بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک
گروه فیزیک ذرات بنیادی و نظریه میدان

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته فیزیک ذرات بنیادی و نظریه میدان

عنوان:

انرژی تاریک و انبساط شتاب‌دار کیهان در مدل‌های گرانشی تصحیح‌یافته

استاد راهنما:

دکتر فرهاد زمانی

توسط:

هاجر جوانی

۱۳۹۱

تقدیم به:

تقدیم به پدر و مادر و همسر نازنینم، که وجود پر مهرشان، هدیه‌ایست برای تمام ثانیه‌های بی‌طاقت زندگیم.

تشکر و قدردانی

در آغاز سپاس می گویم خداوند بزرگ را که هر ثانیه بر وجودم منت نهاده و مرا لبریز از الطاف و نعماتش می نماید. تشکر و قدررانی فراوان می کنم از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر فرهاد زمانی، که با سعه ی صدر و رویی گشاده راهنمای من در این پایان نامه بودند و افتخار درس آموزی از ایشان را در طول دوران تحصیلی ام در دانشگاه کاشان داشتم. سپاس از هیأت داوران، جناب آقایان دکتر زمانی مقدم و دکتر رمضانی آرانی که بزرگوارانه پایان نامه ی من را مطالعه نمودند و داوری آن را بر عهده گرفتند. تشکر می کنم از جناب آقای دکتر رسا، نماینده ی تحصیلات تکمیلی دانشگاه کاشان که به عنوان ناظر در جلسه ی دفاع من حضور بهم رساندند. در پایان از خانواده ی عزیزم که هر آن چه در زندگی ام دارم از حضور پربرکت آن هاست و نیز از همسر مهربانم که همواره مشوق و راهنمای من بوده و هست، به خاطر تمامی محبت ها و صبوری هایشان کمال سپاس را دارم.

چکیده

کشف انبساط شتاب‌دار دیرزمان کیهان بر پایه‌ی مشاهدات ابرنواختر نوع یک که در سال ۱۹۹۸ گزارش شد، یک حوزه‌ی تحقیقاتی جدید را در کیهان‌شناسی باز کرد. با وجود تلاش‌های چشمگیر برای درک منبع این شتاب کیهانی در دهه‌ی اخیر، انرژی تاریک هنوز به عنوان یک راز باقی مانده است. امروزه، درک طبیعت این انرژی یکی از اساسی‌ترین مسائل در فیزیک نظری و کیهان‌شناسی است. انرژی تاریک از ماده‌ی معمولی به واسطه‌ی داشتن فشار منفی متمایز می‌شود. ساده‌ترین نماینده برای انرژی تاریک، ثابت معروف کیهان‌شناسی Λ است که توسط یک سری از مشاهدات تأیید شده است. اما اگر منشاء Λ را ناشی از انرژی خلاء فیزیک ذرات در نظر بگیریم، مقیاس انرژی آن به طور قابل توجهی بزرگ‌تر از چگالی انرژی تاریک امروزی می‌شود ($\simeq 10^{-47}\,GeV^{4}$). بنابراین به سازوکاری نیاز داریم که مقدار بسیار کوچک Λ سازگار با مشاهدات را نتیجه دهد. برای درک ویژگی انرژی تاریک باید روشن سازیم که آیا یک ثابت کیهانی ساده است یا این‌که از منابع دینامیکی متغیر با زمان سرچشمه می‌گیرد.

مدل‌های دینامیکی انرژی تاریک در دو دسته طبقه‌بندی می‌شود: "*مدل‌های گرانش تصحیح‌یافته*" و "*مدل‌های ماده‌ی تصحیح‌یافته*". در حالی‌که در مدل‌های گرانش تصحیح‌یافته، گرانش از نسبیت عام اینشتین تعمیم می‌یابد، در مدل‌های ماده‌ی تصحیح‌یافته یک چشمه‌ی ماده‌ی نامتعارف با فشار منفی در تانسور انرژی-تکانه $T_{\mu\nu}$ در قسمت راست معادله‌ی اینشتین معرفی می‌شود. مدل‌های میدان اسکالرِ انرژی تاریک مانند کوینتسنس و کی-اسنس و مدل معروف به گاز چاپلین به دسته دوم تعلق دارد. از طرف دیگر، مدل‌هایی که به دسته اول تعلق دارند عبارتند از: گرانشِ $f(R)$، گرانش گاوس-بونت، نظریه‌های اسکالر-تانسوری و مدل جهان-شامه‌ای DGP. ویژگی جذاب این مدل‌ها این است که شتاب کیهانی می‌تواند بدون توسل به مؤلفه‌ی انرژی تاریک محقق شود.

