فهرست مطالب

پیش‌گفتار

همان‌طور که از عنوان روی جلد برمی‌آید، فضای هم‌جبرهای ماتریسی، زمینه اصلی کار ما در این پایان‌نامه خواهد بود. یک هم‌جبر روی میدان κ، عبارت است از فضای κ-خطی C، به همراه نگاشت‌های هم‌ضرب $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ و هم‌یکه $\varepsilon : C \longrightarrow \kappa$، که شرایط

$$(I_C \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes I_C)\Delta, \quad (I_C \otimes \varepsilon\,)\Delta = (\,\varepsilon \otimes I_C)\Delta = I_C,$$

را برآورده می‌سازند. کاربرد نظریه هم‌جبرها و توسیع این نظریه، گسترده‌تر از آن است، که بتوان در مقدمه یک پایان‌نامه خلاصه‌اش نمود. در سال‌های اخیر، نتایج و پیشرفت‌های حاصل در این گستره، به ابزار مناسبی برای تحقیقات در زمینه‌های مختلف پژوهشی بدل شده‌اند، که علوم کامپیوتر، سیستم‌های امنیتی پرواز، صنایع پزشکی، علوم زیستی و اقتصاد از آن جمله‌اند. نمونه‌هایی از این کاربردها را می‌توانید در [۶] و [۲۵] ببینید.

در بخش اول و دوم از فصل دوم، با مفهوم هم‌جبر و تعاریف اولیه مربوط به آن، از جمله نمادگذاری سوئیدلر و ریختارهای هم‌جبری، آشنا خواهیم شد. همچنین به مثال‌هایی از چند هم‌جبر، که بیشتر مورد توجه‌اند، اشاره خواهیم کرد. با نگاهی به تعریف یک هم‌جبر، درمی‌یابیم که این تعریف نوعی رابطه دوگانی با تعریف جبرها دارد و به همین خاطر است که برای تعریف یک هم‌جبر، نخست نگاهی به تعریف متناظر در نظریه جبرها خواهیم داشت. در طول این پایان‌نامه، سعی شده است، در تعاریف اصلی هم‌جبری، به پیوند دوگانی تعاریف با مقوله جبرها توجه شود، اما اثبات قضایای اصلی و نتایج حاصل، در اغلب موارد، کاملا مستقل و بدون وابستگی به نظریه جبرها صورت می‌گیرد. درحقیقت، خصوصیات مثبت و مهم نظریه هم‌جبرها زمانی رخ می‌نمایاند، که به نزدیکی این ساختار با ساختار جبرها بنگریم و رابطه دوگانی موجود بین این دو نظریه را مورد توجه قرار دهیم، که البته در بعد نامتناهی یک‌سویه است. به عبارت دقیق‌تر، در بعد متناهی دوگان هریک از این دو مفهوم، مفهوم دیگر خواهد بود. اما در بعد نامتناهی، مساله دوگانی از این وضوح و سادگی برخوردار نیست. گرچه دوگان ساختارهای هم‌جبری، همواره ما را به سوی ساختارهای جبری سوق می‌دهد، اما دوگان جبرهای با بعد نامتناهی لزوما ساختاری هم‌جبری نخواهد داشت و

همین ویژگی است که سبب می‌شود نظریه هم‌جبرها، به صورت مستقل و بیرون از سایه جبرها، مورد توجه قرار گیرد. در واقع، در بعد نامتناهی هم‌جبرها از خصوصیات مثبت و مفیدی سود می‌برند، که جبرها از آن‌ها بی‌بهره‌اند و از آن جمله می‌توان به قضیه اساسی جبرها، قضیه ۳.۲.۲، اشاره کرد. در بخش سوم از فصل دو، به تفصیل، رابطه دوگانی بین این دو مفهوم را مورد توجه قرار می‌دهیم، پیوندی که به تعبیر ژاکوب[۱] در [۲۵]، گاه نشان از دوستی دارد و گاه مملو از نفرت است.[۲]

بخش مهمی از توجه ما در این پایان‌نامه معطوف فضای هم‌جبر ماتریس‌هاست. هم‌جبر ماتریس‌ها، عبارت است از فضای ماتریس‌های حقیقی به همراه نگاشت‌های هم‌ضرب و هم‌یکه‌ای که، به ترتیب، با ضابطه‌های زیر

$$e_{ij} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kj}, \quad e_{ij} \longmapsto \delta_{ij},$$

تعریف می‌شوند و با نماد $M_n^c(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود. در فصل سوم، پس از پرداختن به مفهوم هم‌جبرهای هم‌جدایی‌پذیر، بخش دوم را به معرفی هم‌جبر ماتریس‌ها اختصاص داده‌ایم و البته همین جاست که ثابت می‌کنیم هم‌جبر ماتریس‌ها یک هم‌جبر هم‌جدایی‌پذیر است. در قسمت پایانی فصل سوم، با هم‌جبر ماتریس‌های هم‌جبری آشنا خواهیم شد. برای هم‌جبر C، هم‌جبر ماتریس‌های از مرتبه n روی C، با نماد $M_n^c(C)$ نمایش داده می‌شود و عبارتست از فضای حاصل از ضرب تانسوری هم‌جبر C و هم‌جبر ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان κ، به بیان دیگر $M_n^c(C) = C \otimes M_n^c(\kappa)$. توجه داریم که $M_n^c(\kappa)$ هم‌جبری است با هم‌ضرب و هم‌یکه‌ای که همان نگاشت‌های تعریف شده برای $M_n^c(\mathbb{R})$ هستند، با این تفاوت که جای میدان اعداد حقیقی را میدان دلخواه κ می‌گیرد. زمانی بیشتر متوجه اهمیت فضای هم‌جبرهای ماتریسی می‌شویم، که بدانیم نوعی رابطه هم‌ارزی بین فضای هم‌جبرها و هم‌جبر ماتریس‌ها روی هم‌جبرها وجود دارد، که این دو مقوله را به یکدیگر مرتبط می‌سازد. برای آشنایی بیشتر با این نوع هم‌ارزی خواننده را به [۱۹] و [۳۱] ارجاع می‌دهیم. به این ترتیب، بحث هم‌جبر ماتریس‌ها روی هم‌جبرها، ارتباط مستقیمی با فضای هم‌جبرهای دلخواه پیدا می‌کند، که این موضوع نشان از اهمیت فوق‌العاده این بحث دارد. نمونه‌هایی از نقش مهم و سودمند هم‌جبرهای ماتریسی را می‌توانید در [۴] و [۳۰] ببینید.

