ازای هر $x, y \in V$ و جمیع اسکالرهای β و α،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

در حالت خاص که W میدان اسکالرها است، T یک تابعک خطی نام دارد.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ را یک نرم روی X نامیم هرگاه:

۱. به‌ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛
۲. به‌ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛
۳. به‌ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

تعریف ۴.۱ فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به‌طوری که:

۱. مجموعه‌های تک‌عضوی در X بسته باشند.
۲. عملگرهای فضای برداری، یعنی

$$\begin{cases} X \times X \longrightarrow X \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mathbb{F} \times X \longrightarrow X \\ (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \end{cases}$$

نسبت به τ پیوسته باشند.

در این صورت τ را **توپولوژی برداری** روی X و X را **فضای برداری توپولوژیکی** گوییم.

تعریف ۶.۱ فضای برداری $(X, \|\cdot\|)$ را **فضای باناخ** گوییم، هرگاه $\|\cdot\|$ یک نرم کامل روی X باشد. یعنی نسبت به متر $d(x, y) = \|x - y\|$، هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا باشد.

تعریف ۷.۱ **فضای دوگان** یک فضای برداری توپولوژیک مانند X، عبارت است از فضای برداری X^*، که اعضای آن تابعک‌های خطی و پیوسته روی X می‌باشند.

تعریف ۸.۱ فرض کنیم S یک مجموعه‌ی دلخواه و J یک مجموعه اندیس باشد و برای هر $\alpha \in J$، S_α یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه نگاشت‌های $\{f_\alpha : S \longrightarrow S_\alpha,\ \alpha \in J\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت توپولوژی روی S وجود دارد که برای آن هر f_α پیوسته است. این توپولوژی را **توپولوژی ضعیفِ القاشده روی** S به‌وسیله‌ی خانواده‌ی $\{f_\alpha\}$ می‌نامیم.

در واقع این توپولوژی توسط مجموعه‌های به شکل زیر تولید می‌شود:

$$\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in J, \quad \text{باز است } S_\alpha \text{ در } U_\alpha\}.$$

تعریف ۹.۱ فرض کنیم A یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت، توپولوژی برای A که توسط A^* تولید می‌شود، **توپولوژی ضعیف** از A است که آن را با τ_w نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر، توپولوژی ضعیف یک فضای نرم‌دار، کوچکترین توپولوژی روی فضا است به‌طوری که هر عضو فضای دوگان نسبت به آن پیوسته است.

گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به‌طور ضعیف به یک عنصر مانند x همگرا است و می‌نویسیم $x_\alpha \xrightarrow{w} x$، هرگاه $\{x_\alpha\}$ در A نسبت به توپولوژی ضعیف به x همگرا باشد.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنیم A یک فضای نرم‌دار و Q نشاننده طبیعی از A به درون A^{**} (دوگان دوم A) باشد. یعنی

$$Q : A \to A^{**}\ ,\ x \mapsto \widehat{x}$$

که در آن

$$\widehat{x} : A^* \to \mathbb{C}\ ,\ \widehat{x}(f) = f(x)$$

اگر قرار دهیم $\widehat{A} = \{\widehat{x} : x \in A\}$، آنگاه توپولوژی روی A^* که به‌وسیله‌ی $\widehat{A}$ تولید می‌شود، **توپولوژی ضعیف ستاره** روی A^* نام دارد که آن را با τ_{w^*} نمایش می‌دهیم.

در توپولوژی ضعیف ستاره تور $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به‌طور ضعیف ستاره به f همگرا است و می‌نویسیم $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$، $f_\alpha(x) \to f(x)$. به‌علاوه تور $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در A^* به f به‌طور ضعیف همگرا است، هرگاه برای هر $F \in A^{**}$ داشته باشیم $F(f_\alpha) \to F(f)$.

قضیه ۱۱.۱ **(اصل کرانداری یکنواخت)** فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $\{T_\alpha : X \to Y\}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی کراندار باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$ که $\sup_\alpha \|T_\alpha(x)\| < \infty$، آنگاه $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.

برهان. به قضیه ۱۰.۱۳ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۲.۱ **(باناخ آلاقلو[1])** اگر A یک جبر باناخ باشد، آنگاه گوی یکه‌ی بسته در A^*، با توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

برهان. به قضیه ۱۵.۳ از مرجع [۱۹] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۳.۱ **(گلدشتاین[2])** اگر A یک جبر باناخ باشد، آنگاه A با توپولوژی ضعیف ستاره در A^{**} چگال است. به‌طور دقیق‌تر، برای هر $a \in A^{**}$، تور (a_ν) در A موجود است به‌طوری که به ازای هر ν، $\|a_\nu\| \le \|a\|$ و $a_\nu \to a$ نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره.

