بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته آمار ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

# استنباط آماری بر اساس توابع درستنمایی مرکب

استاد راهنما:

دکتر علیرضا نعمت اللهی

استاد مشاور:

دکتر نرگس عباسی

نگارش:

راضیه عبدی

بهمن ۱۳۸۹

دانشگاه پیام نور استان فارس

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

باسمه تعالی

## صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم راضیه عبدی** دانشجوی رشته**آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۸۸۰۰۰۳۶۹۹** با عنوان:

**" استنباط آماری بر اساس توابع درست‌نمایی مرکب"**

با حضور هیات داوران در روز **پنج‌شنبه** مورخ **۱۳۸۹/۱۱/۱۴** ساعت **۸ صبح** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ..........۱۹/۰۰.......به حروف.......نوزده تمام........... با درجه.........عالی........تشخیص داد.

| ردیف | نام و نام خانوادگی | هیات داوران | مرتبه دانشگاهی | دانشگاه | امضاء |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | دکتر علیرضا نعمت‌الهی | راهنما | دانشیار | شیراز | |
| ۲ | دکتر نرگس عباسی | مشاور | دانشیار | پیام نور شیراز | |
| ۳ | آقای عبدالرضا بازرگان لاری | داور | استادیار | شیراز | |
| ۴ | دکتر محبوبه حسین‌یزدی | نماینده تحصیلات تکمیلی | استادیار | پیام نور شیراز | |

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز ـ شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۴۰-۰۷۱۱
دورنگار: ۶۲۲۲۲۴۹-۰۷۱۱
صندوق پستی: ۱۳۶۸-۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان

که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است

و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم

و همسر مهربانم که برای هر اوج گرفتنی پر پروازم است

و برای هر سقوطی یک ناجی

تقدیم می کنم

## سپاسگذاری:

پس از حمد و سپاس خداوند متعال

از زحمات و راهنمایی های بی دریغ استاد راهنمای گرامی ام، جناب آقای **دکتر علیرضا نعمت اللهی** که در این راه مرا یاری نمودند سپاسگذارم.

و همینطور مرهون الطاف سرکار خانم **دکتر نرگس عباسی** هستم که استاد مشاور اینجانب بوده اند و از رهنمود های ارزشمند ایشان بهره برده ام.

و همچنین با سپاس فراوان از استاد گرانقدر جناب آقای **دکتر عبدالرضا بازرگان لاری** که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند.

## چکیده:

در مدل‌های با وابستگی‌های پیچیده، ممکن است محاسبه تابع درستنمایی و براساس آن برآورد درستنمایی ماکسیمم بسیار مشکل باشد. بر این اساس در این پایان‌نامه، نوع خاصی از شبه‌درستنمایی‌ها که درستنمایی مرکب نامیده می‌شوند، و هدف آنها کاهش محاسبات پیچیده می‌باشد، معرفی می‌گردند.

بعد از معرفی ساختار درستنمایی مرکب، یک ملاک انتخاب مدل مبتنی بر آنها ارائه می‌گردد. در ادامه به مطالعه و بررسی برآورد درستنمایی ماکزیمم با استفاده از درستنمایی مرکب در خانواده نمایی بسته می‌پردازیم.



**واژه‌های کلیدی:** آماره اطلاع آکائیک، درستنمایی زوجی، شبه‌درستنمایی، درستنمایی مرکب، درستنمایی ماکسیمم، خانواده نمایی بسته، اطلاع فیشر، توزیع نرمال چند متغیری

# فهرست مطالب

عنوان — صفحه

**عنوان** **صفحه**

# فهرست جداول

**عنوان** **صفحه**

## فهرست شکل‌ها

**عنوان** **صفحه**

# فصل اول

# درستنمایی کامل و مرکب

## ۱-۱. مقدمه:

برآورد پارامترها یکی از مسائل مهم در استنباط آماری می‌باشد. یک نوع از برآورد، برآورد نقطه‌ای است که دو مساله را ایجاب می‌کند.