نتایج حاصل در فصل سوم برای فضای هم‌جبر ماتریس‌ها، چراغ راه ما به سوی شناسایی هم‌اشتقاق‌ها روی این هم‌جبر خواهد بود. مفهوم هم‌اشتقاق، همان‌طور که از نامش پیداست، دوگان مفهوم اشتقاق در بحث جبرهاست. نگاشت خطی f روی هم‌جبر (C, Δ, ε) را یک هم‌اشتقاق

[۱] B. Jacobs

[۲] hate-love relationship

روی C گویند، اگر

$$\Delta f = (I_C \otimes f + f \otimes I_C)\Delta.$$

در فصل چهارم، ضمن آشنایی با مفهوم هم‌اشتقاق، به بررسی رابطه دوگانی بین مفاهیم اشتقاق و هم‌اشتقاق می‌پردازیم. پس از آن با هم‌اشتقاق‌های درونی آشنا می‌شویم و نشان می‌دهیم که ویژگی درونی بودن اشتقاق‌ها و هم‌اشتقاق‌ها نیز یک مفهوم دوگانی است. رابطه دوگانی بین مفاهیم اشتقاق درونی و هم‌اشتقاق درونی را زمانی می‌توان به خوبی لمس کرد، که پیوند این دو مفهوم با جبرهای جدایی‌پذیر و هم‌جبرهای هم‌جدایی‌پذیر را مورد توجه قرار دهیم. در سال ۱۹۷۴، نوس[۳] و اژانگورن[۴] شرط معادلی برای درونی بودن هر اشتقاق روی جبر A، بیان کردند و جبر A را با این ویژگی که هر اشتقاق روی آن درونی باشد، جدایی‌پذیر نامیدند. در ۱۹۷۸، دوی[۵] قضیه‌ای را ثابت نمود، که نشان می‌داد هر هم‌اشتقاق روی هم‌جبر هم‌جدایی‌پذیر C درونی است. هم‌جبر (C, Δ, ε) را هم‌جدایی‌پذیر گویند، هرگاه نگاشت خطی $\tau : C \otimes C \to \kappa$ موجود باشد، به‌طوری‌که

$$(I_C \otimes \tau)(\Delta \otimes I_C) = (\tau \otimes I_C)(I_C \otimes \Delta), \quad \tau\Delta = \varepsilon.$$

گرچه تعریف اولیه هم‌جبرهای هم‌جدایی‌پذیر، برخلاف تعریف جبرهای جدایی‌پذیر که وابسته به مفهوم اشتقاق‌هاست، مستقل از مفهوم هم‌اشتقاق است، اما صورت کلی قضایای نوس و دوی، رابطه دوگانی بین مفاهیم اشتقاق درونی و هم‌اشتقاق درونی را به خوبی نمایان می‌سازد. در ۱۹۸۰، ناکاییما[۶] قضیه دوی را به فضای C-هم‌جبرها توسیع داد و در ۱۹۹۸ فاریناتی[۷] و سولوتار[۸]، شرط معادل دیگری به قضیه دوی افزودند. اما این کاوتی[۹] و ورکرویسه[۱۰] بودند که در سال ۲۰۰۷، قضیه را با شرایط معادل جدیدی بیان کردند و مفاهیم قبلی را با مفاهیم دیگری در نظریه هم‌جبرها مرتبط ساختند، که البته پرداختن به آن‌ها نیازمند بسیاری از تعاریف و قضایای دور از بحث مورد نظر ماست.

به هرحال قضیه دوی، همان قضیه‌ای است که یاریمان می‌کند تا در بخش دوم از فصل چهار، ثابت کنیم هر هم‌اشتقاق روی هم‌جبر ماتریس‌ها درونی است و راه را برای شناسایی هم‌اشتقاق‌های روی این هم‌جبر هموار می‌سازد. در ادامه فصل چهارم، به شناسایی هم‌اشتقاق‌ها روی هم‌جبر ماتریس‌ها می‌پردازیم. اما برای مشخص شدن چگونگی اثر هم‌اشتقاق f روی عناصر پایه هم‌جبر ماتریس‌ها، لازم است مختصات c_{mp}^{ij} را در نمایش ماتریسی f بدانیم و مؤلفه‌های صفر و رابطه بین مؤلفه‌های

[۳] M. A. Knus
[۴] M. Ojanguren
[۵] Y. Doi
[۶] A. Nakajima
[۷] M. A. Farinati
[۸] A. Solotar
[۹] L. El Kaoutit
[۱۰] J. Vercruysse

ناصفر را به دقت تعیین کنیم. برای این منظور، شرط هم‌اشتقاق بودن نگاشت خطی f را، به طور خاص، برای هم‌جبر ماتریس‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم، که به تساوی معادل

$$\sum_{m,p,k=۱}^{n} c_{mp}^{kj} e_{n(i-۱)+m,n(k-۱)+p} + c_{mp}^{ik} e_{n(m-۱)+k,n(p-۱)+j} = \sum_{m,p,k=۱}^{n} c_{mp}^{ij} e_{n(m-۱)+k,n(k-۱)+p},$$

