بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

روش فوق تخفیف متوالی متقارن برای حل دستگاههای معادلات خطی باماتریس ضرایب ناتمام رتبه

استاد راهنما

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور

دکتر داود رستمی

نگارش

فاطمه عبدالرزاقی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

ریاضی کاربردی

دی ۱۳۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب فاطمه عبدالرزاقی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان روش خوش تخفیف متوالی متقارن برای حل دستگاه های معادلات خطی نامتقارن را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو فاطمه عبدالرزاقی

امضاء و تاریخ

۸۸/۱/۱۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم فاطمه عبدالرزاقي
دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی
در مورخ ۸۷/۱۱/۷ تحت عنوان «روش فوق تخفیف متوالي
متقارن براي حل دستگاههاي معادلات خطي ناتمام رتبه»
در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت
داوران قرار گرفت .

هیأت داوران :

۱- استاد راهنما: آقای دکتر سعید عباس بندی
امضاء

۲- استاد مشاور:
آقای دکتر داوود رستمی
امضاء

۳- عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:
آقای دکتر محمود هادیزاده
امضاء

۴- عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:
آقای دکتر رضا میرزایي
امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی:
آقای دکترعبدالرحمن رازانی
امضاء

حوزه آموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

ستایش و تشکر

حمد و سپاس خدا را که خود علم مطلق است و آفریده را ذره‌ای بر علمش احاطه نیست.
خدا را بی نهایت شاکرم که توفیق تحصیل را بر من ارزانی نمود.
از دریای صفا و مهربانی، **مادرم** که نشاطم را مرهون محبتش و زندگیم را مدیون تلاشش می‌دانم و از کوه صبر و استقامت، **پدرم** که با از خود گذشتگیهایش زندگی را با تمام زیباییهایش به من تقدیم نموده از **همسر** عزیز و فداکارم که راهنمایی ها و تشویق های دلسوزانه اش همواره یاریگرم بود بی‌نهایت سپاسگزارم.
از استاد گرانمایه جناب آقای دکتر سعید عباس بندی که در طی مراحل تحقیق و تدوین پایان نامه همواره مشاور و راهنمای من بوده‌اند و مطالب ارزنده‌ای به من آموختند نهایت امتنان را دارم.
از استاد فرزانه جناب آقای دکترداود رستمی که راهنماییهای ارزنده شان همیشه شامل حالم بوده کمال تشکر را دارم.
از دکتر محمود هادیزاده و دکتر رضا میرزایی که داوری این رساله را پذیرفتند .نهایت تشکر را دارم. بر خود لازم می دانم از اساتید محترم دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) به ویژه اساتید ارجمندم دکتر رازانی و دکتر پیروی ودکتر اخوی زادگان و.. صمیمانه تشکر کنم که در این دوره ی آموزشی برای ما زحمات بی دریغی را متحمل شدند. و در نهایت از همه دوستان و عزیزانی که در طی این مراحل همواره یاریگرم بودندصمیمانه سپاسگزارم .

تقدیم به دختر عزیزم

پانیذ

چکیده

در حال حاضر به دلیل پیشرفت علوم کامپیوتر و کاهش زمان لازم برای اجرای الگوریتم های تکراری، روش های تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی توجه بسیاری را به خود جلب کرده‌است و ریاضیدانها تلاش می کنند قدرت این روشها را افزایش دهند .در بسیاری از کتاب های آنالیز عددی روشهای مستقیم مانند QR و LU و ... توضیح داده شده است که این روش ها برای حل تمامی دستگاه های معادلات خطی قابل توجیه نمی باشد. در [۲] روش هایی به نام روش فوق تخفیف SOR و روش AOR در حالتی که ماتریس ضرایب دستگاه مربعی باشد ارائه شده است. که تعداد زیادی از ریاضیدان ها روی این حالت کار کرده اند، اما بسیاری از مسائل وجود دارد که دستگاه معادلات خطی آن به صورت مربعی نیست که chen در [۴] دستگاه معادله خطی را در حالتی که ماتریس ضرایب تمام رتبه ستونی باشد با ترکیب کردن یک روش مستقیم و یک روش تکراری حل کرد و جواب حداقل مربعات دستگاه را پیدا کرد. بعداً Neumann وMiller در [۸] دستگاه را در حالتی که ماتریس ضرایب تمام رتبه نباشد بسط داد و قضیه اصلی روش SOR را ارائه کردند. ما در این پایان نامه‌که تشریح مقاله ی تحت عنوان روش فوق تخفیف متوالی متقارن($SSOR$)، درویشی—خسرو اقدم است [۶]، روش جدیدی برای حل دستگاه های معادلات خطی ارائه می دهیم که ماتریس ضرایب به صورت غیر مربعی باشد. در فصل اول به بیان تعاریف مورد نیاز می پردازیم و سپس در فصل دوم روشهای مستقیم و تکراری حل دستگاه معادلات خطی برای حالتی که ماتریس ضرایب مربعی باشد را مطرح کرده و به بیان قضایا می پردازیم.در فصل سوم به بیان و ارائه روش اصلی فوق تخفیف پرداخته و قضایای مورد نیاز را مطرح می کنیم و در فصل چهارم به توسعه روش فوق تخفیف متقارن می پردازیم که برای حل دستگاه معادلات خطی ناتمام رتبه به کار می رود. در این روش، جواب بدست آمده برای دستگاه، جواب حداقل مربعات با کمترین نرم‌دستگاه افزوده ی $Ax = b$ است که در این دستگاه‌A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه ی r است، همچنین بازه ی همگرایی برای پارامتر تخفیف این روش را به دست آورده و پارامتر تخفیف بهینه را نیز محاسبه می کنیم و با ارائه ی چند مثال برتری آن رانسبت به روش های دیگر نشان می دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