اول، ابداع ابزاری برای به‌دست آوردن یک آماره و استفاده از آن به‌عنوان یک برآوردگر است.

دوم، انتخاب معیارها و فنونی برای تعریف و پیداکردن بهترین برآوردگر از بین بسیاری برآوردگرهای ممکن است.

چندین روش پیدا کردن برآوردگرهای نقطه‌ای در بخش۲ معرفی می‌شوند. یکی از آنها و شاید مهمترین آنها، روش درستنمایی ماکسیمم است که نیاز به محاسبه تابع درستنمایی دارد.

در برخی توابع محاسبه تابع درستنمایی آنها پیچیده و یا حتی غیرممکن است. با توجه به این مشکل اساسی، روش‌ها و رهیافت‌های مختلفی برای برآورد و استنباط در این دسته از توابع توسط آمارdانان مختلفی پیشنهاد شده است. رهیافت‌های معادلات برآورد، مدل‌های خطی تعمیم یافته و الگوریتم $MCEM$[۱] از آن جمله‌اند.

از جمله رهیافت‌های جدید برآورد پارامتر، استفاده از انواع دیگر درستنمایی است. در سال های اخیر علاقه و استفاده از نوعی درستنمایی معروف به شبه درستنمایی در حال افزایش است. این نوع درستنمایی اولین بار توسط بسج[۲] (۱۹۷٤)پیشنهاد شد. لیندسی[۳] (۱۹۸۸) این نوع درستنمایی را با نام درستنمایی مرکب معرفی کرد. انگیزه استفاده از برآورد درستنمایی مرکب، جایگزین کردن تابع درستنمایی توسط تابعی است که ساده‌تر محاسبه و در نتیجه ماکسیمم می‌شود. این نوع درستنمایی خواص نظری خوبی دارد و در بسیاری کاربردهای پیچیده رفتار مناسبی داراست.

---

[1]- *Monte Carlo Expectation Maximiza*

[2] - *Besag*

[3] - *Lindsay*

## ۱-۲. مروری بر برخی روش‌های برآوردیابی

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی $n$ تایی از خانواده‌ی توزیع های $\mathcal{F} = \{F_\theta: \theta \in \Theta\}$ باشد. برای برآورد پارامتر مجهول $\theta$ روش‌های مختلفی را می‌توان به کار برد. در این بخش مروری بر دو روش متداول، یعنی «روش برآورد گشتاوری» و «روش برآورد درستنمایی ماکسیمم» خواهیم داشت و به برخی روش‌های دیگر نیز اشاره خواهیم کرد.

### ۱-۲-۱. روش برآورد گشتاوری

یکی از قدیمی‌ترین روش‌های برآوردیابی، روش برآورد گشتاوری است که در سال ۱۸۹٤ توسط آماردان مشهور کارل پیرسون[٤] معرفی شده است. روش برآورد گشتاوری که از آن با عنوان برآورد $MM$ یاد می کنیم، عبارت است از دستورالعملی برای بدست آوردن برآوردگری به نام «برآوردگر گشتاوری» که از آن به اختصار $MME$ یاد می کنیم. برآورد $MM$ مبتنی بر به کارگیری گشتاورهای جمعیتی (توزیع) و گشتاورهای نمونه‌ای است.

برای روشن شدن موضوع، فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه ی تصادفی $n$ تایی از توزیع $F_\theta \in \mathcal{F}$ باشد، به طوری که $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k$ . همچنین فرض کنید $k$ گشتاور اول این توزیع، که به صورت توابعی از$\boldsymbol{\theta}$ هستند، وجود داشته باشند. می دانیم که گشتاور $r$− ام توزیع، در صورت وجود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu_r &= \mu_r(\boldsymbol{\theta}) \\ &= E_\theta(X_1^r) \ , \ \ r = 1, \dots, k\end{aligned}$$

اگر

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \quad , \quad r = 1, \dots, k$$

