دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان :

نگاشتهای خطی حافظ مجموعه عملگرهای شبه فرد هلم و معکوس تعمیم یافته

استاد راهنما :

ثریا طالبی

نگارش :

سیده وجیهه شمس آبادی

شهریور 1388

چکیده

فرض کنید H فضای هیلبرت مختلط تفکیک پذیر با بعد نامتناهی و $B(H)$ جبرهمه ی عملگرهای کراندار بر H باشد . نگاشتهای خطی پوشای $\phi: B(H)\rightarrow B(H)$ کـه حـافظ عملگرهـای شـبه فردهلم از دو جهت می باشند معرفی می شوند و به عنوان کاربردی از ایـن بحـث مـی تـوان عملگرهای خطی حافظ معکوس تعمیم یافته را نیز مشخص کرد برهان جدیدی که در مقاله ی مورد مطالعه در این پایان نامه آورده شـده عـلاوه بـر اینکـه اثبـاتی سـاده تـرو کوتـاهتر از اثباتهای قبل دارد دارای کارآیی بیشتری نیز می باشد.

کلمات کلیدی: حافظ خطی ؛ عملگر شبه فردهلم ؛ معکوس تعمیم یافته .

فهرست مندر جا ت

مقدمه

دراین پایان نامه مقاله ی نگاشتهای خطی حافظ عملگرهای شبه فرد هلم و معکوس تعمیم یافته ،نوشته ی مصطفی مختا[1] بررسی می شود [۱۲]. دردو دهه ی گذشته مسائل حافظ خطی بسیار قابل توجه بوده اند .

این پایان نامه در ۳ فصل نگارش شده است. در فصل ۱ تعاریف مقدماتی و قضایای پیش نیاز آورده شده که از آنالیز تابعی و جبر عملگرها جمع آوری شده است. فصل ۲ شامل ۲ بخش است که در آن به بررسی مجموعه عملگرهای دارای معکوس تعمیم یافته و نگاشت های خطی حافظ معکوس تعمیم یافته می پردازیم. فصل ۳ که اصلی ترین فصل این پایان نامه می باشد شامل٤ بخش است ودر این فصل مفهوم عملگرهای شبه فردهلم و نگاشت های خطی حافظ مجموعه عملگرهای شبه فردهلم را بررسی می کنیم.

---

[1] Mostafa mbekhta

فصل ۱

تعاریف مقدماتی و قضایای پیش نیاز

۱– ۱ تعاریف مقدماتی

۱.۱.۱ تعریف

فرض کنید H یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ با تابعی مختلط مقدار دو متغیره $<x,y>: H\times H \to \mathbb{C}$ باشد که دارای خواص زیر است :

۱) $<ax_1+bx_2, y> = a<x_1,y> + b<x_2,y>$

۲) $\overline{<x,y>} = <y,x>$

۳) به ازای هر $x\in H$، $<x,x>\geq 0$

٤) $<x,x>=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

در این صورت این تابع، **ضرب داخلی** نامیده می شود.

بنا بر (۳) می توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x\in H$ را ریشه دوم نامنفی $<x,x>$ تعریف کرد

$$\|x\|^2 = <x,x>$$

حال اگر فاصله ی بین x و y را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم آنگاه تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند. لذا H یک فضای متری است.

۱. ۱. ۲ تعریف

هر گاه فضای متری H تام باشد یعنی هر دنباله ی کشی در آن همگرا باشد، آن گاه H یک **فضای هیلبرت** نام دارد.

۱. ۱. ۳ تعریف

فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرم دار** نامیم اگر به ازای هر $x\in X$ یک

عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط باشد که

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

(۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

(۳) $\|x\|=0$ تساوی $x=0$ را ایجاب می کند.

اگر فاصله ی بین x و y در X را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرار است.

۱. ۱. ٤ تعریف

هر فضای خطی نرم دار که با متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد، **فضای باناخ** نامیده می شود.

۱. ۱. ۵ مثال

هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

۱. ۱. ٦ تعریف

فضای هیلبرت H را **تفکیک پذیر** نامیم هر گاه یک پایه ی شمارای چگال در آن موجودباشد.

۱.۱. ۷ تعریف

$F : X \rightarrow C$ یک **تا بعی خطی** روی فضای برداری توپولوژیک X نامیده می شود هر گاه

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$$

برای تمام x و y ها در X و تمام اسکالر های α و β در $\mathbb{C}$.

۸.۱.۱ تعریف

فضای دوگان فضای برداری توپولوژیک X عبارت است از فضای برداری X^* که عنصرهایش تابعی های خطی پیوسته بر X هستند و جمع وضرب در X^* به صورت زیر تعریف می شود.