مقدمه:

در این فصل برای آشنایی خوانندگان با برخی مفاهیم و تعاریف به کار گرفته شده در این پایان نامه، تعداد محدود و لازمی از آن ها را مطرح کرده ایم ، البته قبل از شروع این پایان نامه خواننده بایستی با برخی از مفاهیم در ارتباط با ماتریس ها و شبه وارون ها آشنا باشد که در این خصوص به [۱۶] مراجعه شود .

تعریف ۱.۱. ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $x^T Ax > 0$ اگر $x^T Ax \geq 0$ آن گاه A یک ماتریس معین نا منفی (نیمه معین مثبت) است .

خواص ماتریس معین مثبت به صورت زیر است :

۱)همواره مؤلفه های روی قطر اصلی مثبت اند یعنی $a_{ii} > 0$

۲)مقادیر ویژه A مثبت هستند .

۳) $det(A) = \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ (λ_i ها مقادیر ویژه ی ماتریس A هستند.)

تعریف ۲.۱. ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ را در نظر می گیریم چند جمله‌ای زیر راچند جمله‌ای مشخصه ماتریس A گوییم، که در آن λ متغیر است.

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

این چند جمله ای از درجه n است که حداکثر n ریشه دارد و ممکن است بعضی از آ ن ها مختلط باشند. اگر λ ریشه این چند جمله ای باشد آن گاه چون $det(A - \lambda I) = 0$ نتیجه می گیریم که دستگاه $(A - \lambda I) = 0$ دارای یک جواب مخالف صفر است .

تعریف ۳.۱. طیف یک ماتریس مربعی A مجموعه $\sigma(A)$ شامل کلیه مقادیر ویژه A است .

تعریف ۴.۱. اگر A یک ماتریس $n \times n$ ، با مقادیر ویژه ی λ_i ,$1 \leq i \leq n$ در این صورت

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

شعاع طیفی ماتریس A نامیده می شود .

تعریف ۵.۱. ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ هرمیتی است اگر $A^H = A$ به طوری که $A^H = (A^*)^T$ و A^* مزدوج مختلطماتریس A است .

تعریف ۶.۱. فرض کنیم $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ آن گاه فضای تولید شده توسط ستونهای A را برد A گوییم و آن را با $R(A)$ نمایش می دهیم . به عبارت دیگر

$$R(A) = \{y \in \mathbb{C}^m | Ax = y, x \in \mathbb{C}^n\}$$

تعریف ۷.۱. مجموع تمام x هایی که در دستگاه $Ax = 0$ صدق می کند فضای پوچ ماتریس A گویند و آن را با $N(A)$ نمایش می دهیم.

$$N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = 0\}$$

تعریف ۸.۱. یک ماتریس $A_{n\times n}$ قطر غالب سطری است هر گاه

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

تعریف ۹.۱. نرم روی یک فضای برداری V تابعی است مانند

$$||.|| : V \to \Re^+$$

که از خواص زیر برخوردار است:

$$(1) \quad \forall x \in V \qquad ||x|| \geq 0 \qquad , ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall x \in V \qquad ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$$

$$(3) \quad \forall x, y \in V \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

هر گاه چنین تابعی روی V وجود داشته باشد V را یک فضای برداری نرم دار گویند .