در این پایان‌نامه، یک سری از جنبه‌های گرانشی و کیهان‌شناختی این مدل‌های انرژی تاریک را مرور می‌کنیم. هم‌چنین، علائم مشاهداتی مدل‌های گرانش تصحیح‌یافته را برای تمایز آن‌ها

از دیگر مدل‌های انرژی تاریک مطرح می‌نماییم.

کلید واژه‌ها: *مدل‌های کیهان‌شناسی، انرژی تاریک، گرانش تصحیح‌یافته، انبساط شتابدار کیهان، فشار منفی، تانسور انرژی- تکانه.*

فهرست

پیش‌گفتار

حدود یک قرن از معرفی نسبیت عام و معادله‌ی اینشتین در توصیف گرانش و به دنبال آن معرفی مدل استاندارد کیهان‌شناسی بر پایه‌ی نسبیت عام و فرضیه‌های استواری چون همگنی و همسانگردی عالم می‌گذرد. به‌دست آمدن معادلات فریدمن از معادله‌ی اینشتین و نیز حل معادله‌ی حالت برای نشان دادن رابطه‌ی میان فشار و چگالی انرژی برای یک کیهان همگن و همسانگرد که به‌صورت یک سیال کامل فرض می‌شد، داشتن یک کیهان در حال انبساط کند را برای ما نتیجه می‌داد. اما مشاهدات کیهانی در ده سال اخیر، همچون داده‌های ابرنواخترهای نوع یک و تابش زمینه‌ی کیهانی نتایجی را آشکار کرد که مدل استاندارد کیهان‌شناسی را زیر سوال برد. برای نمونه داده‌های مربوط به مشاهدات ابرنواخترهای نوع یک، که کم سوتر از آن‌چه باید دیده شوند، مشاهده شدند و این یعنی آن‌ها دورتر از آن‌چه که اکنون باید باشند، هستند. برای توجیه این پدیده باید بپذیریم که یا کیهان باز است یا انبساط ما شتابدار. مشاهدات مربوط به تابش زمینه‌ی کیهانی، هندسه‌ی کیهان را تخت معرفی می‌کند. بنابراین، احتمالاً باید انبساط کیهان، شتابدار باشد! اما با توجه به معادله‌ی حالت، هیچ ماده‌ی معمولی در جهان با توجه به رفتار جاذبه‌ای گرانش، نمی‌تواند انبساط را شتابدار کند. به عبارت دیگر برای دوران‌های سپری شده در کیهان تنها با دو مفهوم شناخته شده‌ی تابش و ماده آشنا هستیم، در زمان‌های اولیه، کیهان ما متشکل از یک پلاسمای داغ از الکترون‌ها، پروتون‌ها و فوتون‌ها بوده است و انرژی کیهان توسط تابش غالب شده بود، سپس با انبساط کیهان و جدا شدن فوتون‌ها از الکترون‌ها وپروتون‌ها، دوران ماده-غالب شروع شد و الکترون و پروتون تشکیل ماده دادند [۲]. اما در دوران کنونی کیهان توسط چه ماهیتی چیره شده‌است؟ آیا همین ماهیت ناشناخته،عامل ایجاد این انبساط شتابدار است؟