می‌انجامد. در واقع، با توجه به این حقیقت، که هر هم اشتقاق روی هم‌جبر ماتریس‌ها درونی است، می‌توان مؤلفه‌های صفر را مشخص نمود و به کمک آن ثابت خواهیم کرد، که اگر f یک هم‌اشتقاق روی هم‌جبر ماتریس‌ها باشد، آن‌گاه اعداد حقیقی c_{ik}^{ij} و c_{kj}^{ij}، $۱ \leq k \leq n$، وجود دارند، به‌طوری‌که

$$f(e_{ij}) = \sum_{k=۱}^{n} (c_{ik}^{ij} e_{ik} + c_{kj}^{ij} e_{kj}),$$

و رابطه منظمی بین مؤلفه‌های احتمالاً ناصفر وجود دارد. این روابط با تساوی‌هایی که در فصل چهارم خواهیم دید، به روشنی و به طور کامل، در دسترسند. به این ترتیب، ساختار هم‌اشتقاق‌های روی هم‌جبر ماتریس‌ها را به دقت تعیین خواهیم کرد و در ادامه، با ارائه مثالی، به بررسی یافته‌ها برای هم‌جبر ماتریس‌های ۴×۴ خواهیم پرداخت.
در بخش پایانی فصل چهارم، توجه خود را به فضای هم‌اشتقاق‌ها روی هم‌جبر ماتریس‌های هم‌جبری معطوف می‌کنیم. در واقع، در این بخش ثابت می‌کنیم که جبر لی، شامل هم‌اشتقاق‌های روی هم‌جبر دلخواه C، با زیرجبری از جبر لی، شامل هم‌اشتقاق‌های روی هم‌جبر ماتریس‌ها از مرتبه n روی C، یکریخت است. این زیرجبر را، به خاطر وابستگی ساختار عناصرش به هم‌اشتقاق‌های روی C، با نماد $(\mathrm{Coder}(C))^{\sharp}$، نمایش می‌دهیم. علاوه بر این، به بررسی ترکیب هم‌اشتقاق‌های روی $M_n^c(C)$، وقتی C هم‌جبری با بعد متناهی باشد، خواهیم پرداخت. به عبارت دقیق‌تر، نشان می‌دهیم برای κ-هم‌جبر C با بعد متناهی، هر هم‌اشتقاق روی $M_n^c(C)$، به صورت مجموع هم‌اشتقاقی عضو $(\mathrm{Coder}(C))^{\sharp}$ و هم‌اشتقاقی درونی روی $M_n^c(C)$ خواهد بود.

هدف بعدی، بررسی $*$-هم‌اشتقاق‌های روی هم‌جبر ماتریس‌هاست. برای این منظور، ابتدا خواهیم دید که آیا هم‌جبر ماتریس‌ها می‌تواند یک $*$-هم‌جبر باشد. هم‌جبر $*$-خطی (C, Δ, ε) را یک $*$-هم‌جبر می‌نامیم، هرگاه برای هر $c \in C$ داشته باشیم

$$\Delta(c^*) = \sum c_{(۱)}^* \otimes c_{(۲)}^*,$$

وقتی در نمادگذاری سوئیدلر $\Delta(c) = \sum c_{(۱)} \otimes c_{(۲)}$. در بخش اول از فصل پنجم، نگاشت برگشتی

را تعریف خواهیم کرد که هم‌جبر ماتریس‌ها تحت آن یک $*$- هم‌جبر خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر، $M_n^c(\mathbb{R})$ تحت نگاشت برگشت $*$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک $*$- هم‌جبر است.

$$* : M_n^c(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n^c(\mathbb{R}), \quad e_{ij} \longmapsto e_{ij}^*, \quad e_{ij}^* = (-1)^{i+j} e_{n+1-i,n+1-j}.$$

پس از آن، در بخش دوم، نشان می‌دهیم که برای اینکه هم‌اشتقاق f یک $*$-هم‌اشتقاق روی $*$- هم‌جبر $M_n^c(\mathbb{R})$ باشد، کافیست

$$(-1)^{i+j} c_{mp}^{n+1-i,n+1-j} = (-1)^{m+p} c_{n+1-m,n+1-p}^{ij}, \quad m,p = 1,\ldots,n\ ,$$

وقتی c_{mp}^{ij}ها مؤلفه‌های f هستند. بّه‌علاوه این شرط را برای هم‌اشتقاق‌های روی هم‌جبر ماتریس‌ها به ازای $n = 2,3,4$ بررسی می‌کنیم. در پایان فصل پنجم، هم‌اشتقاقی روی $M_n^c(\mathbb{R})$ تعریف خواهیم کرد، که تحت نگاشت برگشت تعریف شده یک $*$- هم‌اشتقاق نیست.

در نگاهی کلی، پیش‌گفتار، بخشی که مشغول مطالعه آن هستید، شامل تاریخچه و خلاصه‌ای از فصول بعدی پایان‌نامه است. در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی را، صرف نظر از برهان، بیان می‌کنیم، تا نویسنده و خواننده با نگاهی یکسان به فصول اصلی بپردازند. فصل دوم، شامل معرفی مفهوم هم‌جبر و رابطه دوگانی آن با مفهوم جبر است، تا خواننده برای دنبال کردن قضایای اصلی نیازی به بررسی منابع پیش‌نیاز نداشته باشد و اما سه فصل انتهایی، به‌جز مختصری تعاریف مورد نیاز، دربرگیرنده قضایا و تعاریف جدید هستند. این پایان‌نامه با دو بخش نمایه و کتاب‌نامه که، به ترتیب، شامل فهرست الفبایی و مراجع هستند، پایان خواهد یافت.

در انتها، بر خود لازم می‌دانیم مراتب سپاس و قدردانی را از یوکیو دوی، برای نسخه‌ای از مقاله‌شان که، توسط پست، از دانشگاه اکایامای[11] ژاپن برایمان ارسال نمودند، داشته باشیم.

[11] Okayama

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

هدف اصلی در این فصل، تجمیع تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز، جهت مطالعه این پایان‌نامه است، تا خواننده برای دنبال کردن قضایای اصلی، نیازی به مراجعه به منابع پیش‌نیاز نداشته باشد. البته جهت پرهیز از اطاله کلام، از بیان برهان‌ها صرف‌نظر شده است.