یکی از نرم های برداری روی فضای $\Re^n$ که زیاد مورد استفاده قرار می گیرد $||.||_p$ است که برای $p \geq ۱$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$||x||_p = \left[\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

و برای $x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ سه نرم زیر را بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} ||x||_۱ &= |x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n| \\ ||x||_۲ &= \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲} \\ ||x||_\infty &= max|x_i|, \quad ۱ \leq i \leq n \end{aligned}$$

تعریف ۱.۱۰. اگر $A \in \Re^{n\times n}$ و $||.|| : R^n \longrightarrow \Re \geq$ یک نرم برداری باشد در این صورت $||.|| : \Re^{n\times n} \longrightarrow \Re^+$ را به عنوان نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری داده شده به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$||A|| = \underset{x \neq ۰}{Sup} \frac{||Ax||}{||x||}$$

و به آن نرم طبیعی گویند و خواص نرم نیز برای آن برقرار است . همچنین داریم :

$$||A||_\infty = \underset{۱ \leq i \leq n}{max} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_۱ = \underset{۱ \leq j \leq n}{max} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ij}|$$

قضیه ۱.۱. برای ماتریس های $A_{n\times n}$ داریم :

$$(۱) \quad \left[\rho(A^t.A)\right]^{۱/۲} = ||A||_۲$$

$$(۲) \quad \rho(A) \leq ||A||$$

اثبات: به [۱۴] مراجعه کنید .

قضیه ۲.۱. یک دنباله ی $\{x^{(k)}\}$ یا $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$ برای $k \geq 1$ برای همه ی بردار های اولیه ی $x^{(0)}$ همگراست اگر وتنها اگر $\rho(T) < 1$

اثبات: به [۱۴] مراجعه کنید.

تعریف ۱۱.۱. اگر $A \in \Re^{n\times n}$ یک ماتریس نامنفرد باشد آن گاه عدد حالت آن عبارت است از

$$cond(A) = ||A||.||A^{-1}||$$

و چون $||A^{-1}|| \cdot ||A|| \geq ||AA^{-1}|| = ||I|| = 1$ پس $cond(A) \geq 1$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید E^n مجموعه ی همه ی بردار های n بعدی باشد در این صورت به ازای دو بردار $V = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$ و $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ ضرب داخلی را به صورت

$$(V, W) = W^*V = \sum_{i=1}^{n} v_i\bar{w}_i$$

و برای هر ماتریس $A \in \Re^{n\times n}$

$$(V, AW) = V^H AW = (A^H V)^H W = (A^H V, W)$$

بنابراین

$$(V, AW) = (A^H V, W)$$

تعریف ۱۳.۱. هرگاه m, n اعداد صحیح و مثبت باشند $\mathbb{C}^{m\times n}(\Re^{m\times n})$ را مجموعه تمام ماتریس های $m \times n$ بر روی‌میدان $\mathbb{C}(\Re)$ در نظر می گیریم . معمولاً مجموعه ی $\mathbb{C}^{1\times n}(\Re^{1\times n})$ را با $\mathbb{C}^n(\Re^n)$ نشان داده و آن را مجموعه بردارهای ستونی n تایی می نامیم.

تعریف ۱۴.۱. رتبه یک ماتریس:

گوییم ماتریس غیر صفر A دارای رتبه r است هرگاه حداقل یکی از دترمینان های زیر ماتریس های مربع مرتبه r آن مخالف صفر باشد در حالی که هر دترمینان زیر ماتریس مربع مرتبه $(r+1)$ ام آن در صورت وجود صفر باشد. رتبه ی هر ماتریس مثل A را با $rank(A)$ نشان می دهیم. هرگاه A ماتریسی $n \times n$ با $rank(A) = n$ باشد ماتریس را ماتریس تمام رتبه می نامیم . به طور مشابه هرگاه A ماتریسی $m \times n$ با $rank(A) = m$ ، A را تمام رتبه سطری و هرگاه $rank(A) = n$ باشد آن را تمام رتبه ستونی می نامیم، گوییم ماتریس صفر دارای رتبه ی صفر است.

