بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **داود لطفی‌احمدآبادی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی **۸۹۵۲۰۵۱۰۲۶** تحت عنوان: «**درباره میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت و برخی کاربردهای آن**» را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۱۱ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ ~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشته ریاضی محض (هندسه) است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب داود لطفی احمدآبادی دانشجوی رشته ریاضی محض (هندسه) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: داود لطفی احمدآبادی

تاریخ و امضا:

۹۱/۳/۹

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب داود لطفی اکبرآباد دانشجوی رشته ریاضی محض (هندسه) ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: ....

تاریخ: ۹۱/۱۲/۹

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

درباره میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت و برخی کاربردهای آن

نگارنده :

داود لطفی احمدآبادی

استاد راهنما :

دکتر سید محمدباقر کاشانی

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

سپاس پروردگار یکتا را که توفیق دانش‌اندوزی به من بخشید. اکنون که به لطف او کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، برخود لازم می‌دانم تا از راهنمایی‌های استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی سپاس‌گزاری کنم.

چکیده

در این پایان نامه، میدان های برداری کیلینگ نا بدیهی با طول ثابت بر خمینه‌های هموار ریمانی مطالعه می‌شود. مثال‌های گوناگونی از چنین میدان‌های برداری کیلینگ بدست آمده از عمل طولپایی موثر(ولی نه آزاد) S^1 بر برخی خمینه‌های ریمانی داده می‌شود.

برخی محدودیت های خمیدگی بر خمینه‌های ریمانی برای پذیرش میدان‌های برداری کیلینگ ، معرفی می‌شود. در ادامه وجود یک میدان برداری کیلینگ با برخی ویژگی‌ها بر یک خمینه ریمانی برای مشخص کردن کره‌های فرد بعدی و خمینه‌های اینشتین بکار می‌رود. این پایان نامه به تشریح مرجع‌های[2] و [9] می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی : میدان برداری کیلینگ، خمینه‌های همدیس تخت، خمینه‌های اینشتین، خمینه‌های ساساکی، خمیدگی ریچی.

فهرست

پیش گفتار

میدان‌های برداری که شار آنها در هر نقطه طولپایی باشد دارای اهمیت بسیاری است و کاربرد های فراوانی در ریاضیات و فیزیک دارد. چنین میدان‌های برداری به افتخار ریاضیدان آلمانی، ویلهلم کیلینگ (**Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923)**)، **میدان برداری کیلینگ** نامند.

میدان‌های برداری کیلینگ (به ویژه با طول ثابت) در مرجع‌های زیادی مطالعه شده است، همچنین هندسه خمینه‌های ریمانی که میدان برداری کیلینگ می‌پذیرند، به طور گسترده بررسی شده است

میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت به طور طبیعی در برخی ساختارهای هندسی مانند خمینه‌های K-سایا و خمینه‌های ساساکی ظاهر می‌شود.

مانع‌های زیادی برای وجود میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت بر یک خمینه ریمانی وجود دارد، از جمله اینکه با وجود میدان‌های برداری کیلینگ نا بدیهی بر خمینه ریمانی (M,g)، خمیدگی ریچی M منفی نمی‌تواند باشد.

این پایان نامه که مرجع های[9] و [2] را تشریح می‌کند به بررسی ویژگی ها و کاربردهای میدان های برداری کیلینگ می‌پردازد و دارای سه فصل است.

فصل اول به بیان پیش نیازها می‌پردازد، از جمله معرفی خمینه های همدیس تخت، میدانهای برداری کیلینگ، خمینه‌های سایا، K-سایا و ساساکی.