۱.۱ فضاهای خطی

در این بخش، به بیان تعاریف مقدماتی و احکام مربوط می‌پردازیم، و این صرفا جهت یکسو شدن نگاه خواننده و نویسنده به نمادها و واژگانی است، که تا پایان بارها تکرار خواهند شد.

۱.۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه E و میدان κ را در نظر بگیرید. مجموعه E یک *فضای خطی*[۱] روی میدان κ نامیده می‌شود، اگر اعمال جمع $x+y$ و ضرب عددی αx، برای $x, y \in E$ و $\alpha \in \kappa$، طوری تعریف شده باشند، که

۱. جمع، شرکت‌پذیر و جابجایی باشد و عنصر همانی جمع، یعنی ۰، و عنصر معکوس جمع، یعنی $-x$، برای هر $x \in E$، موجود باشند.

۲. ضرب عددی، پخشی و شرکت‌پذیر باشد و عنصر همانی ضرب، یعنی $۱ \in \kappa$، موجود باشد، که $۱x = x$، برای هر $x \in E$.

از این پس، منظور از یک فضای خطی، یک فضای خطی روی میدان κ است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید مجموعه $S = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_\ell\}$، زیرمجموعه‌ای از فضای خطی E، باشد. مجموعه همه ترکیبات خطی اعضای S با نماد $\mathrm{Span}(S)$، نمایش داده می‌شود و آن را *پدیدآورد*[۲] مجموعه S می‌نامند، به‌عبارت دیگر

$$\mathrm{Span}(S) = \Big\{ \sum_{i=۱}^{\ell} \alpha_i x_i ;\ \alpha_i \in \kappa,\ x_i \in S \Big\}.$$

ملاحظه ۱.۱.۱.

- مجموعه $\mathrm{Span}(S)$، یک فضای خطی روی میدان κ است. اگر $\mathrm{Span}(S) = E$، آن‌گاه هر عضو E یک ترکیب خطی از اعضای S خواهد بود. دراین‌صورت، می‌گوییم S فضای خطی E را پدید می‌آورد.

- مجموعه $S = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_\ell\}$ را *مستقل خطی*[۳] می‌نامند، اگر تنها نتیجه تساوی

$$\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ + \ldots + \alpha_\ell x_\ell = ۰,$$

[۱] linear space
[۲] span
[۳] linearly independent

جواب بدیهی، یعنی $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\ell = 0$ باشد. در غیراین‌صورت، S را *وابسته خطی*[۴] می‌نامند.

- یک زیرمجموعه مستقل خطی S از فضای خطی E را یک *پایه*[۵] برای E می‌نامند، هرگاه

$$\mathrm{Span}(S) = E.$$

هر زیرمجموعه مستقل خطی ماکسیمال از E، پایه‌ای برای E خواهد بود و هر زیرمجموعه مستقل خطی در یک پایه قرار دارد. اگر فضای خطی E پایه‌ای n عضوی داشته باشد، آن‌گاه گویند *بعد*[۶] فضای خطی E برابر n است. اگر هیچ مجموعه‌ای با اندازه متناهی یافت نشود، که E را پدید آورد، آن‌گاه بعد E نامتناهی است.

- اگر $\{u_1, \ldots, u_n\}$، پایه‌ای از فضای خطی E باشد، آن‌گاه هر عضو x از E، یک ترکیب خطی منحصربه‌فرد از عناصر پایه است. به عبارت دیگر

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in \kappa, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

n تایی $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ را *مختصات*[۷] x نسبت به پایه می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. زیرمجموعه S از فضای خطی E را در نظر بگیرید. اگر S با جمع و ضرب عددی E، یک فضای خطی باشد، آن‌گاه S را یک *زیرفضا*[۸] از E می‌نامیم.

مجموع زیرفضاهای S_1 و S_2، از فضای خطی E، که به صورت زیر تعریف می‌شود، خود یک زیرفضای E است.

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : \ s_1 \in S_1, \ s_2 \in S_2\}.$$

در یک حالت کلی‌تر، فرض کنید $\{E_\gamma \ : \ \gamma \in \Gamma\}$، خانواده‌ای از زیرفضاهای فضای خطی E باشد. مجموع $\sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \mathrm{Span}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)$، یک *جمع مستقیم*[۹] نامیده می‌شود، اگر برای هر $\delta \in \Gamma$، داشته باشیم

$$E_\delta \cap \mathrm{Span}\left(\bigcup_{\gamma \neq \delta} E_\gamma\right) = \{0\} \,.$$

---

[۴] linearly dependent
[۵] basis
[۶] dimension
[۷] coordinate
[۸] subspace
[۹] direct sum

در این حالت برای نمایش $\mathrm{Span}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\Big)$، از نماد $\bigodot_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ استفاده می‌شود. هر عضو $\Big(\bigodot_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\Big) - \{۰\}$ به شکل

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{\gamma_i}, \quad x_{\gamma_i} \in E_{\gamma_i} - \{۰\},\ ۱ \leqslant i \leqslant n,$$

است، وقتی، برای $i \neq j$، $\gamma_i \neq \gamma_j$ باشد.

فرض کنید $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد. آن‌گاه *حاصل‌ضرب دکارتی*[۱۰] خانواده با $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ نمایش داده می‌شود. اگر خانواده، خانواده‌ای از فضاهای κ-خطی باشد، آن‌گاه $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$، یک فضای خطی نسبت به اعمال جمع و ضرب عددی مختصاتی است و در واقع *حاصل‌ضرب مستقیم* خانواده می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فضاهای خطی E و F روی میدان κ را در نظر بگیرید. نگاشت $T : E \longrightarrow F$، κ-*خطی*[۱۱] نامیده می‌شود، اگر برای هر $\alpha, \beta \in \kappa$ و $x, y \in E$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

ملاحظه ۲.۱.۱.