برای $\alpha \in ¢ , x \in X$ $\quad (\alpha T)x = \alpha .Tx \quad$ و $\quad (T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$

فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند:

۹.۱.۱ تعریف

نگاشت خطی $T : X \to Y$ رایک **عملگر** می نامیم.

۱۰.۱.۱ تعریف

عملگر $T : X \to Y$ رااز **رتبه متناهی** گوییم هرگاه

$$rank\ T := dim\ (\ Im\ T\ ) = \ < \infty$$

- $Im\ T$ برد A را نشان می دهد.

۱۱.۱.۱ تعریف

عملگر $\mathrm{T} : X \to Y$ **معکوس پذیر** است اگر $S : Y \to X$ موجود باشد به طوریکه

$ST = I = TS$.

۱۲.۱.۱ تعریف

عملگر $T : X \to Y$ را **فشرده** گوییم اگر برای هر دنباله کرانـدار $x_n \in X$ دنبالـه $\{ T x_n \}$ یـک زیـر دنباله کشی داشته باشد.

۱۳.۱.۱ تعریف

فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت دلخواه باشند و $A\in B(H,K)$. دراین صورت عملگر منحصر به فرد $B\in B(K,H)$ که به ازای هر $h\in H$ و به ازای هر $k\in K$ در شرط $\langle Ah,k\rangle=\langle h,BK\rangle$ صدق می کند را **عملگر الحاقی** A می نامیم و با A^* نشان می دهیم .

- $B(H,K)$ رامجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از X به توی Y در نظر می گیریم.

۱٤.۱.۱ تعریف

جبر مختلط A یک فضای برداری روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که در آن یک ضرب به صورت

$$\begin{gathered} A\times A\to A \\ (x,y)\to xy \end{gathered}$$

تعریف شده است و دارای خواص زیر است

۱) $x(yz)=(xy)z$

۲) $x(y+z)=xy+xz$ و $(x+y)z=xz+yz$

۳) برای هر $x,y,z\in A$ و هر $\alpha\in\mathbb{C}$، $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$.

۱۵.۱.۱ تعریف

زیر فضای خطی I از یک جبر A، **ایده ال چپ (ایده ال راست)** است اگر به ازای هر $x,y\in I$ و هر $z\in A$، $x-y\in I$ و $zx\in I$ ($xz\in I$).

۱٦.۱.۱ تعریف

زیر فضای خطی I از یک جبر A، **ایده ال راست** است اگر به ازای هر $x,y\in I$ و هر $z\in A$،

$x-y\in I$ و $xz\in I$.

• اگر یک ایده ال چپ ایده ال راست هم باشد، **ایده ال دو طرفه** است .

۱۷.۱.۱ تعریف

ایده ال I از جبر A که $I\neq A$ **ایده ال سره** نامیده می شود.

۱. ۱. ۱۸ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و فرض کنیم $I\subseteq A$ یک ایده ال چپ A باشد. گوییم I یک **ایده ال چپ ماکسیمال** A است اگر I یک ایده ال چپ سره باشد و تنها ایده ال چپ سره A که I را شامل می شود خود I باشد. **ایده ال راست ماکسیمال** A به طورمشابه تعریف می شود و ایده ال I از A را ایده ال دوطرفه ی ماکسیمال و به طور ساده **ایده ال ماکسیمال** گوییم اگر ایده ال چپ ماکسیمال و در عین حال ایده ال راست ماکسیمال باشد.

۱۹.۱.۱ تعریف

فرض کنید $K(H)$ فضای تمام عملگرهای فشرده روی H باشد ، $K(H)$ ایده آل بسته $B(H)$ است .

در فضای خارج قسمتی $\dfrac{B(H)}{K(H)}$ ضرب زیر را تعریف می کنیم .

$[S][T]=[ST]$ که $[S]$ هم مجموعه $S+K(H)$ است.

فضای خارج قسمتی $\dfrac{B(H)}{K(H)}$ با عمل جمع یک جبر است که **جبر کا لکین** نام دارد و همانی آن

[I] است .

مثال: می دانیم اگر A یک C^*–جبر باشد و I یک ایده ال بسته ی A باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ نیز یک C^*–جبر می باشد و بنابراین با فرض این که H یک فضای هیلبرت نامتناهی البعد و $B(H)$ یک C^*–جبر باشد، $\frac{B(H)}{K(H)}$ یک C^*–جبر می باشد.