فصل دوم به تشریح مرجع [9] می پردازد، در این فصل برخی محدودت های خمیدگی بر خمینه‌های دارای میدان برداری کیلینگ بررسی می شود. ابتدا ثابت می‌شود اگر ξ یک میدان برداری کیلینگ یکه بر خمینه ریمانی کامل (M,g) و $x\in M$ یک نقطه بحرانی نگاشت $g(\xi,\xi)^{1/2}$ باشد، خمیدگی برشی بر صفحه‌های شامل بردار $\xi(x)$ نا منفی است. و با بهره بردن آن نتیجه می‌شود خمینه ریمانی کامل (M,g) با خمیدگی ریچی منفی، میدان برداری کیلینگ نا بدیهی ندارد. همچنین ثابت می‌شود هر میدان برداری کیلینگ بر یک خمینه ریمانی کامل فشرده‌ی زوج بعدی (M,g) با خمیدگی برشی مثبت دارای نقطه تکین است.در ادامه با آوردن قضیه ای از "ودسلی" ، ثابت می شود اگر یک عمل هموار، موثر و تقریباً آزاد S^1 بر خمینه کامل ریمانی داده شده باشد، بر M می‌توان متریکی چون g گذاشت که بر (M,g) یک میدان برداری کیلینگ یکه وجود داشته باشد. پس از آن مثال های از خمینه هایی را که با این روش می‌توان به یک میدان برداری کیلینگ یکه مجهز کرد بیان می شود، مانند کره های فرد بعدی.

فصل سوم به تشریح مرجع [2] می پردازد. در این فصل با بهره بردن از وجود یک میدان برداری کیلینگ با برخی ویژگی ها بر یک خمینه ریمانی، شرط های کافی برای اینکه آن خمینه با کره فرد بعدی یا یک خمینه اینشتین طولپا باشد را ارائه می‌شود. در بخش اول این فصل ثابت می‌شود هر خمینه کامل، همدیس تخت، ساده همبند با خمیدگی برشی مثبت که یک میدان برداری کیلینگ ناصفر با طول ثابت بر آن موجود باشد که بردار ویژه عملگر ریچی باشد، با یک کره فرد بعدی طولپاست. در بخش دوم ثابت می‌شود وجود یک میدان برداری برداری کیلینگ با طول ثابت بر یک خمینه ریمانی با تانسور ریچی موازی که خمیدگی برشی تنها بر صفحه‌های شامل آن میدان برداری کیلینگ مثبت باشد، یک خمینه اینشتین را بدست می‌دهد. سرانجام شرطی بیان می‌شود که با آن یک خمینه ریمانی کامل که بر آن یک میدان برداری کیلینگ باشد، با فضای اقلیدسی طولپا می‌شود.

فصل ۱–   پیش نیاز

۱–۱–   تعریف‌ها و قضیه ها

تعریف ۱–۱-۱ [5]

اگر (M,g) یک خمینه ریمانی با هموستار لوی- چیوتیای ∇ باشد، ***تانسور خمیدگی ریمانی*** *M چنین تعریف می‌شود*

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

و اگر Π یک صفحه مماس بر M در نقطه p باشد که با بردارهای $v,w \in T_pM$ تولید شود، ***خمیدگی برشی*** *M نسبت به صفحه Π چنین تعریف می‌شود*

$$K(\Pi) = K(v,w) = \frac{g(R(v,w)v.w)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}$$

یادآوری، $K(\Pi)$ بستگی به پایه ویژه $\{v,w\}$ از آن ندارد.

قضیه ۱–۱-۲ [5]

خمینه ریمانی (M,g) دارای خمیدگی برشی ثابت c است اگر و تنها اگر

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

تعریف ۱-۱-۳ [5]

برای نگاشت $f \in C^{\infty}(M)$ میدان برداری ***گرادیان*** f، میدان برداری هم‌ارز متریکی df است و با ∇f یا $\mathrm{grad}\ f$ نمایش داده می‌شود، یعنی

$$g(\nabla f, X) = df(X) = Xf \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

تعریف ۱-۱-۴ [5]

فرض کنید $\{e_1, \cdots, e_n\}$ یک میدان کنجی (یکه متعامد) بر خمینه ریمانی (M, g) باشد آنگاه ***دیورژانس*** میدان برداری V به صورت $divV = \sum g(\nabla_{e_i} V, e_i)$ و دیوارژنس تانسور متقارن A از نوع $(0,2)$ چنین تعریف می‌شود

$$(divA)(X) = \sum (\nabla_{e_i} A)(e_i, X).$$

تعریف ۱-۱-۵ [5]