تعریف ۱.۱۵. اثر یا $(trace)$ یک ماتریس:
مجموعه مؤلفه های قطری یک ماتریس مربع را اثر یا$(trace)$ ماتریس می نامیم و آن را با $Tr(A)$ نمایش می دهیم . لذا هرگاه $A=(a_{ij})$ ماتریس مربع مرتبه n باشد در این صورت:

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

۱ . ۱ وارون های تعمیم یافته

اگر A یک ماتریس غیر مربعی یا یک ماتریس مربعی منفرد باشد در این صورت دارای وارون نخواهد بود اما دارای وارون تعمیم یافته است به نام $g-$ وارون ،باخواص زیر است:
۱) $g-$ وارون بعضی از خواص وارون معمولی ماتریس ها را دارا می باشد
۲) اگر A یک ماتریس مربع نا منفرد باشد در این صورت $g-$ وارون همان وارون معمولی ماتریس خواهد بود.
تعریف ۱.۱۶. اگر A یک ماتریس $m\times n$ و X یک $g-$ وارون A باشد در این صورت X ماتریسی $n\times m$ می باشد که:

$$(1)\quad AXA=A$$

$$(2)\quad XAX=X$$

$$(3)\quad (AX)^{*}=AX$$

$$(4)\quad (XA)^{*}=XA$$

که در آن A^{*} ترانهاده ی مزدوج A می باشد.
الف)اگر (۱) برقرار باشد X را یک وارون A گوییم و با A^{-} نمایش می دهیم.
ب)اگر (۱)و(۲) برقرار باشند X را یک $g-$ وارون انعکاسی A گوییم و آن را باA_{R}^{-} نمایش

می دهیم.

ج) اگر (۱)و(۴) برقرار باشند X را یک $g-$ وارون با کمترین نرم می نامیم و با A_M^- نمایش می دهیم.

د) اگر (۱)و(۳) برقرار باشند X را یک $g-$ وارون با حداقل مربعات می نامیم و با A_L^- نمایش می دهیم.

ه) اگر هر چهار رابطه ۱ تا ۴ برقرار باشند X را یک شبه وارون A می نامیم و با نماد A^+ نمایش می دهیم.

قضیه ۳.۱. شبه وارون ماتریس A یکتاست.

اثبات: به [۱۶] مراجعه کنید.

توجه کنید که A^- و A_L^- و A_R^- و A_M^- یکتا نیستند.

قضیه ۴.۱.

الف)اگر A ماتریس مربع و نامنفرد باشد $A^+ = A^{-1}$

ب) اگر $A = O$ آنگاه $A^+ = O^*$ (O ماتریس صفر است)

پ) اگر A ماتریس $m \times n$ با رتبه n باشد $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$

ت) اگر A ماتریس $m \times n$ با رتبه m باشد $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$

اگر A تمام رتبه نباشد آنگاه A به دو ماتریس تمام رتبه B, C قابل تجزیه است که $A = BC$ که

$$rank(A) = rank(B) = rank(C) = K$$

در این صورت

$$A^+ = (BC)^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

اثبات: به [۱۷] مراجعه کنید.

مثال ۱) ماتریس A را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

با تجزیه A به عوامل تمام رتبه A^+ را محاسبه می کنیم.

ماتریس های P, Q را چنان می یابیم که داشته باشیم:

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad rank(A) = r = ۳$$

که با اعمال مقدماتی داریم:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$P^{-۱}$ و $Q^{-۱}$ عبارت اند از:

$$P^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, Q^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} I_r & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

چون $A = P^{-۱}NQ^{-۱}$ و چون عوامل تمام رتبه A عبارتند از r ستون اول $P^{-۱}$ و r سطر اول $Q^{-۱}$ پس:

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و داریم $A = BC$. با انجام عملیات لازم برای محاسبه ی $C^*(CC^*)^{-۱}$ و $(B^*B)^{-۱}B^*$ خواهیم داشت:

$$A^+ = (BC)^+ = C^*(CC^*)^{-۱}(B^*B)^{-۱}B^* = \frac{۱}{۵۴}\begin{pmatrix} ۱۲ & ۳ & ۳ & ۰ \\ ۲۱ & ۳ & ۳ & ۹ \\ ۳ & ۳ & ۳ & -۹ \\ ۰ & ۹ & ۹ & ۱۸ \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۱۷. فرض کنیم $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ آنگاه کوچک ترین عدد نا منفی k که در رابطه ی

$R(A^k) = R(A^{k+1})$ صدق می کند، نمایه $A(index)$ نامیده می شود.