- اگر میدان مورد بحث مشخص باشد، نگاشت κ-خطی را *خطی* می‌نامیم. نگاشت خطی دوسویی $T : E \longrightarrow F$، *یکریختی*[۱۲] نامیده می‌شود. در این حالت E و F را *یکریخت*[۱۳] می‌خوانیم و می‌نویسیم $E \cong F$.
- مجموعه نگاشت‌های خطی از فضای خطی E به فضای خطی F را با نماد $\mathcal{L}(E, F)$ نمایش می‌دهیم. فضای $\mathcal{L}(E, F)$ یک فضای خطی روی میدان κ است.
- فرض کنید G یک فضای خطی باشد و $S \in \mathcal{L}(E, F)$ و $T \in \mathcal{L}(F, G)$. آن‌گاه ترکیب $T \circ S$ از S و T، عضوی از $\mathcal{L}(E, G)$ است، که معمولا به‌صورت TS نمایش داده می‌شود. برای $\mathcal{L}(E, E)$، می‌نویسیم $\mathcal{L}(E)$ و نگاشت همانی روی E را با نماد I_E، نمایش می‌دهیم. فضای $\mathcal{L}(E, \kappa)$ را با نماد $E^\times$ مشخص می‌کنیم، $E^\times$ را فضای *دوگان جبری*[۱۴] E و هر

[۱۰] Cartesian product
[۱۱] κ-linear
[۱۲] isomorphism
[۱۳] isomorphic
[۱۴] algebraic dual space

عضو آن را یک *تابعک خطی*[۱۵] روی E می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید E و F فضاهایی خطی باشند و $T \in \mathcal{L}(E,F)$. برای $\lambda \in F^\times$، نگاشت $T^\times\lambda$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\big(T^\times\lambda\big)(x) = \lambda\big(Tx\big), \quad x \in E.$$

$T^\times\lambda \in E^\times$ و $T^\times \in \mathcal{L}(F^\times, E^\times)$. نگاشت $T^\times$ نگاشت *دوگان جبری*[۱۶] T نامیده می‌شود.

دو تعریف بعدی، به عنوان مقدمه‌ای بر تعاریف فصل پنجم بیان می‌شوند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید E یک فضای خطی حقیقی باشد. نگاشت

$$* : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto x^*,$$

را یک *برگشت*[۱۷] روی E می‌نامند، هرگاه خطی و برگشت‌پذیر باشد، یعنی برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، داشته باشیم

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\alpha x)^* = \alpha x^*, \quad (x^*)^* = x.$$

فضای خطی E با برگشت $*$، یک فضای $*$- *خطی*[۱۸] نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید E و F دو فضای $*$-خطی باشند. نگاشت خطی $T : E \to F$، یک نگاشت $*$-*خطی*[۱۹] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in E$، داشته باشیم $T(x^*) = \big(T(x)\big)^*$. به‌علاوه اگر نگاشت $*$-خطی T دوسویی باشد، آن‌گاه T یک $*$-یکریختی است و فضاهای E و F، $*$-یکریخت هستند.

[۱۵] linear functional
[۱۶] algebraic dual map
[۱۷] involution
[۱۸] $*$-linear space
[۱۹] $*$-linear map

۲.۱.۱ حاصل‌ضرب تانسوری فضاهای خطی

تعریف ۸.۱.۱. فضاهای خطی $E_۱, \ldots, E_n, F$ را در نظر بگیرید. نگاشت زیر را n-*خطی*[۲۰] گویند

$$T : \prod_{i=۱}^{n} E_i \longrightarrow F,$$

اگر برای هر $۱ \leqslant j \leqslant n$ و هر $x_i \in E_i$، که $i = ۱, \ldots, j-۱, j+۱, \ldots, n$، نگاشت

$$x \longmapsto T(x_۱, \ldots, x_{j-۱}, x, x_{j+۱}, \ldots, x_n), \quad E_j \longrightarrow F,$$

خطی باشد.

ملاحظه ۳.۱.۱. مجموعه نگاشت‌های n-خطی از $\prod_{i=۱}^{n} E_i$ به F را با نماد

$$\mathcal{L}^n(E_۱, \ldots, E_n; F),$$

نمایش می‌دهند و در حالت خاصی که $E_۱ = \ldots = E_n = E$، می‌نویسیم $\mathcal{L}^n(E, F)$. $\mathcal{L}^n(E_۱, \ldots, E_n; F)$، خود یک فضای خطی روی میدان κ است. وقتی $n = ۲$، نگاشت را *دوخطی*[۲۱] می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. *حاصل‌ضرب تانسوری*[۲۲] فضاهای خطی $E_۱, \ldots, E_n$، را زوج مرتب $(\imath, F)$ تعریف می‌کنیم، وقتی F فضایی خطی و $\imath \in \mathcal{L}^n(E_۱, \ldots, E_n; F)$، و خاصیت عام زیر برقرار است:
برای فضای خطی G و هر $S \in \mathcal{L}^n(E_۱, \ldots, E_n; G)$، نگاشت خطی منحصربه‌فرد T از F به G موجود باشد، به‌طوری‌که $S = T \circ \imath$. برای فضای خطی F می‌نویسیم

$$\bigotimes_{i=۱}^{n} E_i \quad \text{یا} \quad E_۱ \otimes \ldots \otimes E_n,$$

و برای $\imath(x_۱, \ldots, x_n)$، می‌نویسیم $x_۱ \otimes \ldots \otimes x_n$. علاوه بر آن، $\bigotimes_{i=۱}^{n} E_i$، را به عنوان حاصل‌ضرب تانسوری $E_۱, \ldots, E_n$، در نظر می‌گیریم.

---
[۲۰] n-linear
[۲۱] bilinear
[۲۲] tensor product

ملاحظه ۴.۱.۱.