هسیان تابع $f \in C^{\infty}(M)$ چنین تعریف می‌شود

$$Hessf = \nabla(\nabla f).$$

تعریف ۱-۱-۶ [5]

لاپلاسین تابع $f \in C^{\infty}(M)$ چنین تعریف می‌شود

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

تعریف ۱-۱-۷ [5]

فرض کنید $\{e_1, \cdots, e_n\}$ یک میدان کنجی (یکه متعامد) بر خمینه ریمانی (M, g) باشد آنگاه ***تانسور خمیدگی ریچی*** چنین تعریف می‌شود

$$Ric(X, Y) = \sum g(R(X, e_i)Y, e_i)$$

تعریف وگزاره ۱-۱-۸ [2]

عملگر ریچی، Q *یک میدان تانسوری متقارن نوع (۱،۱) است که چنین تعریف می‌شود*

$$Ric(X,Y)=g(QX,Y)\Rightarrow$$

$$g(Q(X),Y)=Ric(X,Y)=\sum g(R(X,e_i)e_i,Y)$$

$$\Rightarrow Q(X)=\sum R(X,e_i)e_i$$

تعریف ۱-۱-۹[5]

خمیدگی عددی خمینه ریمانی (M,g) *چنین تعریف می‌شود*

$$S=\sum Ric(e_i,e_i)$$

قضیه ۱-۱-۱۰ [5]

بر خمینه ریمانی (M,g) داریم $dS=۲divRic$.

قضیه (گرین) ۱-۱-۱۱ [1]

اگر (M,g) یک خمینه ریمانی فشرده و $X\in\mathfrak{X}(M)$، آنگاه $\int_M divX=۰$.

نتیجه ۱-۱-۱۲ [1]

اگر (M,g) یک خمینه ریمانی فشرده و $f\in C^\infty(M)$ آنگاه $\int_M \Delta f=۰$.

برهان

از قضیه گرین داریم

$$\int_M \Delta f=\int_M div(\nabla f)=۰$$

تعریف ۱-۱-۱۳[5]

*خمینه ریمانی (M,g) را یک **خمینه اینشتین** نامند هرگاه $Ric=cg$ که در آن c یک عدد حقیقی ثابت است.*

نکته ۱-۱-۱۴ [5]

در برخی از مرجع‌های این پایان نامه تانسور خمیدگی ریمانی چنین تعریف شده است

$$R(X,Y)Z=-[\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_Y\nabla_X Z]$$

این اختلاف باعث تغییری در خمیدگی برشی، ریچی و عددی نمی‌شود و همه تعریف‌ها و قضیه‌های این پایان نامه برای هر دو تعریف تانسور خمیدگی ریمانی درست است.

۱-۲- خمینه های همدیس تخت

تعریف ۱-۲-۱[6]

*وابرسانی $f:(M.g)\to(\tilde{M},\tilde{g})$ بین دو خمینه ریمانی را نگاشت **همدیس** نامند هرگاه $f^*\tilde{g}=e^{2u}g$ برای یک نگاشت هموار $u:M\to\mathbb{R}$.*

تعریف ۱-۲-۲ [6]

*خمینه ریمانی (M,g) را **همدیس تخت** نامند هرگاه یک نگاشت همدیس بین آن و فضای اقلیدسی یافت شود.*

لم ۱-۲-۳ [6]

فرض کنید $\tilde{g}=e^{2u}g$ آنگاه $\tilde{\nabla}=\nabla+B$، برای میدان تانسوری متقارن B از نوع (۲,۱) که

$$B(X,Y)=du(X)Y+du(Y)X-g(X,Y)\nabla u$$

برهان:

$\tilde{\nabla}=\nabla+B$ یک هموستار بدون تاب است زیرا B متقارن است. شرط سازگاری $\tilde{\nabla}$ با متریک در پایین اثبات می‌شود

$$(\tilde{\nabla}_X\tilde{g})(Y,Z)=\tilde{\nabla}_X\tilde{g}(Y,Z)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XY,Z)-\tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_XZ)$$

$$=\tilde{\nabla}_Xe^{2u}g(Y,Z)-e^{2u}g(\tilde{\nabla}_XY,Z)-e^{2u}g(Y,\tilde{\nabla}_XZ)$$

$$=\nabla_Xe^{2u}g(Y,Z)+B(X,e^{2u}g(Y,Z))-e^{2u}g(\nabla_XY+B(X,Y),Z)$$

$$-e^{2u}g(Y,\nabla_XZ+B(X,Z))$$

$$=e^{2u}\nabla_Xg(Y,Z)+2e^{2u}du(X)g(Y,Z)+e^{2u}B(X,g(Y,Z))$$

$$-e^{2u}g(\nabla_XY+B(X,Y),Z)-e^{2u}g(Y,\nabla_XZ+B(X,Z))$$

$$=e^{2u}[Xg(Y,Z)+2du(X)g(Y,Z)+B(X,g(Y,Z))$$

$$-g(\nabla_XY+B(X,Y),Z)-g(Y,\nabla_XZ+B(X,Z))]$$

$$=e^{2u}[Xg(Y,Z)+2du(X)g(Y,Z)+B(X,g(Y,Z))$$

$$-g(\nabla_XY,Z)-g(Y,\nabla_XZ)-g(B(X,Y),Z)-g(Y,B(X,Z))]$$

$$=e^{2u}[2du(X)g(Y,Z)+B(X,g(Y,Z))-g(B(X,Y),Z)-g(Y,B(X,Z))]$$

$$=e^{2u}[2du(X)g(Y,Z)-g(du(X)Y+du(Y)X-g(X,Y)\nabla u,Z)$$

$$-g(Y,du(X)Z+du(Z)X-g(X,Z)\nabla u)]$$

$$=e^{2u}[2du(X)g(Y,Z)-du(X)g(Y,Z)-du(Y)g(X,Z)+g(X,Y)g(\nabla u,Z)$$

$$-du(X)g(Y,Z)-du(Z)g(Y,X)+g(X,Z)g(Y,\nabla u)]$$

$$=e^{2u}[-du(Y)g(X,Z)+du(Z)g(X,Y)-du(Z)g(Y,X)+du(Y)g(X,Z)]=0$$

بنابراین $\tilde{\nabla}=\nabla+B$ هموستار لوی-چویتیای بدست آمده‌ی $\tilde{g}$ است.□

تعریف ۱-۲-۴ [6]

فرض کنید $b_1,b_2:V\times V\to\mathbb{R}$ دو فرم متقارن ۲-خطی بر یک فضای برداری باشد. ضرب کولکرنی-نومیزوی b_1 و b_2 چنین تعریف می‌شود

$$(b_1 \wedge b_2)(x,y,z,w) = \begin{vmatrix} b_1(x,z) & b_1(x.w) \\ b_2(y,z) & b_2(y,w) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2(x,z) & b_2(x,w) \\ b_1(y,z) & b_1(y,w) \end{vmatrix}$$

ضرب کولکرنی-نومیزو، ۲-خطی و متقارن است و دارای ویژگی‌های شبیه تانسور خمیدگی به صورت پایین است

$$b_1 \wedge b_2(x,y,w,z) = b_1 \wedge b_2(y,x,z,w) = -b_1 \wedge b_2(x,y,z,w)$$

$$b_1 \wedge b_2(x,y,z,w) = b_1 \wedge b_2(z,w,x,y)$$

$$b_1 \wedge b_2(x,y,z,w) + b_1 \wedge b_2(y,z,x,w) + b_1 \wedge b_2(z,x,y,w) = 0$$

لم ۱-۲-۵ [6]

اگر $\tilde{g} = e^{2u}g$، و r تانسور خمیدگی از نوع (۴,۰) باشد یعنی $r = g(R,.)$، آنگاه تانسور خمیدگی از نوع (۴.۰)وابسته به $\tilde{g}$ به صورت $\tilde{r} = e^{2u}(r - b_u \wedge g)$ است که در آن

$$b_u(X,Y) = \mathrm{Hess}\, u(X,Y) - du(X)du(Y) + \frac{1}{2} g(\nabla u, \nabla u) g(X,Y)$$