نمایانگر $r$− امین گشتاور نمونه بر پایه نمونه‌ی تصادفی داده شده باشد، آنگاه برآورد $MM$ پارامترهای مجهول $\theta_1, \dots \theta_k$ براساس یک ایده‌ی ساده و از تشکیل و حل $k$ معادله زیرحاصل خواهد شد.

$$\mu_r = M_r \quad , \quad r = 1, \dots, k \tag{۱-۱}$$

معمولا برآوردگر گشتاوری $\boldsymbol{\theta}$ را با $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ نمایش می دهند و لزومی ندارد که منحصربه‌فرد باشد. بنابراین باتوجه به آنچه که گفته شد، اگر $\boldsymbol{\theta} = \varphi(\mu_1, \dots, \mu_r)$ باشد، آنگاه: $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \varphi(M_1, \dots, M_r)$ خواهد بود.

[4] - *Karel Pearson*

**نکته ۱-۱:** روش برآورد $MM$ تعریف منحصربه‌فردی ندارد و روش ارائه شده برای حل معادلات (۱-۱) مبتنی بر استفاده از $k$ گشتاور اول است که می تواند با استفاده از سایر گشتاورهای توزیع یا گشتاورهای مرکزی به‌دست آید.

**نکته ۱-۲**: اگر علاقه‌مند به برآورد توابعی از $\boldsymbol{\theta}$ ، مثلا $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ ، براساس روش $MM$ باشیم، می‌توانیم به روش‌های مختلفی این کار را انجام دهیم. یک روش می‌تواند براساس، ابتدا محاسبه‌ی $\tilde{\theta}_1,\dots,\tilde{\theta}_k$ و سپس‌انتخاب $\gamma_r(\tilde{\theta}_1,\dots,\tilde{\theta}_k)$ به‌عنوان برآورد گشتاوری$\gamma_r(\theta_1,\dots\theta_k)$ ، $r=1,\dots,k$ باشد. روش دیگر می تواند از حل معادلات زیر حاصل شود:

$$\mu_r(\gamma_1,\dots,\gamma_k)=M_r\ ,\ r=1,\dots,k \tag{۱-۲}$$

که $\mu_r(\gamma_1,\dots,\gamma_k)$ ، $r$-امین گشتاور برحسب $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ است.

برای روشن شدن موضوع به ذکر ۲ مثال می‌پردازیم.

**مثال ۱-۱:** فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد. $MME$ پارامترهای $\sigma^2,\mu$ به‌صورت زیر بدست می‌آیند. می‌دانیم که:

$$\mu_1=E_{\mu,\sigma^2}(X_1)=\mu$$
$$\mu_2=E_{\mu,\sigma^2}(X_1^2)=\mu^2+\sigma^2$$

بنابراین معادلات (۱-۱) به فرم زیر خواهند بود:

$$\begin{cases}\mu=\bar{X}\\ \mu^2+\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\tilde{\mu}=\bar{X}$$
$$\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

**مثال ۱-۲:** فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. $MME$ پارامتر $\lambda$ به صورت زیر به‌دست می آید. می‌دانیم که:

$$\mu_1=E_\lambda(X_1)=\lambda$$
$$\mu_2=E_\lambda(X_1^2)=\lambda+\lambda^2$$

بنابراین برآورد $MM$ پارامتر $\lambda$ براساس گشتاور اول برابراست با:

$$\tilde{\lambda}=\bar{X}$$

و براساس گشتاور دوم داریم:

$$\lambda+\lambda^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

که از حل معادله‌ی درجه دوم فوق و انتخاب ریشه‌ی مثبت آن داریم:

$$\tilde{\lambda}=-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی براساس به‌کارگیری گشتاورهای مرکزی داریم:

$$\mu'_1=\ E_\lambda\left(X_1-\mu_1\right)=0$$
$$\mu'_2=E_\lambda(X_1-\mu_1)^2=\lambda$$

در نتیجه $MME$ پارامتر $\lambda$ براساس گشتاورهای مرکزی برابر است با:

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

**نکته ۱–۳ :** $M_r$ یک برآوردگر ناریب برای $\mu_r$ است. علاوه بر آن، بنابرقانون اعداد بزرگ داریم:

$$M_r\xrightarrow{P}\mu_r$$

یعنی $M_r$ ها برای $\mu_r$ ها سازگار هستند. می توان نشان داد که اگر رابطه ی بین $\theta_1,\dots\theta_k$ و $\mu_1,\dots,\mu_k$ یک به یک باشد و $\boldsymbol{\theta}_r=\varphi_r(\mu_1,\dots,\mu_k);\ \ r=1,\dots,k$ توابعی پیوسته از $\mu_1,\dots,\mu_k$ باشد، آن‌گاه:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r=\varphi_r(M_1,\dots,M_k);\ \ r=1,\dots,k$$

جواب معادلات (۱–۱) بوده و $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r$ یک برآوردگر سازگار برای $\boldsymbol{\theta}_r$ است(پارسیان،۱۳۸۳). بنابراین روش برآورد گشتاوری تحت شرایط ساده و مناسب، برآوردگرهای سازگار را ارائه می دهد. از طرفی برآوردگرهای بدست آمده از این روش معمولا کارانیستند(پارسیان،۱۳۸۳).

از معایب روش گشتاوری این است که زمانی‌که $\mu_r$ ها وجود نداشته باشند، کاربرد نخواهد داشت. همچنین در این روش از اطلاعات موجود در توزیع و تابع چگالی استفاده نمی شود و تنها گشتاورهای توزیع استفاده می شود.

### ۱–۲–۲. روش درستنمایی ماکسیمم

در این قسمت به بررسی روش برآوردی که غالبا مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی روش «برآورد درستنمایی ماکسیمم» که از آن به اختصار با عنوان برآورد $ML$ یاد می کنیم، می‌پردازیم. این روش یکی از قدیمی‌ترین و پراهمیت‌ترین روشها در نظریه برآوردهاست.

روش برآورد $ML$ که متداول‌ترین روش در بین استفاده‌کنندگان علمی از آمار است، اولین بار توسط

گوس[5] در سال ۱۸۲۱ به کار گرفته شد و پس از آن به صورت گسترده‌تری در سال ۱۹۲۵ توسط فیشر[6] در انتقاد از روش «برآورد گشتاوری» مورد استفاده قرار گرفت.

روش برآورد $ML$ با وجود اینکه از لحاظ شهودی مورد توجه است، بهترین روش نیست و نباید همیشه مورد استفاده قرار گیرد. درحقیقت هیچ قضیه‌ای وجود ندارد که ثابت کند این روش، به جز در موارد مجانبی، دارای خواص بهینه است، بلکه بهینه بودن برآوردگر $ML$ زمانی است که این برآوردگر بر برآوردگر دیگری که با روشی متفاوت بدست آمده است، منطبق شود.

روش $ML$ عبارت است از دستورالعملی برای بدست آوردن برآوردگری به‌نام «برآوردگر درستنمایی ماکسیمم» که از آن به اختصار $MLE$ یاد خواهیم کرد و مبتنی بر یک تابع آماری مهم به نام «تابع درستنمایی» است. فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ، بردار $n$ متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توام $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$، $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq R^k$ ، باشد.

**تعریف ۱-۱ (تابع درستنمایی) :** برای هر مقدار داده شده $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ ، تابع درستنمایی $\boldsymbol{X}$ راتابع چگالی احتمال توام $\boldsymbol{X}$ ، یعنی $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ ، تعریف می کنیم که به صورت تابعی از $\boldsymbol{\theta}$ در نظر گرفته می شود و آن را با نماد $L(\boldsymbol{\theta})$ نمایش می دهیم:

$$L(\boldsymbol{\theta})=f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$$
$$=L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x})$$

**نکته ۱-٤:** الف- تابع درستنمایی $L(\boldsymbol{\theta})$ لزوما نسبت به $\boldsymbol{\theta}$ مشتق پذیر نیست.

ب- تابع درستنمایی $L(\boldsymbol{\theta})$ یک تابع چگالی احتمال نیست.