برهان. به صفحه‌ی ۸۱۸ از مرجع [۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۴.۱ **(مازور[3])** بستار قوی و بستار ضعیف مجموعه‌های محدب در فضاهای باناخ با هم برابرند.

برهان. به صفحه‌ی ۸۱۸ از مرجع [۳] مراجعه کنید. □

---

[1] Banach-Alaoglu

[2] Goldstine

[3] Mazur

۱-۲ آنالیز حقیقی

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرتهی و دلخواه باشد. گردایه‌ی $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X یک حلقه از مجموعه‌ها نامیده می‌شود هرگاه برای هر $A, B \in \mathcal{M}$ داشته باشیم

$$A \cup B \in \mathcal{M} \quad , \quad A \cap A^c \in \mathcal{M}.$$

اگر مجموعه‌ی X در حلقه‌ی $\mathcal{M}$ باشد، در این صورت $\mathcal{M}$ یک **جبر** از مجموعه‌ها نامیده می‌شود. یک **σ-جبر** از مجموعه‌ها، یک جبر از مجموعه‌ها مانند $\mathcal{M}$ است به‌طوری که اگر برای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $A_n \in \mathcal{M}$، آنگاه $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

پیشوند σ در تعریف بالا اشاره به این دارد که رابطه‌ی بالا باید به ازای جمیع اجتماع‌های شمارشپذیر از اعضای $\mathcal{M}$ برقرار باشد.

قضیه ۱۶.۱ اگر $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، کوچکترین σـجبر در X مانند $\mathcal{M}$ موجود است به‌طوری که $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ را σـجبر تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

برهان. به صفحه‌ی ۲۵ از مرجع [۲۰] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۷.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیه‌ی ۱۶.۱، کوچکترین σـجبر مانند $\mathcal{B}$ در X هست به‌طوری که هر مجموعه‌ی باز در X متعلق به $\mathcal{B}$ است. اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه‌های بورل X می‌نامند.

بخصوص مجموعه‌های بسته مجموعه‌های بورل‌اند، زیرا طبق تعریف متمم مجموعه‌های باز می‌باشند و همچنین تمام اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و تمام اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز مجموعه‌هایی بورل هستند.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک σـجبر در X باشد. یک **اندازه‌ی جمعی متناهی** روی $(X, \mathcal{M})$، یک نگاشت مانند $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [۰, \infty]$ است به‌طوری که:

۱. $\mu(\emptyset) = ۰$؛

۲. هرگاه $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعه‌های دوبه‌دو مجزایی در $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه داشته باشیم

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

اگر شرط (۲) به وسیله‌ی شرط (۳) زیر جایگزین شود، آنگاه μ را یک **اندازه‌ی جمعی شمارا** یا به سادگی، یک **اندازه** نامند.

۳. اگر $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه داشته باشیم

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

خاصیت (۳) را خاصیت جمعی شمارش‌پذیر گویند. هرگاه μ یک تابع مختلط مقدار باشد که در شرط‌های (۱) و (۳) صدق کند، آنگاه μ را اندازه‌ی مختلط نامند.

تعریف ۱۹.۱ هرگاه $\mathcal{M}$ یک σـ‌جبر در X باشد، آنگاه $(X, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{M}$ یک σـ‌جبر از زیرمجموعه‌های X باشد. یک تابع حقیقی مقدار مانند f تعریف شده روی X را $\mathcal{M}$ـ**اندازه‌پذیر** گویند هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ عضو $\mathcal{M}$ باشد. یک تابع مختلط مقدار f روی X را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن اندازه‌پذیر باشند.

تعریف ۲۱.۱ اندازه‌ی μ تعریف شده بر σـ‌جبر تمام مجموعه‌های بورل در فضای هاسدورفِ موضعاً فشرده X یک **اندازه بورل** X نام دارد.

تعریف ۲۲.۱ فرض کنیم μ اندازه‌ی بورل روی فضای X و E یک زیرمجموعه‌ی بورل از X باشد. اندازه‌ی μ را روی E **منظم خارجی** نامیم هرگاه داشته باشیم

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \text{باز } V \text{ و } E \subset V\}.$$

و μ روی E **منظم داخلی** نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \text{فشرده } K \text{ و } K \subset E\}$$

اگر μ روی تمام مجموعه‌های بورل منظم داخلی و منظم خارجی باشد، آنگاه μ را **منظم** نامند.