در توجیه این پدیده رویکردهای متفاوتی ارائه شد. عده‌ای بر این نظر هستند که شاید تنها تأثیرات گرانشی ناشی از نحوه‌ی توزیع کهکشان‌ها است که توهم انبساط را به‌وجود آورده است. به‌عبارت دیگر می‌دانیم که نسبیت عام، گرانش را در مقیاس‌های بزرگ به خوبی توصیف می‌کند اما گرانش، به چگونگی توزیع ماده در فضا بستگی دارد. از زمان اینشتین گفته می‌شد گرچه

چگالی در جهان از مکانی به مکان دیگر جابه‌جا می‌شود اما به‌طور میانگین این چگالی در جهان یکنواخت و در اصطلاح جهان تخت است [۲]. کیهان‌شناسان فرض می‌کنند که تمامی خط‌کش‌ها و ساعت‌های سرتاسر جهان به‌طور یکسان تنظیم شده‌اند اما، از نظر ویلتشیر[۱] این فرضیه نادرست است. او می‌گوید ساعت‌هایی که در جهان اولیه‌ی تخت، همزمان بودند به تدریج با توده‌ای شدن هر چه بیشتر ماده انطباق خود را از دست داده‌اند؛ چرا که گرانش، زمان را کند می‌کند، بنابراین ساعت درون یک کهکشان کندتر از ساعتی دیگر در فضای خالی تیک تیک می‌کند. او استدلال کرد به خاطر این‌که جهان واقعا تخت نیست، ناظران باید موقعیت خود را برای تفسیر صحیح اندازه‌گیری‌های کیهانی به حساب آورند و این عدم انطباق را توجیهی بر داده‌های ابرنواختر نوع یک دانست و اضافه کرد که سرعت انبساط محاسبه شده بین زمین و یک ابرنواختر، به چگالی ماده‌ی میانی بستگی دارد. چگالی، مقدار جرم در حجم مشخص است اما خود حجم به انحنای فضا بستگی دارد، بنابراین حجم یک شعاع مشخص در خلأ، بیشتر از حجم آن درون فضای نسبتاً تخت است [۳].

سوبیر سارکار[۲]از آکسفورد پیشنهاد داد که اگر خوشه‌های کیهانی با یک خلأ عظیم احاطه شده باشند، تأثیرات گرانشی آن می‌تواند شتاب ظاهری انبساط جهان را توجیه کند؛ اگر جهان در یک ناحیه‌ی غیرمعمول از فضا وجود داشته باشد و محیطی که بیرون حباب ما وجود دارد بسیار چگال‌ترباشد، این ناحیه به جهان یک نیروی گرانشی کششی وارد کرده و کهکشان‌های اطراف ما را به سرعت از هم دور می‌کند. اما خلأ سارکار باید عرض سرسام آوری حدود ۶/۱ میلیارد سال نوری داشته باشد! با این حال نمی‌توان آن‌را رد کرد، زیرا تاکنون خلأای به بزرگی یک میلیارد سال نوری در راستای صورت فلکی اریدانوس[۳] که ۱۰-۶ میلیارد سال نوری از ما فاصله دارد، کشف شده است و احتمال کشف خلأهای عریض‌تر، همواره وجود دارد [۲].

اما ایده‌ی اصلی در برخورد با این مشکل که موضوع اصلی این تحقیق می‌باشد، مطرح شدن شکل نوینی از انرژی با ویژگی‌های نامتعارفی چون فشار منفی است. انرژی تاریک، معمای پیچیده‌ای است که گفته می‌شود هفتاد درصد از چگالی انرژی کل عالم را تشکیل می‌دهد.

---

[۱] David wiltshire

[۲] Subir Sarkar

[۳] Eridanus

بررسی این انرژی زیرشاخه‌ای از علم کیهان‌شناسی را در بر می‌گیرد و از آن‌جا که هنوز بسیاری از مسائل کیهان و معادلات آن برای ما ناشناخته و دست‌نیافتنی است، بررسی این راز بزرگ کیهان نیز سردرگمی‌های بسیاری را به همراه دارد و می‌توان به صراحت اعلام کرد که ماهیت و معادلات این انرژی هنوز در بستری از ابهامات کیهان‌شناسی قرار دارد.