برهان:

بنابر لم ۱-۲-۳ $\tilde{\nabla} = \nabla + B$ پس

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z$$

$$= \nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z) - \nabla_X \tilde{\nabla}_Y Z - B(X, \tilde{\nabla}_Y Z) + \nabla_Y \tilde{\nabla}_X Z + B(Y, \tilde{\nabla}_X Z)$$

$$= \nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z) - \nabla_X (\nabla_Y Z + B(X,Z)) - B(X, \nabla_Y Z + B(Y,Z))$$

$$+ \nabla_Y (\nabla_X Z + B(X,Z)) + B(Y, \nabla_X Z + B(X,Z))$$

$$= \nabla_{[X,Y]}Z + B(\nabla_X Y, Z) - B(\nabla_Y X, Z) - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X (B(X,Z)) - B(X, \nabla_Y Z) - B(X, B(Y,Z))$$

$$+ \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y (B(X,Z)) + B(Y, \nabla_X Z) + B(Y, B(X,Z))$$

$$= R(X,Y)Z - (\nabla_X B)(Y,Z) + (\nabla_Y B)(X,Z) - B(X, B(Y,Z)) + B(Y, B(X,Z))$$

از سویی

$$g((\nabla_X B)(Y,Z),W)=\mathrm{Hess}\,u(X,Y)g(Z,W)+\mathrm{Hess}\,u(X,Z)g(Y,W)-\mathrm{Hess}\,u(X,W)g(Y,Z)$$

و

$$\begin{aligned} g(B(X,B(Y,Z)),W)&=[du(X)du(Y)g(Z,W)-g(X,Y)du(Z)du(W)]\\ &+[du(X)du(Z)g(Y,W)+۲g(X,W)du(Y)du(Z)-g(X,Z)du(Y)du(W)]\\ &-g(X,W)g(Y,Z)g(\nabla u,\nabla u)\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)&=e^{۲u}g(R(X,Y)Z-(\nabla_X B)(Y,Z)+(\nabla_Y B)(X,Z)-B(X,B(Y,Z))+B(Y,B(X,Z)),W)\\ &=e^{۲u}[g(R(X,Y)Z,W)-g((\nabla_X B)(Y,Z),W)+g((\nabla_Y B)(X,Z),W)\\ &-g(B(X,B(Y,Z)),W)+g(B(Y,B(X,Z)),W)]\\ &=e^{۲u}[r(X,Y,Z,W)-\mathrm{Hess}u(X,Y)g(Z,W)-\mathrm{Hess}u(X,Z)g(Y,W)+\mathrm{Hess}u(X,W)g(Y,Z)\\ &+\mathrm{Hess}u(Y,X)g(Z,W)+\mathrm{Hess}u(Y,Z)g(X,W)-\mathrm{Hess}u(Y,W)g(X,Z)\\ &-[du(X)du(Y)g(Z,W)-g(X,Y)du(Z)du(W)]\\ &-[du(X)du(Z)g(Y,W)+۲g(X,W)du(Y)du(Z)-g(X,Z)du(Y)du(W)]\\ &+g(X,W)g(Y,Z)g(\nabla u,\nabla u)\\ &+[du(X)du(Y)g(Z,W)-g(X,Y)du(Z)du(W)]\\ &+[du(X)du(Z)g(X,W)+۲g(Y,W)du(X)du(Z)-g(Y,Z)du(X)du(W)]\\ &-g(Y,W)g(X,Z)g(\nabla u,\nabla u)]\\ &=e^{۲u}[r(X,Y,Z,W)-(b_u\wedge g)(X,Y,Z,W)]\end{aligned}$$

بنابراین

$\tilde{r} = e^{2u}(r - b_u \wedge g)$

نتیجه ۱-۲-۶ [6]

فرض کنید $\tilde{g} = e^{2u}g$، آنگاه برای خمیدگی برشی داریم

$$\tilde{K}(X,Y) = e^{-2u}(K(X,Y) - \operatorname{tr} b_u|_{\operatorname{span}\{X,Y\}})$$