ج- اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌تصادفی $n$ تایی از توزیعی از خانواده چگالی‌های $\{f(x;\theta) : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ باشد، آنگاه:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\boldsymbol{\theta})$$

**تعریف ۱-۲ (برآوردگر درستنمایی ماکسیمم) :** اگر $\delta(\mathbf{X})$ برآوردگری برای $\boldsymbol{\theta}$ باشد، به طوری‌که:

$$i)\ P_{\boldsymbol{\theta}}(\delta(\boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Theta}) \quad = 1 \ \ , \ \ \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$$
$$ii) L\big(\delta(\boldsymbol{X})\big) \geq L(\boldsymbol{\theta}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$$

آنگاه $\delta(\boldsymbol{X})$ به عنوان یک برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\boldsymbol{\theta}$ تعریف می شود.

معمولا برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\boldsymbol{\theta}$ را با $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نمایش می دهند و لزومی ندارد که منحصربه‌فرد باشد. همچنین براساس تعریف $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ داریم:

---

[5] - *Gauss*

[6] - *Fisher*

$$L(\tilde{\theta}) = sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)$$

یا اگر تعریف کنیم: $l(\theta) = LnL(\theta)$ آنگاه:

$$l(\tilde{\theta}) = sup_{\theta\in\Theta}l(\theta)$$

همانگونه که در نکته ۱-٤ (ج) بیان شد، مهمترین موارد بررسی حالت‌هایی است که در آنها $X_1, \dots, X_n$ نمونه ای تصادفی از چگالی معین $f(X;\theta)$ می باشد، به طوری‌که تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$$

بیشتر توابع درستنمایی در شرایط نظم صدق می کنند، به طوری‌که برآوردگر درستنمایی ماکسیمم جواب معادله ی $\frac{dL(\theta)}{d(\theta)}=0$ می باشد. شرایط نظم عبارتند از:

الف- $\Theta$ یک زیرفاصله‌ی باز از اعداد حقیقی است، یعنی $\Theta \subseteq R$ .

ب- مشتق تابع چگالی نسبت به $\theta$، یعنی $\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$ وجود دارد.

ج- جابجایی عملگرهای مشتق و انتگرال مجاز است، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x;\theta)d\mu(x) = \int\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)d\mu(x)$$

د- برای هر $\theta \in \Theta$، $E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}lnf(x;\theta)\right]^2 > 0$

ه- برای هر برآوردگر $T$ پارامتر $\gamma(\theta)$ ،

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta[T(X)] = \frac{\partial}{\partial\theta}\int t(x)f(x;\theta)d\mu(x) = \int t(x)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)d\mu(x)$$

همچنین $L(\theta)$ و $LnL(\theta)$ در مقدار یکسانی از $\theta$ ماکسیمم می‌شوند و گاهی اوقات پیداکردن ماکسیمم لگاریتم درستنمایی آسانتر است.

**مثال ۱-۳:** فرض کنید نمونه ای تصادفی به حجم $n$ از توزیع برنولی

$$f(x;p) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x), \qquad 0\leq p \leq 1 \;,\; q = 1-p$$

استخراج شده باشد. مقادیر نمونه $x_1, \dots, x_n$ دنباله‌ای از صفر و یک‌هاست و تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}q^{1-x_i} = p^{\sum x_i}q^{n-\sum x_i}$$

و اگر قرار دهیم $y = \sum x_i$ داریم:

$$LnL(p) = yLnp + (n-y)Lnq$$

و

$$\frac{dLnL(p)}{dp}=\frac{y}{p}-\frac{n-y}{q}$$

بخاطر داریم که $q=1-p$ با مساوی صفر قراردادن عبارت اخیر و حل آن نسبت به $p$ برآورد

$$\hat{p}=\frac{y}{n}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$$

را می‌یابیم (آزمون مشتق بفرم $\frac{d^2LnL(p)}{dp^2}=-\frac{y}{p^2}<0$ است). این برآورد یک برآورد روش گشتاورها نیز می باشد.