۲۰.۱.۱ تعریف

توپولوژی قوی عملگرها (یاso – توپولوژی) بر $B(H)$، توپولوژی موضعاً محدبی است که توسط نیم نرمهای $\| \|_x$ ، $x\in H$ تولید شده است و $\|T\|_x = \|Tx\| \quad , T\in B(\mathrm{H})$.

$T_\alpha \to T$ در توپولوژی قوی عملگرهایا اگروفقط اگربه ازای هر $x\in H$, $\|T_\alpha x - Tx\| \to 0$.

۲۱.۱.۱ تعریف

توپولوژی ضعیف عملگرها (یا wo– توپولوژی) بر $B(H)$، توپولوژی موضعاً محدبی است که توسط نیم نرمهای $\| \|_{x,y}$ ، $x, y\in H$ تولید شده است و $\|T\|_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$.

$T_\alpha \to T$ در توپولوژی ضعیف عملگرهااست اگروفقط اگر $x, y\in H$, $\langle T_\alpha x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$.

۲۲.۱.۱ تعریف

فرض کنید Hیک فضای هیلبرت باشد، یک C^*- زیرجبر از $B(H)$ را یک **جبر فون – نویمان**می نامیم اگر A در توپولوژی قوی عملگرها بسته باشد.

مثال: فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد در این صورت $B(H)$ فون–نویمان می باشد. زیرا اگر $\{T_n\}$ دنباله ای در $B(H)$ باشد که به ازای هر $x\in H$، $T_n(x) \to Tx$ در این

صورت $T:H\to H$ خطی و کراندار است بنابراین $T\in B(H)$ در نتیجه به ازای هر $x\in H$

$$\|T_n - T\|_x = \|T_n(x) - Tx\| \to 0$$

و این یعنی $B(H)$ تحت توپولوژی قوی عملگرها بسته است.

۲۳.۱.۱ تعریف

فرض کنید M و N دو زیر فضای خطی ازفضای برداری X باشند ، $M+N$ نیز زیر فضای خطی X است اگر $M\cap N=\{0\}$ باشد آنگاه مجموع M و N را **حاصل جمع مستقیم** می نامیم و به صورت $M\oplus N$ نمایش می دهیم.

۲۴.۱.۱ تعریف

فرض کنید M زیر فضای بسته فضای باناخ X باشد آنگاه M در X **تتمیم پذیر** است اگر زیر فضای بسته ای مانند $M'\subset X$ وجود داشته باشد به طوریکه $X=M\oplus M'$.

۲۵.۱.۱ تعریف

اگر N زیر فضای یک فضای برداری X باشد ، هم بعد[۱] N، بعد فضای خارج قسمتی $\frac{X}{N}$ است. که آن را با $codimN$ نشان می دهند. اگر X بعد متناهی داشته باشد آنگاه

$$codim(N) = dim(\frac{X}{N}) = dim(X) - dim(N)$$

[۱] Codimension

۱.۱. ۲٦ تعریف

فرض کنید H هیلبرت وL زیر فضای H باشد مجموعه

$$L^{\perp}=\{x\in H;\ \langle x,y\rangle=0 \quad ,\forall y\in H\}$$

را **متمم متعامد** L درH می نامیم . $L^{\perp}$ زیر فضای بسته H است .

۱.۱. ۲۷ تعریف

فرض کنید A با ضرب $(x,y)\to x.y$ یک جبر شرکت پذیرباشد .اکنون ضرب x وy را به

صورت زیر تعریف می کنیم .

$$xoy=\frac{xy+yx}{2}$$

ضرب فوق دارای خاصیت جابه جایی است $(xoy=yox)$وبا در نظر گرفتن رابطه

$$x^2o(xoy)=xo(x^2oy)$$

به طور ضعیف شرکت پذیر است و جبر A با ضرب تعریف شده **جبر جردن ویژه** نام دارد.

۱.۱. ۲۸ تعریف

فرض کنید A و B جبرهای باناخ یکه دارروی $\mathbb{C}$ باشند .نگاشت خطی

$\phi : A \to B$ **همریختی جردن** نامیده می شوداگر

$$\phi(a^2)=(\phi(a))^2 \qquad (a\in A)$$

یا به طور معادل

$$\phi(ab+ba)=\phi(a)\phi(b)+\phi(b)\phi(a) \qquad (a,b\in A)$$

۱.۱. ۲۹ تذکر

اگر نگاشت ϕ معرفی شده در تعریف ۳٤.۱.۱ دوسویی باشد آنگاه ϕ را **یکریختی جردن** می نامیم.