در فصل اول، مقدمات نسبیت عام را برای شناخت بهتر از اصول و معادلات کیهان‌شناسی مرور می‌کنیم. معرفی تانسور متریک، تانسورانرژی-تکانه‌ی ماده، کنش اینشتین-هیلبرت و وردش‌گیری از کنش نسبت به متریک برای بدست آوردن معادلات میدان از اصول اولیه‌ی نسبیت عام می‌باشد که برای بدست آوردن معادلات میدان انرژی تاریک نیازمند آشنایی با آن هستیم. در ادامه با پارامترهای کیهان‌شناسی و معادله‌ی فریدمن که از معادله‌ی اینشتین بدست می‌آید و نیز معادله‌ی حالت که رابطه‌ی میان فشار، چگالی انرژی و فاکتور مقیاس را در دوران‌های متفاوت کیهان بیان می‌کند، آشنا می‌شویم، به خصوص بررسی کیهان در زمان حال که نیازمند یک انبساط کند در حضور یک ماده‌ی معمولی با فشار مثبت است!

در فصل دوم کمی از تئوری‌های کیهان‌شناسی فاصله می‌گیریم وعلائم رصدی شتابدار بودن انبساط کیهان و معماهای کیهانی همچون سن مجهول کیهان را در توجیه وجود یک انرژی ناشناخته به عنوان عاملی برای شتابدار بودن انبساط کیهان بازگو می‌کنیم. با وجود تمامی این معماها در مورد ماهیت و منشأ این انرژی، هنوز مدل کیهان‌شناسی استاندارد که یک کیهان تخت را در حضور یک ثابت کیهانی معرفی می‌کند درست ترین و جامع‌ترین مدل شناخته‌شده به عقیده‌ی بسیاری از محققان می‌باشد. این ثابت که اولین بار توسط اینشتین وارد نسبیت عام شد، اکنون ساده‌ترین نماینده برای انرژی تاریک به شمار می‌آید و به نظر بسیاری از کیهان‌شناسان، ثابت کیهانی همانند ثابت گرانشی، یک ثابت بنیادی در طبیعت است. اگرچه این ثابت کیهانی رفتار دافعه‌ای یا همان فشار منفی انرژی تاریک را به خوبی توجیه می‌کند اما مشکلات دیگری همچون تنظیم ظریف مرتبه‌ی مقداری و این که منشأ این ثابت کیهانی از کجاست را به همراه دارد. در فصل دوم مروری کوتاه بر بررسی این ادعا داریم.

در فصل سوم مدل‌های معرفی شده برای حل معادلات میدان انرژی تاریک را در دو دسته‌ی مدل‌های میدان اسکالری و مدل‌های میدان گرانش تصحیح‌یافته دسته‌بندی می‌کنیم. مدل‌های میدان اسکالری که به تصحیح معادله‌ی اینشتین در حضور یک میدان اسکالر می‌پردازد. اما در

واقعیت از شبیه‌سازی یک چنین میدانی ناتوانیم، زیرا جرم میدان اسکالری برای شتاب کیهانی بسیار کوچک است و در حیطه‌ی فیزیک ذرات قرار دارد. دسته‌ی دیگر، مدل‌های گرانش تصحیح یافته است که به تصحیح گرانش در چارچوب نسبیت عام می‌پردازد. در این مدل‌ها یک کنش برحسب تابعی از اسکالر ریچی تعریف می‌شود. از آن‌جا که این مدل‌ها در چارچوب نسبیت عام بررسی می‌شود، اسکالر ریچی نماینده‌ای از جمله‌ی گرانشی در چارچوب اینشتین می‌باشد. اگرچه هر دو دسته از این مدل‌ها موفقیت چندانی در توصیف انرژی تاریک و توجیه شتابدار بودن انبساط عالم نداشتند، اما به طور کلی در مدل‌های گرانش تصحیح‌یافته برازش بهتری میان داده‌های فرمولی با داده‌های رصدی مشاهده شد، به خصوص مدل گرانشی $f(R)$ که شکل تصحیح‌یافته‌ای از گرانش اسکالر-تانسوری است. در پایان فصل سوم به طور مختصر به مقایسه‌ی برازش میان داده‌های مدل‌های تئوری و داده‌های رصدی بدست آمده از پدیده‌های اخترفیزیکی می‌پردازیم.