**مثال ۱–٤:** فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از توزیع لاپلاس با پارامتر $\theta$ باشد.

$MLE$ پارامتر $\theta$ عبارت است از:

تابع درستنمایی برابر است با:

$$L(\theta)=2^{-n}exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\right\}$$

و

$$l(\theta)=-nLn2-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$$

واضح است که ماکسیمم کردن $L(\theta)$ (یا $\ell(\theta)$) نسبت به $\theta$ معادل مینیمم‌کردن تابع $g(\theta)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$ نسبت به $\theta$ است. اگر $m$ نمایانگر میانه‌ی داده های $x_1,\dots,x_n$ باشد،می‌توان نشان داد که به ازای همه‌ی مقادیر ممکن $\theta$، $g(\theta)\geq g(m)$ . بنابراین:

$$\hat{\theta}=median(X_1,\dots,X_n)$$

**مثال ۱–۵:** فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از توزیع $\Gamma(\alpha,1)$، $\alpha\in(0,\infty)$ باشد.

$MLE$ پارامتر $\alpha$ به‌صورت زیر محاسبه می شود:

تابع درستنمایی برابر است با:

$$L(\alpha)=[\Gamma(\alpha)]^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

و

$$l(\alpha)=LnL(\alpha)=-nLn\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}Lnx_i-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

برای معادله درستنمایی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}l(\alpha)=-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{i=1}^{n}Lnx_i=0$$

یعنی

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} Lnx_i$$

برای حل معادله‌ی فوق به جداول مربوط به $\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ (که به دای گاما معروف است) یا روشهای آنالیز عددی نیاز داریم.

**مثال ۱-٦:** فرض کنید متغیر تصادفی $X$ دارای چگالی یکنواخت زیر است:

$$f(x;\theta) = I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x)$$

که در آن $-\infty < \theta < \infty$ است، یعنی، خط حقیقی= $\Theta$ . تابع درستنمایی برای نمونه‌ای به حجم $n$ عبارت است از:

$$L(\theta;x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x_i) = I_{[y_{(n)}-\frac{1}{2},y_{(1)}+\frac{1}{2}]}(\theta)$$

می باشد که در آن $y_{(1)}$ کوچکترین مقدار و $y_{(n)}$ بزرگترین مقدار مشاهدات می‌باشد. آخرین تساوی در معادله بالا به‌طریق زیر نتیجه می‌شود. چون‌که $\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x_i)$ برابر واحد است اگر و تنها اگر $x_1,\dots,x_n$ همه در بازه‌ی $\left[\theta-\frac{1}{2},\ \theta+\frac{1}{2}\right]$ باشند که این امر درست است اگر و تنها اگر $\theta-\frac{1}{2} \le y_{(1)}$ و $y_{(n)} \le \theta+\frac{1}{2}$ باشد، که معادل است با $y_{(n)}-\frac{1}{2} \le \theta \le y_{(1)}+\frac{1}{2}$ . دیدیم که تابع درستنمایی یا برابر یک است[ برای $y_{(n)}-\frac{1}{2} \le \theta \le y_{(1)}+\frac{1}{2}$ ] یا صفر [در غیر این صورت]؛ بنابراین هر آماره با مقدار $\hat{\theta}$ که در $y_{(n)}-\frac{1}{2} \le \hat{\theta} \le y_{(1)}+\frac{1}{2}$ صدق کند یک برآورد درستنمایی ماکسیمم است. $y_{(n)}-\frac{1}{2}$ و $y_{(1)}+\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}(y_{(1)}+y_{(n)})$ مثال‌هایی از چنین برآوردگرهایی می‌باشند. آماره‌ی اخیر نقطه میانی بین $y_{(n)}-\frac{1}{2}$ و $y_{(1)}+\frac{1}{2}$ یا نقطه میانی بین $y_{(1)}$ و $y_{(n)}$، که همان کوچکترین و بزرگترین مشاهدات هستند، می باشد.