و اگر $\dim M = 2$ آنگاه $\tilde{K} = e^{-2u}(K - \Delta u)$

برهان:

اگر $\{e_1, e_2\}$ یک پایه یکه متعامد نسبت به g برای صفحه $\operatorname{span}\{X,Y\}$ باشد، داریم

$$\tilde{K}(X,Y) = \frac{\tilde{r}(e_1,e_2,e_1,e_2)}{\tilde{g}(e_1,e_1)\tilde{g}(e_2,e_2)}$$

$$= \frac{e^{2u}(r(e_1,e_2,e_1,e_2) - (b_u \wedge g)(e_1,e_2,e_1,e_2))}{e^{4u}g(e_1,e_1)g(e_2,e_2)}$$

$$= e^{-2u}[K(X,Y) - b_u(e_1,e_1) - b_u(e_2,e_2)]$$

$$= e^{-2u}[K(X,Y) - \operatorname{tr} b_u|_{\operatorname{span}\{X,Y\}}]$$

و در بعد ۲ داریم $\operatorname{tr} b_u = \operatorname{tr}\operatorname{Hess} u = \Delta u$

تعریف ۱-۲-۷ [6]

*فرض کنید (M,g) یک خمینه ریمانی n-بعدی باشد. تانسور **ویل** و **شوتن** بر M چنین تعریف می‌شود*

تانسور شوتن: $sch = \frac{1}{n-2}(Ric - \frac{S}{2(n-1)}g)$

تانسور ویل: $w = r - sch \wedge g$

لم ۱-۲-۸ [6]

فرض کنید $\tilde{g} = e^{2u}g$، آنگاه $\tilde{w} = e^{2u}w$ و $\widetilde{sch} = sch - b_u$.

بویژه تانسور ویل W از نوع $(۳,۱)$ ، $w=g(W,\cdot)$، تحت با تبدیل همدیس متریک ناورداست که به آن ((تانسور خمیدگی همدیس)) نیز می‌گویند

تعریف ۱-۲-۹[6]

*تانسور T از نوع $(۱,۳)$ را **کودازی** نامند هرگاه* $(\nabla_X T)(Y,Z)=(\nabla_Y T)(X,Z)$ $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M),$.

قضیه ۱-۲-۱۰[6]

خمینه ریمانی (M,g) از بعد $n\geq ۳$، همدیس تخت است اگر و تنها اگر

الف) برای $n=۳$ تانسور شوتن آن کودازی باشد.

ب) برای $n>۳$ تانسور ویل آن صفر شود.

برهان:

با استفاده از لم ۱-۲-۵ آشکار است که (M,g) همدیس تخت است اگر و تنها اگر $w=۰$ و نگاشت u چنان موجود باشد که $sch=b_u$. برهان در گام های زیر داده می‌شود.

گام اول: اگر $n=۳$ آنگاه $w=۰$

فرض کنید $\{e_۱,e_۲,e_۳\}$ یک پایه یکه متعامد برای T_pM باشد، آنگاه

$$r(e_i,e_j,e_i,e_j)=Ric(e_i,e_i)+Ric(e_j,e_j)-\frac{۱}{۲}S=(sch\wedge g)(e_i,e_j,e_i,e_j)$$

برای $i\neq j$، که نشان می‌دهد w همواره صفر است

گام دوم: برای $n>۳$، اگر $w=۰$ آنگاه $(\nabla_X sch)(Y,Z)=(\nabla_Y sch)(X,Z)$،

اگر $w=۰$ آنگاه $r=sch\wedge g \Leftarrow (\nabla_X r)=(\nabla_X sch)\wedge g$ پس با بهره بردن از اتحاد دوم بیانکی داریم

$$۰=[(\nabla_X sch)\wedge g](Y,Z,V,W)+[(\nabla_Y sch)\wedge g](Z,X,V,W)+[(\nabla_Z sch)\wedge g](X,Y,V,W)$$

پس با انقباض نسبت به X و W داریم