فصل اول

مقدمه‌ای بر نسبیت عام و کیهان‌شناسی

۱.۱ اصول نسبیت عام

از آن‌جا که مبحث انرژی تاریک زیرشاخه‌ای از علم گرانش و کیهان‌شناسی است، برای آشنایی با آن نیازمند معرفی اصول و مبانی نسبیت عام هستیم. در گام نخست مفهوم متریک را به عنوان اصلی‌ترین شاخص برای بیان ویژگی‌های نسبیت عام بازگو می‌کنیم. ویژگی‌های هندسی فضا-زمان مثل مسافت و ویژه‌زمان و همچنین کوتاهترین فاصله بین دو نقطه، توسط متریک توصیف می‌شوند. در حقیقت متریک، یک تانسور ناتبهگن مرتبه‌ی دو معرفی می‌شود و $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ می‌باشد که در آن ∇_μ مشتق هموردای تعریف شده به کمک هموستار لوی-چیویتای متریک و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه می‌باشد. این دو مورد به فرضیه‌های متریکی مشهورند و نظریه‌هایی را که فرضیه‌های متریکی در آن صدق می‌کند، نظریه‌های متریکی می‌نامند.

برای بررسی ارتباط بین هندسه‌ی فضا-زمان و گرانش، نیازمند معرفی پارامترهای اولیه و فرمول‌هایی هستیم که این دو مفهوم را به‌هم ربط دهد. برای شروع از یک هموستار و یک متریک متقارن آغاز می‌کنیم، همچنین از وارون متریک برای بالا و پایین آوردن اندیس‌ها بهره می‌بریم. مشتق هموردا را به صورت زیر با کمک هموستار تعریف می‌کنیم

$$\bar{\nabla}_\mu A^\nu_\sigma = \partial_\mu A^{\ \nu}_{\sigma} + \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} A^\alpha{}_\sigma - \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} A^\nu{}_\alpha. \qquad (۱.۱)$$

اکنون با کمک همین هموستار می‌توان تانسور ریمان[۱] را ساخت

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}, \tag{۲.۱}$$

که هیچ وابستگی به متریک ندارد و در دو شاخص آخر پادمتقارن است. با ادغام تانسور ریمان، دو نمونه تانسور ریچی بدست می‌آید. تانسور ریچی معمولی که عمده‌ی کار ما با آن است [۴]

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = -R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}, \tag{۳.۱}$$

و تانسور پادمتقارن زیر

$$R'_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad R'_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}. \tag{۴.۱}$$

ادغام این تانسورها به ما اسکالر ریچی را می‌دهد. برای تانسور متقارن $R_{\mu\nu}$ و تانسور پادمتقارن $R'_{\mu\nu}$ به ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$R \;=\; g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{۵.۱}$$

$$R' \;=\; g^{\mu\nu}R'_{\mu\nu}. \tag{۶.۱}$$

اگر با استفاده از متریک یک تانسور رتبه دو دیگر به صورت زیر بسازیم

$$R''_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}_{\mu\,\nu\sigma} = g^{\sigma\alpha}g_{\mu\beta}R^{\beta}_{\alpha\sigma\nu}, \tag{۷.۱}$$

با ادغام این تانسور با متریک بدست می‌آوریم

$$R'' = g^{\mu\nu}R''_{\mu\nu} = -R. \tag{۸.۱}$$

---

[۱] Riemann tensor

بنابراین، می‌بینیم که اسکالر ریچی تنها اسکالر به‌دست آمده خواهد بود.