مثال آخر نشان می دهد که نباید همیشه به فرآیند مشتق‌گیری جهت تعیین مکان ماکسیمم اعتماد کرد. برآوردگر درستنمایی ماکسیمم علاوه بر ویژگی مطلوب شهودی که تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کند دارای برخی ویژگی های بهینه مناسب دیگری نیز می باشد. به‌علاوه، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم دارای ویژگی پایایی نیز می‌باشد که در قضیه زیر به آن پرداخته شده است.

**قضیه ۱-۱. ویژگی پایایی برآوردهای درستنمایی ماکسیمم:**

فرض کنید $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}\ (X_1,\dots,X_n)$ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\theta$ در چگالی $f(x;\theta)$ باشد که در آن $\theta$ یک بعدی فرض شده است. اگر $\tau(.)$ تابعی با وارون تک‌مقداری باشد، آنگاه برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\tau(\theta)$ برابر $\tau(\hat{\theta})$ می باشد.

برای مثال در چگالی نرمال با $\mu_\circ$ معلوم، همانگونه که می‌دانیم برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\sigma^2$ برابر $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_\circ)^2$ می باشد. بنابر ویژگی پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم σ عبارت است از:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_\circ)^2}$$

ویژگی پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم که در قضیه ۱-۱ شرح داده شد می‌تواند تعمیم داده‌شود. بنابر زهنا[7] آن را در دو راستا تعمیم می‌دهیم:

اولا $\theta$ را به‌جای یک‌بعدی $k$بعدی می‌گیریم، دوما، فرض وارون تک‌مقداری $\tau(.)$ را حذف می‌کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید برآورد واریانس توزیع برنولی یعنی $\theta(1-\theta)$ مورد نظر باشد. مثال ۱-۳، برآورد درستنمایی ماکسیمم $\theta$ را که $\bar{x}$ می باشد می‌دهد، اما چون $\theta(1-\theta)$ تابعی یک به یک از $\theta$ نیست، قضیه ۱-۱ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم$\theta(1-\theta)$ ام را نمی‌دهد. قضیه زیر چنین برآوردی را می‌دهد، که برابر $\bar{x}(1-\bar{x})$ می‌باشد.

ویژگی پایایی برآورد درستنمایی ماکسیمم در قضیه‌ی زیر داده شده است.

***قضیه ۱-۲.*** *فرض کنید* $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k)$ *، که در آن* $\hat{\theta}_j=\hat{\theta}_j\ (X_1,\dots,X_n)$ *است، یک برآوردگر درستنمایی ماکسیمم* $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_k)$ *در چگالی* $f(.;\theta_1,\dots,\theta_k)$ *باشد. اگر برای* $1\le r\le k$ ، $\tau(\boldsymbol{\theta})=(\tau_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\tau_r(\boldsymbol{\theta}))$ تبدیلی از فضای پارامتری $\boldsymbol{\Theta}$ باشد، آنگاه برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\tau(\boldsymbol{\theta})=(\tau_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\tau_r(\boldsymbol{\theta}))$ برابر است با $\tau(\hat{\boldsymbol{\theta}})=(\tau_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}),\dots,\tau_r(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ ] توجه کنید که $\tau_j(\boldsymbol{\theta})=\tau_j(\theta_1,\dots,\theta_k)$ بنابراین برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\tau_j(\theta_1,\dots,\theta_k)$ برای $j=1,\dots,r$ برابر $\tau_j(\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k)$ می‌باشد] .

### ۱-۲-۳ . روش‌های دیگر

چندین روش دیگر برای بدست آوردن برآوردگرهای نقطه‌ای وجود دارد. از میان روش‌های موجود موارد زیر را می‌توان نام برد:

۱- روش کمترین مربعات

۲- روش بیز

۳- روش مینیمم کی دو

٤- روش مینیمم فاصله

[7] - *Zehna*