- حاصل‌ضرب تانسوری معرفی شده در تعریف ۹.۱.۱، همیشه وجود دارد و در حد یکریختی یکتاست.
- گاهی برای تاکید و روشن شدن مطلب، میدان زمینه فضاهای خطی مورد ضرب به صورت اندیس علامت حاصل‌ضرب تانسوری مشخص می‌شود.
- برای نمایش $\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell} E_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=\ell+1}^{n} E_i\right)$، عبارت جایگزین $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$، را به کار می‌بریم.
- هر عنصر z از $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$، را می‌توان به شکل

$$z = \sum_{j=1}^{m} x_{1,j} \otimes x_{2,j} \otimes \ldots \otimes x_{n,j},$$

برای یک m طبیعی، نمایش داد. وقتی برای $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، $x_{i,j} \in E_i$.
برای $z \neq 0$، می‌توان هریک از مجموعه‌های $\{x_{i,j} \ : \ 1 \leq j \leq m\}$، را مستقل خطی فرض کرد.

حکم ۱.۱.۱. *([۱۴، روابط ۴.۳.۱]) فضاهای خطی E و F، روی میدان κ، را در نظر بگیرید. ویژگی‌هایی که در ادامه آمده، در $E \otimes F$، برقرارند*

۱. $(x+y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$، $x, y \in E$، $z \in F$؛

۲. $x \otimes (y+z) = x \otimes y + x \otimes z$، $x \in E$، $y, z \in F$؛

۳. $\alpha(x \otimes y) = (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y)$، $x \in E$، $y \in F$، $\alpha \in \kappa$.

در فصول بعدی خواهیم دید که حکم زیر، نقشی اساسی در خوش تعریف بودن بسیاری از نگاشت‌هایی که ساختاری وابسته به حاصل‌ضرب تانسوری دارند، ایفا می‌کند. نمونه‌هایی از این مطلب در قسمت‌های ۱.۲.۱، ۲.۱.۲، ۳.۱.۲ و مثال ۱.۲.۲ قابل مشاهده است.

حکم ۲.۱.۱. *([۱۴، صفحه ۲۷]) فرض کنید E و F فضاهایی خطی باشند و نگاشت دوخطی $S : E \times F \longrightarrow G$ را در نظر بگیرید. نگاشت خطی منحصربه‌فرد $T : E \otimes F \longrightarrow G$ موجود است، به‌طوری‌که*

$$T(x \otimes y) = S(x,y), \quad x \in E,\ y \in F.$$

نتیجه ۳.۱.۱. *([۱۴، صفحه ۲۷]) فرض کنید E و F فضاهایی خطی باشند. آن‌گاه داریم*

$$(E \otimes F)^{\times} \cong \mathcal{L}(E, F; \mathbb{C}) \cong \mathcal{L}(E, F^{\times}).$$

۲.۱ جبرها

در این بخش، به بیان مفاهیمی در نظریه جبرها می‌پردازیم، که در فصول آینده به کار می‌آیند. کاربرد مطالب این بخش در فصول بعدی، سبب‌ساز پیوستگی تعاریف و قضایای مورد طرح است.

۱.۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. فضای κ-خطی A، یک جبر[۲۳] روی میدان κ نامیده می‌شود، اگر نگاشت

$$m : A \times A \longrightarrow A, \quad (a,b) \longmapsto a.b,$$

موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $a,b,c \in A$، داشته باشیم

۱. $a.(b.c) = (a.b).c$؛

۲. $a.(b+c) = a.b + a.c$، $(a+b).c = a.c + b.c$؛

۳. $(\alpha a).b = a.(\alpha b) = \alpha(a.b)$.

ملاحظه ۱.۲.۱.

- ویژگی (۱)، خاصیت *شرکت‌پذیری*[۲۴] نامیده می‌شود و نام کامل جبر تعریف شده، جبرخطی شرکت‌پذیر روی میدان κ است، که از این پس منظور ما از جبر، همین نوع جبر است.

- معمولا عبارت ab، را به‌جای عبارت $a.b$ به‌کار می‌بریم. نگاشت m یک نگاشت دوخطی است، که نگاشت *ضرب*[۲۵] نام گرفته است. به‌علاوه نگاشت خطی $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ موجود است، به‌طوری‌که

$$\mu(a \otimes b) = ab, \quad a,b \in A,$$

نگاشت μ، نگاشت *ضرب القایی*[۲۶] نامیده می‌شود. در فصل ۲، خواهیم دید که چگونه نگاشت μ در ارائه یک نگاه متفاوت به مفهوم جبرها یاریمان می‌کند.

- اگر $\kappa = \mathbb{R}$، آن‌گاه A را جبر *حقیقی* و اگر $\kappa = \mathbb{C}$، آن را جبر *مختلط* می‌خوانیم.

---

[۲۳] algebra
[۲۴] associativity
[۲۵] product
[۲۶] induced product

تعریف ۱.۲.۲. اگر عنصر ناصفر ۱_A در جبر A موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $a \in A$، $۱_A a = a۱_A = a$، آن‌گاه A یک جبر *یکانی*[۲۷] و ۱_A عنصر یکه[۲۸] جبر A نامیده می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۲. اگر A یک جبر یکانی باشد، آن‌گاه نگاشت خطی $\eta : \kappa \longrightarrow A$ موجود است، به‌طوری‌که برای هر $\alpha \in \kappa$، $\eta(\alpha) = \alpha ۱_A$.

تعریف ۱.۲.۳. نگاشت خطی ψ از جبر A به جبر B را یک *ریختار جبری*[۲۹] گویند، اگر برای هر $a, b \in A$، داشته باشیم

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b).$$

اگر علاوه بر این، نگاشت ψ دوسویی باشد، آن‌گاه آن را *یکریختی جبری* می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۴. جبر A را در نظر بگیرید. جبر حاصل از معکوس کردن ترتیب ضرب در جبر A، جبر *مخالف*[۳۰] جبر A نام دارد و با نماد A^{op} نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۵. زیرمجموعه‌ای از جبر A که با ضرب A یک جبر باشد، یک *زیرجبر*[۳۱] از جبر A نامیده می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۳. توجه داریم که میدان زیرجبر B از جبر A، همان میدان جبر A است و نگاشت ضرب آن تحدید نگاشت ضرب A به زیرجبر B است.