حال دوباره به سراغ هموستار لوی-چیویتا باز می‌گردیم

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}, \tag{۹.۱}$$

که یک هموستار متقارن است: $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$، در حالی‌که بر این نکته تأکید می‌کنیم که متریک به صورت هموردا، پایستار است

$$\bar{\nabla}_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0. \tag{۱۰.۱}$$

در نسبیت عام می‌توان اثرات گرانشی را با تصحیح کنش سیستم فیزیکی به کمک جای‌گزینی مشتق معمولی با مشتق هموردا لحاظ کرد. کنش یک سیستم مادی برهم‌کنش کننده با یک میدان گرانشی خارجی شبیه میدان‌های اسکالر و میدان مغناطیسی، با انتگرال یک چگالی لاگرانژی داده می‌شود که به متریک و مشتقات مرتبه اول آن بستگی دارد و در نتیجه معادلات میدان بدست آمده، تابعی ازمشتقات مرتبه‌ی دوم متریک خواهد بود. اما این روند برای گرانش به یک مشکل غیرمنتظره برمی‌خورد که آن را کاملاً از بقیه برهم‌کنش‌های بنیادی جدا می‌سازد.

اگر کنش گرانشی به شکل زیر تعریف شود

$$A_g = \int \sqrt{-g}\, L_g(g_{ab}, \partial_c g_{ab})\, d^4x, \tag{۱۱.۱}$$

که $\sqrt{-g}$ دترمینان متریک است. این معادله ما را ملزم می‌کند که یک اسکالر هموردای عام بیابیم که از متریک و مشتقات مرتبه اول آن ساخته شده باشد. اما هیچ اسکالر غیر بدیهی سراغ نداریم که دارای این خصیصه باشد. زیرا هر کمیت اسکالر با ویژگی بالا، در هرچارچوب لخت موضعی و در هر ناحیه‌ی کوچک‌تر از فضا-زمان حول هر رویداد و در امتداد هر ژئودزیک در فضا-زمان، به یک ثابت در امتداد این خم تبدیل می‌شود، در نتیجه اسکالر ما حول این رویداد یک ثابت خواهد بود. روش‌هایی برای حل این مشکل وجود دارد؛ مثل در نظر گرفتن یک اسکالر هموردای عام که به متریک و مشتقات مرتبه اول و همچنین به مشتقات مرتبه دوم به صورت خطی وابسته باشد. این راه‌حل نیز مشکلاتی دارد و آن این‌که پس از حل کنش، برای مقادیر

دلخواه بدست آمده جواب کلاسیکی نداریم که در شرایط مرزی صدق کند. ثانیاً، از آن‌جا که اصل کنش ریشه در مکانیک کوانتومی دارد، مسئله‌ی عدم قطعیت و عدم تعیین همزمان سرعت و مختصات، در برآورده‌کردن جواب‌های بدست آمده مشکل ایجاد می‌کند. راه‌حل قابل قبول دیگر این است که جملات شامل مشتق دوم متریک را دور بریزیم و با بخش باقیمانده لاگرانژی کار کنیم (در واقع اضافه کردن جملاتی به کنش که پس از وردش‌گیری از کنش، این جملات اضافی حذف می‌شود). اکنون تنها متریک را در مرزها تثبیت می‌کنیم و بهایی که می‌پردازیم این است که بخش باقیمانده لاگرانژی یک اسکالر هموردا نیست اما، وردش آن یک اسکالر هموردا می‌باشد و در نتیجه معادلات میدان نیز هموردا خواهند بود [۵].

اکنون رهیافت‌مان پیدا کردن یک اسکالرهموردای عام وابسته به متریک و مشتق اول آن و وابستگی خطی به مشتق مرتبه‌ی دوم می‌باشد. از بخش قبل به این نتیجه رسیدیم که تنها یک اسکالر که همان اسکالر ریچی است از تانسور ریچی ساخته می‌شود. از آن‌جا که تانسور ریچی در مشتقات مرتبه دوم متریک خطی است، هر اسکالر ساخته شده از آن نیز در مشتقات مرتبه دوم خطی خواهد بود. بنابراین اسکالر ریچی نماینده‌ی ما برای یک اسکالرهموردای عام در تعریف لاگرانژی خواهد بود که می‌توان یک ثابت به آن اضافه نمود یا در آن ضرب کرد.