تعریف ۲۳.۱ یک **اندازه‌ی رادون** روی فضای X، اندازه‌ی بورلی است که برای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی K، $\mu(K) < \infty$. به‌علاوه μ روی تمام مجموعه‌های بورل منظم خارجی و روی تمام مجموعه‌های باز منظم داخلی باشد.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و $p \in [۱, \infty)$. $L^p(X, \mu)$ که به اختصار آن را با $L^p(X)$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت مجموعه‌ی تمام توابع مختلط مقدار اندازه‌پذیر $f : X \to \mathbb{C}$، تعریف می‌کنیم که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\int_X |f(X)|^p dx < \infty.$$

اکنون، با در نظر گرفتن مفروضات تعریف بالا، برای هر $f \in L^p(X)$، نرم $\|f\|_p$ که آن را p-نرم نامند، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f(X)^p d\mu \Big)^{۱/p}.$$

دو تابعی که در شرط $\|f - g\|_p = ۰$ صدق می‌کنند، در $L^p(X)$ یکسان در نظر گرفته می‌شوند. در حقیقت، $L^p(X)$ شامل رده‌های هم‌ارزی از توابع است.

قضیه ۲۵.۱ (ریس-فیشر[۴]) $L^p(X)$، برای $۱ \leq p < +\infty$، یک فضای باناخ است.

برهان. به قضیه‌ی ۶.۵ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۶.۱ فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و μ اندازه‌ی شمارنده روی X باشد. یعنی $\mu(E) = \infty$ اگر E نامتناهی باشد در غیر این صورت $\mu(E) = |E|$ که $|E|$ تعداد عناصر E می‌باشد. در این صورت $L^p(X)$ را با $l^p(X)$ نشان می‌دهیم و برای هر $f \in l^p(X)$:

$$\|f\|_p = [\sum_{x \in X} |f(x)|^p]^{۱/p}.$$

[4] Riesz-Fischer

تعریف ۲۷.۱ فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. همچنین، فرض کنیم f تابع مختلط مقدار و اندازه‌پذیری روی X باشد. f را تقریباً کراندار نامیم، هرگاه عدد مثبت M موجود باشد به‌طوری که تقریباً برای هر $x \in X$ داشته باشیم $|f(x)| \leq M$.

تعریف ۲۸.۱ $L^{\infty}(X)$ به صورت مجموعه‌ی تمام توابع مختلط مقدار اندازه‌پذیر و تقریباً کراندار روی X تعریف می‌شود. برای هر $f \in L^{\infty}(X)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{M > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

$L^{\infty}(X)$ همراه با نرم $\|f\|_{\infty}$ یک فضای باناخ است.

قضیه ۲۹.۱ فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر متناهی باشد. در این صورت دوگان $L^{1}(X)$ با $L^{\infty}(X)$ یکریخت است. یکریختی طولپا میان این دو فضا با ضابطه‌ی

$$u(f) = \int_X fgd\mu \quad (f \in L^{1}(X))$$

برای $u \in (L^{1}(X))^*$ و $g \in L^{\infty}(X)$ می‌باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۱۰ از مرجع [۱۶] مراجعه کنید. □

فرض کنیم $1 \leq p, q < \infty$ در شرط $1/p + 1/q = 1$ صدق کند. آنگاه $(L^p(X))^* = L^q(X)$. این قضیه به قضیه‌ی نمایش ریس مشهور است که به صورت زیر بیان می‌گردد.

قضیه ۳۰.۱ فرض کنیم $1 \leq p, q < \infty$ که $1/p + 1/q = 1$ و μ یک اندازه‌ی σـمتناهی باشد. برای هر تابعک خطی پیوسته روی $L^p(X)$ مانند u، عنصر یکتای $g \in L^q(X)$ موجود است به‌طوری که برای هر $f \in L^p(X)$ داریم

$$u(f) = \int_X fgd\mu$$

به‌علاوه $\|u\| = \|g\|_q$.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۱۱ از مرجع [۱۶] مراجعه کنید. □

۱-۳ جبرهای باناخ

تعریف ۳۱.۱ فضای خطی A روی میدان $\mathbb{F}$ (میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان مختلط $\mathbb{C}$) را همراه با نگاشت $(a,b) \mapsto ab$ از $A \times A$ به توی A که برای هر $a,b,c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند، یک جبر گوییم.