۱. ۱. ۳۰ تعریف

نگاشت خطی دو سویی $\phi : B(H) \to B(H)$ را **خودریختی** گوییم اگر

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B) \qquad (A, B \in B(H)\ )$$

۱. ۱. ۳۱ تعریف

نگاشت خطی دو سویی $\phi : B(H) \to B(H)$ را **پادخودریختی** می نامیم اگر ضرب را جابه جا کند یعنی

$$\phi(AB) = \phi(B)\phi(A) \qquad (A, B \in B(H)\ )$$

۱. ۱. ۳۲ تعریف

نگاشت خطی دو سویی $\phi : B(H) \to B(H)$ را **خودریختی جردن** گوییم اگر عملگر خطی کراندار و وارون پذیر $T \in B(H)$ موجود باشد به طوری که

$$\phi(A) = TAT^{-1} \qquad A \in B(H)$$

هم چنین نگاشت خطی دو سویی $\phi : B(H) \to B(H)$ را **پادخودریختی جردن** نامیم اگر عملگر خطی کراندار و وارون پذیر $T \in B(H)$ موجود باشد به طوری که

$$\phi(A) = TA^{tr}T^{-۱} \qquad A \in B(H)$$

- A^{tr} ترانهاده عملگر A نسبت به یک پایه متعامد ثابت است.

۱. ۱. ۳۳ تعریف

فرض کنید $x \in B(H)$ در این صورت **طیف** x که با $\sigma(x)$ نشان داده می شود ، مجموعه تما م اعدا د مختلطی مانند λ است که λI-x وارون پذیر نباشد.

۱. ۱. ۳٤ تعریف

شعاع طیفی x عبارت است از

$$r(x) = sup \ \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

۱. ۱. ۳۵ تعریف

عنصر a از جبر باناخ A را **شبه پوچ توان** نامیم اگر $r(x)=۰$.

۱. ۱. ۳٦ تعریف

نگاشت خطی $\phi : B(H) \to B(H)$ **حافظ طیف** است اگر

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \sigma(\phi(T))$$

۱. ۱. ۳۷ تعریف

فرض کنید A یک C^*–جبر باشد در این صورت عنصر $x \in A$ را **خودالحاق** نامیم هر گاه $x = x^*$.

۱ – ۲ قضایای مقدماتی

۱. ۲. ۱ قضیه

فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $B(X,Y)$ جبر تمام عملگرهای خطی کراندار و $K(X,Y)$ایده ال تمام عملگرهای فشرده و $F(X,Y)$ ایده ال تمام *عملگرهای رتبه متناهی* باشند در این صورت

۱) $K(X,Y)$ زیر فضای بسته ای از $B(X,Y)$ است.

۲) $F(X,Y)$ *زیرفضای* $B(X,Y)$ است و $\overline{F(X,Y)} \subset K(X,Y)$.

۳) اگر X_1 و Y_1 فضاهای باناخ باشند($U\in B(X_1,X)$ ، $T \in K(X,Y)$ و $S\in B(Y,Y_1)$ آنگاه $STU\in K(X_1,Y_1)$. اگر $T\in F(X,Y)$ آنگاه $STU\in F(X_1,Y_1)$.

٤) در حالت خاص اگر $X = Y$ آنگاه $F(X)$ ایده آل دو طرفه و$K(X)$ ایده آل دو طرفه بسته در $B(X)$ هستند .

٥) اگر $T \in K(X,Y)$ آنگاه T رتبه متناهی است اگر و فقط اگر برد T بسته باشد.
([١٦] / قضیه ۲)

۱. ۲. ۲ قضیه

فرض کنیدA یک جبر باناخ و x درA باشد، آن گاه $\sigma(x)$ ناتهی است . ([۱۹]/قضیه۳. ۱)

۱. ۲. ۳ قضیه

فرض کنیدA یک جبر باناخ و x درA باشد در این صورت $\sigma(x)$ در $\mathbb{C}$ فشرده است و در قرص بسته $\{z\in \mathbb{C} ; |z|\leq\|x\|\}$قرار دارد. ([۱۹]/قضیه۳. ۳)

۱. ۲. ٤ قضیه

فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $A\in B(H)$. در این صورت $\ker A=\left(RanA^*\right)^{\perp}$

برهان :

اگر $h\in \ker A$ و $g\in H$ آنگاه $\langle h,A^*g\rangle=\langle Ah,g\rangle=۰$ بنابراین $\ker A\subseteq\left(RanA^*\right)^{\perp}$

و از طرفی اگر $h\perp RanA^*$ و $g\in H$ آنگاه $\langle Ah,g\rangle=\langle h,A^*g\rangle=۰$ بنا براین $\left(RanA^*\right)^{\perp}\subseteq\ker A$

از مطالب با لا نتیجه می گیریم که $\ker A=\left(RanA^*\right)^{\perp}$ □

البته توجّه شود که به دلیل $\left(A^*\right)^*=A$، تساوی $\ker A^*=(RanA)^{\perp}$ نیز بـه طـور مـشابه اثبـات مـی گردد.