در نسبیت عام فرض می‌شود که تنها میدان توصیف کننده‌ی برهم‌کنش گرانشی، متریک است. بنابراین کنش شامل یک لاگرانژی گرانشی وابسته به متریک و یک لاگرانژی ماده وابسته به میدان‌های ماده است. با وردش لاگرانژی ماده نسبت به متریک، تانسور انرژی–تکانه‌ی ماده بدست می‌آید که یک تانسور متقارنِ رتبه دو است

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{۲}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \qquad (۱۲.۱)$$

که $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}$ مشتق تابعی نسبت به متریک می‌باشد. کنش ماده با عبارت

$$S_M = \int \sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \psi) d^۴x, \qquad (۱۳.۱)$$

داده می‌شود که L_M لاگرانژی ماده بوده و ψ نیز اشاره به میدان‌های ماده دارد.

برای نوشتن کنش اینشتین-هیلبرت فرض می‌شود که لاگرانژی تنها به متریک و مشتقات مرتبه اول وابسته باشد نه به مشتقات مرتبه‌ی بالاتر و در نتیجه وردش نسبت به متریک، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را نتیجه می‌دهد. همچنین لاگرانژی انتخابی ما همان اسکالر ریچی به عنوان یک اسکالر هموردای عام می‌باشد تا معادلات میدان بدست آمده مستقل از دستگاه‌های مختصات شود.

$$S_{EH} = \frac{۱}{۱۶\pi G} \int \sqrt{-g} R d^۴x, \qquad (۱۴.۱)$$

ثابت $\frac{۱}{۱۶\pi G}$ با پیش‌دستی انتخاب شده است، زیرا در این مرحله نمی‌توان به هیچ ثابتی مقدار داد و در مقایسه با حد نیوتنی مقدار آن مشخص می‌شود. وردش کنش اینشتین-هیلبرت نسبت به متریک به صورت زیر خواهد بود

$$\delta S_{EH} = \frac{۱}{۱۶\pi G} \left[\int_U \sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \delta S_{sur} \right], \qquad (۱۵.۱)$$

که δS_{sur} وردش کنش ناشی از جمله سطحی و $G_{\mu\nu}$ همان تانسور اینشتین است:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} R g_{\mu\nu}. \qquad (۱۶.۱)$$

اکنون باید کنش گرانشی را طوری بازتعریف کنیم که بعد از وردش، جمله‌ی سطحی آشکار نشود و همزمان، هموردایی پایسته بماند. از کنش زیر شروع می‌کنیم

$$S'_{EH} = S_{EH} + S_{sur}. \qquad (۱۷.۱)$$

با وردش نسبت به متریک بدست می‌آوریم

$$\delta S'_{EH} = \frac{۱}{۱۶\pi G} \int_U \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^۴x, \qquad (۱۸.۱)$$

که با اضافه نمودن به وردش کنش ماده و به کار گیری اصل کمترین کنش، معادله‌ی اینشتین حاصل می‌شود

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \qquad (۱۹.۱)$$

استفاده از کنش (۱۷.۱) موجب حذف جمله‌ی سطحی و بدست آمدن معادله‌ی میدان اینشتین شد. با اضافه نمودن جمله‌ی $-\Lambda g_{\mu\nu}$ به سمت راست معادله‌ی بالا یا کم کردن جمله‌ی 2Λ از لاگرانژی اینشتین-هیلبرت، معادله‌ی اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسی بدست می‌آید.

ابتدا با تعریف یک تانسور نامتریکی به بررسی نسبیت عام در چارچوب نظریه‌های متریکی می‌پردازیم

$$Q_{\mu\nu\lambda} \equiv -\nabla_\mu g_{\nu\lambda}. \qquad (۲۰.۱)$$

رد این تانسور نامتریکی که نسبت به دو شاخص آخر متقارن است، بردار وایل[1] را نتیجه می‌دهد

$$Q_\mu \equiv \frac{1}{4} Q_{\mu\nu}{}^{\nu}. \qquad (۲۱.۱)$$

اکنون می‌توانیم فرضیه‌های بنیادین در چارچوب نسبیت عام را این‌گونه مطرح کنیم:

فرض اول: هموستار، متریکی است. یعنی $Q_{\mu\nu\lambda} = 0$ یا $\bar{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = 0$.