۱. $a(bc) = (ab)c$؛
۲. $a(b+c) = ab + ac, (a+b)c = ac + bc$؛
۳. $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$.

اگر ضرب تعریف شده در بالا علاوه بر شرایط فوق در شرط $ab = ba$ نیز صدق کند، A را **جبر جابجایی** نامیم.

عنصر e در جبر A را، عنصر **همانی** گوییم، هرگاه $e \neq ۰$ و برای هر $a \in A$ داشته باشیم $ea = ae = a$. عنصر همانی در صورت وجود یکتا است. جبر A را یک جبر یکدار گوییم، هرگاه دارای عنصر همانی باشد.

تعریف ۳۲.۱ نرم $\|\cdot\|$ روی جبر A، یک نرم جبری نام دارد هرگاه

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad (a,b \in A)$$

در این صورت $(A, \|\cdot\|)$ یک **جبر نرم‌دار** نامیده می‌شود.

بنابر گزاره‌ی ۴.۱ از [۲]، ضرب در جبر نرم‌دار A پیوسته است.

تعریف ۳۳.۱ جبر نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$ را جبر باناخ گوییم، هرگاه A با نرم $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ باشد. جبر نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$ را یکدار نامیم، هرگاه A یکدار بوده و $\|e\| = ۱$ باشد.

اگر A با ضرب $(a,b) \mapsto ab$ یک جبر نرم‌دار باشد آنگاه A با نگاشت $(a,b) \mapsto ba$ و نرم داده شده یک جبر نرم‌دار است که آن را با A^{op} نمایش می‌دهیم.

ملاحظه. هر جبر نرم‌داری را که یکدار نباشد، می‌توان در یک جبر یکدار نشاند. این عمل را یکدارسازی نامیم. فرض کنیم A جبر باناخ دلخواه باشد که ممکن است یکدار باشد یا یکدار نباشد. در این صورت

برای هر $a,b\in A$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$، جمع و ضرب روی مجموعه‌ی $A\oplus\mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(a,\alpha)+(b,\beta) &= (a+b,\alpha+\beta)\\ (a,\alpha)(b,\beta) &= (ab+\alpha b+\beta a,\beta\alpha)\end{aligned}$$

که همراه با نرم

$$\|(a,\alpha)\|=\|a\|+|\alpha|$$

جبر نرم‌داری به دست می‌آید که آن را با $A^{\#}$ نمایش می‌دهیم. عنصر $(۰,۱)$ عنصر همانی در این جبر است. نگاشت $A\to A^{\#}$ با ضابطه‌ی $a\mapsto(a,۰)$ یک نشاننده‌ی طولپا است.

تعریف ۳۴.۱ فرض کنیم A یک جبر باشد. زیرفضای I را یک **ایده‌آل چپ** (به ترتیب، ایده‌آل راست) گوییم، هرگاه برای هر $a\in A$ و هر $x\in I$، $ax\in I$ (به ترتیب، $xa\in I$). I را ایده‌آل دوطرفه گوییم، هرگاه هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد.

تعریف ۳۵.۱ اگر A و B دو جبر مختلط باشند، نگاشت ϕ از A به توی B را یک همریختی گوییم هرگاه ϕ یک نگاشت خطی باشد که ضرب را نیز حفظ نماید. یعنی

$$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y),\qquad \forall x,y\in A.$$

هنگامی که $B=\mathbb{C}$ دسته‌ای مهم از همریختی‌ها روی A بدست می‌آید که به آن همریختی‌های مختلط گوییم. هر همریختی مختلط به‌طور خودکار پیوسته است و در واقع $\|\phi\|\leq ۱$. مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط روی A را با نماد $m(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۶.۱ فرض کنیم A جبر باناخ یکدار و جابجایی باشد. در این صورت برای هر $x\in A$ نگاشت $\widehat{x}(h)=h(x)$، تبدیل گلفند[5] x نامیده می‌شود. اگر $\widehat{A}=\{\widehat{x}:x\in A\}$ در این صورت نگاشت $\lambda:A\to\widehat{A}$، با ضابطه‌ی $\lambda(x)=\widehat{x}$ تبدیل گلفند A نامیده می‌شود.

توپولوژی گلفند $m(A)$، توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\widehat{A}$ می‌باشد. یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی که برای آن هر $\widehat{x}$ یک نگاشت پیوسته روی $m(A)$ است. $m(A)$، مجهز به توپولوژی گلفند، یک فضای توپولوژیکی است که فضای ایده‌آل ماکسیمال A نامیده می‌شود.

[5] Gel'fand