تعریف ۱.۲.۶. جبر A را در نظر بگیرید. زیرفضای خطی J از A یک *ایده‌آل* چپ (*راست*) نامیده می‌شود، اگر $A.J \subseteq J$ ($J.A \subseteq J$) و یک *ایده‌آل*[۳۲] نامیده می‌شود، اگر $A.J + J.A \subseteq J$.

تعریف ۱.۲.۷. ایده‌آل J از جبر A را در نظر بگیرید. فضای خارج‌قسمتی A/J، به همراه ضرب زیر، یک جبر است

$$(a + J)(b + J) = ab + J, \quad a, b \in A.$$

این جبر را جبر *خارج‌قسمتی*[۳۳] می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۸. ایده‌آل J از جبر A را یک ایده‌آل هم*متناهی*[۳۴] گویند، اگر بعد جبر خارج‌قسمتی A/J متناهی باشد.

[۲۷] unital
[۲۸] unit
[۲۹] algebra morphism
[۳۰] opposite
[۳۱] subalgebra
[۳۲] ideal
[۳۳] quotient
[۳۴] cofinite

تعریف ۹.۲.۱. تابعک خطی ϕ از جبر A را یک تابعک خطی *نمایانگر*[۳۵] گویند، اگر هسته ϕ شامل یک ایده‌آل هم‌متناهی باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. جبر A را در نظر بگیرید. ایده‌آل J از A *مدولی*[۳۶] نامیده می‌شود، اگر عنصر $u \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $A(1_A - u) + (1_A - u)A \subset J$. ایده‌آل J از A یک ایده‌آل *ماکسیمال*[۳۷] نامیده می‌شود، اگر J در خانواده ایده‌آل‌های A یک عنصر ماکسیمال باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. ایده‌آل J از جبر A را در نظر بگیرید. *خارج‌قسمت*[۳۸] J به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$J : A = \{a \in A : aA \subset J\}.$$

خارج‌قسمت یک ایده‌آل چپ مدولی ماکسیمال یک ایده‌آل *اولیه*[۳۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. جبر A را در نظر بگیرید. اشتراک ایده‌آل‌های اولیه A *رادیکال*[۴۰] A نامیده می‌شود و آن را با نماد $\mathrm{rad}(A)$ نمایش می‌دهند. جبر A را *نیم‌ساده*[۴۱] گویند، اگر $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$.

تعریف ۱۳.۲.۱. جبر A را *ساده*[۴۲] گویند، اگر $A^2 \neq 0$ و به‌علاوه، 0 و A تنها ایده‌آل‌های A باشند.

در حکم بعدی، با حاصل‌ضرب تانسوری جبرها آشنا خواهیم شد.

حکم ۱.۲.۱. ([۱۴، حکم ۱۱.۳.۱]) *جبرهای $A_1, \dots, A_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید A فضای خطی $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ باشد. آن‌گاه ضرب منحصربه‌فردی، که در ادامه آمده، روی A وجود دارد، و A به همراه آن یک جبر است*

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = a_1 b_1 \otimes \dots \otimes a_n b_n, \quad a_i, b_i \in A_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

اگر $A_1, \dots, A_n$ جابجایی باشند، آن‌گاه A جابجایی است. اگر e_i عنصر یکه A_i باشد، آن‌گاه $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ عنصر یکه A است. جبر A حاصل‌ضرب تانسوری جبرهای $A_1, \dots, A_n$ است.

دو تعریف بعدی، برای شناخت فضای اشتقاق‌ها و هم‌اشتقاق‌ها، در ادامه، به کار خواهند آمد.

---

[۳۵] representative
[۳۶] modular
[۳۷] maximal
[۳۸] quotient
[۳۹] primitive
[۴۰] radical
[۴۱] semisimple
[۴۲] simple

تعریف ۱۴.۲.۱. فضای خطی A روی میدان κ با عمل دوتایی[۴۳] $[.,.] : A \times A \longrightarrow A$ را در نظر بگیرید. فضای A به همراه $[.,.]$ یک *جبر لی*[۴۴] نامیده می‌شود، اگر عمل دوتایی $[.,.]$ برای هر $a, b, c \in A$ و $\alpha, \beta \in \kappa$، ویژگی‌های زیر را داشته باشد

i) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$ و $[a, \alpha b + \beta c] = \alpha[a, b] + \beta[a, c]$؛

ii) $[a, a] = 0$؛

iii) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$.

تعریف ۱۵.۲.۱. دستگاهی از نگاشت‌های خطی روی فضایی κ-خطی را یک *جبر لی محدود شده از نگاشت‌های خطی*[۴۵] گویند، هرگاه نسبت به اعمال جمع، تفریق، ضرب عددی، عمل دوتایی جبر لی و گرفتن توان pام بسته باشد، وقتی $p = \mathrm{char}(\kappa)$، برابر صفر یا عددی اول است.

نمونه‌هایی از یک جبر لی را در بحث اشتقاق‌ها و هم‌اشتقاق‌ها خواهیم دید. تعریف بعدی، پیش زمینه‌ای است بر نخستین تعریفی که در فصل پنجم خواهیم دید.

تعریف ۱۶.۲.۱. یک *برگشت جبری*[۴۶]، یا به بیان ساده‌تر یک برگشت روی A، یک برگشت روی A به عنوان یک فضای خطی است، به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$، داشته باشیم $(ab)^* = b^* a^*$. جبر A با برگشت $*$، یک $*$-جبر[۴۷] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. $*$-جبر A *سره*[۴۸] نام دارد، اگر برای $a \in A$، $a^* a = 0$ نتیجه دهد $a = 0$ و *بسیار سره*[۴۹] است، اگر برای $a_i \in A$، $1 \leq i \leq n$، $\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i = 0$ نتیجه دهد

$$a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

نگاشت برگشت $*$ را *سره* یا *بسیار سره* گویند، هرگاه $*$-جبر $(A, *)$ خاصیت نظیر را داشته باشد.