اگر هموستار پادمتقارن باشد، بخش پادمتقارن هموستار، تانسور پیچش کارتان[2] نامیده می‌شود

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}. \qquad (۲۲.۱)$$

فرض دوم:. فضا-زمان ما بدون پیچش است $S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 0$ یا $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

فرض سوم: هیچ میدانی به جز متریک در برهم‌کنش دخالت ندارد.

---

[1] Weyl

[2] Cartan

فرض چهارم: معادلات میدان، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم هستند.

فرض پنجم: که به عنوان یک فرض اساسی و بنیادیِ غیر قابل تغییر است، این است که معادلات میدان همواره باید هموردا باشند.

۲.۱ اصول کیهان‌شناسی

اکنون به منظور بررسی انرژی تاریک در فصول دیگر، تعاریف اولیه کیهان و شناخت مفاهیم آن را بازگو می‌کنیم. در توصیف اولیه‌ی کیهان، ماده و هندسه‌ی عالم را به صورت همگن و همسانگرد در نظر می‌گیریم و این یعنی هیچ نقطه و جهت ارجحی در فضا وجود ندارد؛ همگنی، ناوردایی تحت انتقال و همسانگردی، ناوردایی تحت دوران را به ما می‌دهد. بنابراین می‌بینیم که جهان ما بسیار متقارن است. متریکی که هندسه‌ی جهان ما را توصیف می‌کند، متریک متقارنِ FLRW[۱] می‌باشد [۶]

$$ds^۲ = -dt^۲ + a^۲(t)\left[\frac{dr^۲}{۱-\kappa r^۲} + r^۲ d\Omega^۲\right] , \qquad (۲۳.۱)$$

که $a(t)$ فاکتور مقیاس[۲] نام دارد و تحول عالم و تغییر طول فیزیکی را نشان می‌دهد. برای یک کیهان همگن و همسانگرد، تنها مشخصه‌ی قابل تغییر کیهان، فاکتور مقیاس می‌باشد. t زمان کیهانی است و κ انحنای فضایی عالم را نشان می‌دهد که به ازای $\kappa = ۰$ عالم تخت[۳]، $\kappa = -۱$ عالم باز[۴] و $\kappa = ۱$ عالم بسته[۵] داریم.

[۱] Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

[۲] Scale factor

[۳] Flat universe

[۴] Open universe

[۵] Closed universe

پس از معرفی متریک متقارن FLRW، اکنون نیازمند معادله‌ای برای توصیف این کیهان ایده‌آل هستیم. معادله‌ی اینشتین[۱] این‌گونه تعریف می‌شود [۶]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{۲۴.۱}$$

که $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه، $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی، R اسکالر ریچی و G ثابت گرانشی است. در واقع، این معادله یک هم‌ارزی بین هندسه‌ی فضا-زمان (که توسط متریک توصیف می‌شود) با گنجایش چگالی ماده و انرژی در جهان برقرار می‌کند.

اکنون کل عالم را به صورت یک سیال کامل[۲] در نظر می‌گیریم و ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی کیهان را با دو پارامتر چگالی یکنواخت ρ و فشار یکنواخت p توصیف می‌کنیم. چهار بردار سرعت همراه ناظر در چارچوب همراه[۳] به صورت زیر است

$$U^{\mu} = (1, 0, 0, 0). \tag{۲۵.۱}$$

برای یک سیال کامل، تانسور انرژی-تکانه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} + p g_{\mu\nu}, \tag{۲۶.۱}$$

که در چارچوب همراه به صورت زیر است

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(-\rho, p, p, p), \tag{۲۷.۱}$$

$$T = T^{\mu}_{\mu} = -\rho + 3p. \tag{۲۸.۱}$$

---

۱ Einstein equation

۲ Perfect fluid

۳ Comoving frame