۱. ۲. ٥ لم

فرض کنید A یک حلقه یکه دار باشد، در این صورت هر ایده ال چپ (یا راست) A مشمول در یک ایده ال چپ (یا راست) ماکسیمال است. ([۲] / لم ۳. ۱. ۱)

۱. ۲. ٦ لم ژاکوبسین (***Jacobson***)

فرض کنید A یک جبر یکه دار باشد و فرض کنید $x,y\in A$، $۰\neq\lambda\in\mathbb{C}$. در این صورت

$\lambda۱-xy$ در A وارون پذیر است اگر و فقط اگر $\lambda۱-yx$ در A وارون پذیر باشد.

برهان:

فرض کنید u وارون $\lambda۱-xy$ در A است در این صورت

$$(\lambda۱-xy)u=u(\lambda۱-xy)=I$$

می خواهیم نشان دهیم $\lambda 1 - yx$ در A وارون پذیراست یعنی نشان می دهیم $(yux + 1)$ وارون $\lambda 1 - yx$ در A است.

$$(\lambda 1 - yx)(yux + 1) = \lambda yux + \lambda 1 - y(xy)ux - yx \qquad (i)$$

چون

$$\lambda u - 1 = \lambda u - (\lambda 1 - xy)u = \lambda u - \lambda u + xyu = xyu$$

رابطه ی (i) برابر است با

$$\lambda yux + \lambda 1 - y(\lambda u - 1)x - yx = \lambda 1$$

هم چنین

$$(yux + 1)(\lambda 1 - yx) = \lambda yux + \lambda 1 - yu(xy)x - yx \qquad (ii)$$

چون

$$\lambda u - 1 = \lambda u - u(\lambda 1 - xy) = \lambda u - u\lambda + uxy = uxy$$

رابطه ی (ii) برابر است با

$$\lambda yux + \lambda 1 - y(\lambda u - 1)x - yx = \lambda 1$$

در نتیجه $\lambda 1 - yx$ در A وارون پذیر است. □

۱. ۲. ۷ قضیه

فرض کنید A یک حلقه یکه دار باشد، در این صورت موارد زیر معادل اند:

۱) اشتراک تمام ایده ال های چپ ماکسیمال A.

۲) اشتراک تمام ایده ال های راست ماکسیمال A.

۳) مجموعه ی x به طوری که $1-zx$ در A وارون پذیر است برای تمام $z\in A$.

٤) مجموعه ی x به طوری که $1-xz$ در A وارون پذیر است برای تمام $z\in A$.

برهان:

معادل بودن (۳) و (٤) طبق لم ۱. ۲. ۷ برقرار است.

$1\to 3$) فرض کنید x در اشتراک تمام ایده ال های چپ ماکسیمال A قرار دارد. اگر $a=1-zx$ وارون پذیر نباشد آن گاه Aa یک ایده ال چپ A است، طبق لم ۱. ۲. ٦ ، Aa در یک ایده ال چپ ماکسیمال مثل $L_\circ$ قرار دارد. پس $zx\in L_\circ$ و $1-zx\in L_\circ$ در نتیجه $1\in L_\circ$ که تناقض است.

$3\to 1$) فرض کنید $1-zx$ برای تمام $z\in A$ وارون پذیر است. اگر x در اشتراک تمام ایده ال های چپ ماکسیمال A نباشد، یعنی یک ایده ال چپ ماکسیمال مثل $L_\circ$ وجود دارد به طوری که $x\notin L_\circ$، آن گاه $L_\circ+Ax=A$ و در نتیجه $1-zx\in L_\circ$ بنابراین $1\in L_\circ$ که تناقض است.

معادل بودن (۲) و (٤) به طور مشابه ثابت می شود. □

• در قضیه قبل مشاهده شد که اگر $x\in A$ به یکی از چهار مجموعه ی مذکور متعلق باشد به سه مجموعه ی دیگر نیز تعلق دارد. مجموعه ی **رادیکال** A که با $radA$ نشان می دهیم را مجموعه ی تمام $x\in A$ که در یکی از چهار مجموعه ی قضیه ی قبل قرار داشته باشد تعریف می کنیم.

۱. ۲. ۸ قضیه زمانک ($zemank$)

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد در این صورت موارد زیر معادلند:

۱) a در رادیکال ژاکوبسین A است.