حکم ۲.۲.۱. ([۱۴، حکم ۴.۱۰.۱]) *فرض کنید A و B دو $*$-جبر باشند. آن‌گاه $A \otimes B$ یک $*$-جبر است، با نگاشت برگشتی که برای $a \in A$ و $b \in B$، در تساوی $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$، صدق می‌کند.*

---

[۴۳] binary operation
[۴۴] Lie algebra
[۴۵] restricted Lie algebra of linear transformations
[۴۶] algebra involution
[۴۷] $*$-algebra
[۴۸] proper
[۴۹] very proper

۲.۲.۱ جبر ماتریس‌ها

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید E یک فضای خطی باشد. برای $m, n \in \mathbb{N}$، $M_{m,n}(E)$ فضای خطی شامل ماتریس‌های $m \times n$، با درایه‌های عضو E، تعریف می‌شود.

ملاحظه ۴.۲.۱.

- یک عضو $M_{m,n}(E)$، به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$(x_{ij}) = (x_{ij})_{۱\leq i\leq m, ۱\leq j\leq n} = (x_{ij} : ۱ \leq i \leq m, ۱ \leq j \leq n).$$

- اگر $m = n$، آن‌گاه $M_{n,n}(E)$، به صورت $M_n(E)$، نوشته می‌شود و اگر برای $i \neq j$، $x_{ij} = ۰$، ماتریس $(x_{ij}) \in M_n(E)$ *قطری*[۵۰] نامیده می‌شود.

- از این پس، منظور از M_n جبر $M_n(\mathbb{C})$ است و بنابراین M_n جبری مختلط با بعد $n^۲$ است.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. آن‌گاه $M_n(A)$، با نگاشت ضرب زیر، یک جبر است

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (\sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj}).$$

این جبر را *جبر ماتریسی کامل از مرتبه* n *روی* A[۵۱] می‌نامند.

ملاحظه ۵.۲.۱.

- اگر A یک جبر یکانی باشد، آن‌گاه ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر آن ۱_A باشد، یک عنصر یکه برای $M_n(A)$ است، که آن را با نماد E_n نمایش می‌دهیم.

- اگر $A = \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $M_n(\mathbb{R})$ را *جبر ماتریس‌های حقیقی*[۵۲] می‌نامیم.

در تعریف بعدی و همین‌طور در طول پایان‌نامه، نگاشت δ_{ij} همان نگاشت *دلتای کرونکر*[۵۳] است، که برای $i = j$، برابر یک و در غیر این‌صورت برابر صفر خواهد بود.

تعریف ۲۰.۲.۱. جبر A را در نظر بگیرید. مجموعه $\{E_{ij} : ۱ \leqslant i, j \leqslant n\}$، از عناصر A یک *دستگاه یکه‌های ماتریسی از اندازه* n *برای* A[۵۴]، نامیده می‌شود، اگر داشته باشیم

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}, \quad ۱ \leq i, j, k, \ell \leq n.$$

[۵۰] diagonal
[۵۱] full matrix algebra of order n over A
[۵۲] real matrix algebra
[۵۳] Kronecker delta
[۵۴] system of matrix units of size n for A

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید e_{ij}، برای $۱ \leq i,j \leq n$، ماتریسی باشد، که درایه (i,j)ام آن ۱ و بقیه درایه‌هایش ۰ است. آن‌گاه $\{e_{ij} \; : \; ۱ \leqslant i,j \leqslant n\}$، یک دستگاه یکه‌های ماتریسی برای $M_n(\mathbb{R})$ است. این دستگاه را دستگاه یکه‌های ماتریسی *استاندارد*[۵۵] می‌نامند. دستگاه یکه‌های ماتریسی استاندارد، پایه‌ای برای جبر ماتریس‌های حقیقی است.

حکم ۳.۲.۱. ([۱۴، حکم ۱.۳.۱۵]) *جبر $M_n(\kappa)$، برای هر n طبیعی و هر میدان κ، یک جبر ساده است.*

قضیه ۴.۲.۱. ([۱۴، قضیه ۱.۵.۹]) *اگر A جبری مختلط و نیم‌ساده با بعد متناهی باشد، آن‌گاه با یک جمع مستقیم متناهی از جبرهای ماتریسی مختلط یکریخت است.*

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید A یک $*$-جبر و $\{E_{ij} \; : \; ۱ \leqslant i,j \leqslant n\}$ یک دستگاه یکه‌های ماتریسی برای A باشد. اگر برای هر عضو این دستگاه داشته باشیم

$$E_{ij}^* = E_{ji}, \quad ۱ \leq i,j \leq n,$$

آن‌گاه این دستگاه را یک دستگاه *یکه‌های $*$-ماتریسی*[۵۶] برای A می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $X = (\alpha_{ij}) \in M_n$ و قرار دهید $X^* = (\overline{\alpha_{ji}})$. نگاشت $X \longmapsto X^*$ یک برگشت روی M_n است. هرچند این برگشت روی جبر کامل ماتریس‌های مختلط بسیار سره است، اما برگشتی هم روی این جبر وجود دارد که سره نیست. برای مثال، برگشت زیر روی $M_۲$ را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \overline{\delta} & -\overline{\beta} \\ -\overline{\gamma} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

در واقع، همان‌طور که در حکم بعدی می‌بینیم، $*$ تنها برگشت سره روی M_n است.

حکم ۵.۲.۱. ([۱۴، لم ۱.۱۰.۸]) *فرض کنید $\dagger$ یک برگشت سره روی M_n باشد. آن‌گاه $(M_n, \dagger)$ با $(M_n, *)$، $*$-یکریخت است.*

قضیه ۶.۲.۱. ([۱۴، حکم ۱.۱۰.۹]) *فرض کنید $(A,*)$ یک $*$-جبر ناصفر سره با بعد متناهی باشد. آن‌گاه به‌ازای $n_۱, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$، A با $M_{n_۱} \odot \ldots \odot M_{n_\ell}$، $*$-یکریخت است.*

---

[۵۵] standard
[۵۶] $*$-matrix units