قرارداد: برای یک ماتریس $n \times n$ قرار می دهیم $A^{\circ} = I$

قضیه ۵.۱. اگر ماتریس A نا منفرد باشد آنگاه $index(A) = \circ$

اثبات: چون A نا منفرد است پس $detA \neq \circ$ پس ستون های

I

A هر دو پایه ای برای $\mathbb{C}^{n\times n}$ هستند و چون تعداد ستون ها برابر بعد فضا است پس هر دو تشکیل یک پایه برای $\mathbb{C}^{n\times n}$ می دهند، در نتیجه $R(A) = R(I)$ یعنی $index(A) = \circ$ و اثبات به اتمام می رسد.

مثال ۲) اگر داشته باشیم $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}$ آن گاه چون $det(A) = -۵ \neq \circ$ پس $index(A) = \circ$ می باشد.

مثال ۳) فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۲ \\ ٦ & ۸ & ۴ \end{pmatrix}$ آن گاه داریم $det(A) = \circ$ پس برای محاسبه ی $index(A)$ توان های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

$$A^{۲} = \begin{pmatrix} ۲۴ & ۴۳ & ۲۳ \\ ۳۲ & ۵\circ & ۲٦ \\ ٦۴ & ۱\circ\circ & ۵۲ \end{pmatrix}$$

چون حاصلضرب خارجی ستون های اول و دوم دو ماتریس $A^{۲}$ و A با هم موازی می باشند یعنی $(\circ, -٦۴, ۳۲)$ و $(\circ, -۴, ۲)$ در نتیجه برد هر دو ماتریس صفحه $(x = \circ, -۲y + z = \circ)$ می باشد پس داریم:

$$R(A^{۲}) = R(A) \Longrightarrow index(A) = ۱$$

قضیه ٦.۱. اگر A ماتریس دلخواه باشد در این صورت

$(a)\quad (A^+)^+ = A$

$(b)\quad (A^*)^+ = (A^+)^*$

$(c)\quad (A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$

$(d)\quad (AA^*)^+ = (A^*)^+A^+$

$(e)\quad A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$

$(f)\quad rank(A) = rankA^+ = rank(A^+A) = rank(AA^+)$

اثبات: به [۱۷] مراجعه کنید.

تعریف ۱۸.۱. برای اسکالر a تعریف می کنیم

$$a^+ = \begin{cases} \frac{1}{a} & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

قضیه ۷.۱. برای اسکالر k و ماتریس دلخواه A داریم:

$$(kA)^+ = k^+A^+$$

اثبات: اگر $k = 0$ که $k^+ = 0$ در نتیجه $(kA)^+ = 0^+ = 0^T = k^+A^+$

فرض کنیم $k \neq 0$ پس

$$(i) \quad (kA)(k^+A^+)(kA) = (kk^+k)(AA^+A) = kA$$

$$(ii) \quad k^+A^+(kA)(kA^+) = k^+kk^+(A^+AA^+) = k^+A^+$$

$$(iii) \quad (kA(k^+A^+)) = (kk^+(AA^+)) = AA^+$$

که چون AA^+ هرمیتی است بنابراین $(kA)(k^+A^+)$ نیز هرمیتی است.

$$(iv) \quad ((k^+A^+)(kA)) = A^+A$$

در نتیجه $(k^+A^+)(kA)$ نیز هرمیتی است بنابراین طبق یکتایی شبه وارون

$$(kA)^+ = k^+A^+\square$$

تعریف ۱۹.۱. اگر A و B ماتریس های مربع نامنفرد باشند AB نامنفرد است و داریم: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ در حالی که این مطلب برای شبه وارون درست نیست $(AB)^+ \neq B^+A^+$

قضیه ۸.۱. [۱۰] اگر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ و $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و A نامنفرد باشد، آن گاه

$$rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = rank(A)$$

اگر وتنها اگر $X = CA^{-1}B$

اثبات: فرض کنیم:

$$rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = rank(A)$$

پس n سطر اول ماتریس $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$ مستقل خطی بوده و m سطر پایین آن را می توان برحسب ترکیب خطی n سطر اول به دست آورد یعنی یک ماتریس جایگشتی P موجود است که داریم:

$$P.\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

قرار می دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-۱} & I_m \end{pmatrix}$$

حال داریم:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-۱} & I_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$-CA^{-۱}B + X = ۰ \Rightarrow X = CA^{-۱}B.$$

برعکس فرض می کنیم $X = CA^{-۱}B$ ثابت می کنیم

$$rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = rank(A)$$

چون A یک ماتریس مربعی مرتبه n از ماتریس مربعی $m+n$ است و غیر منفرد می باشد پس

$$rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \geq rank(A) \qquad (I)$$

حال چون داریم:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-۱} & I_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-۱}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ -CA^{-۱} & I_m \end{pmatrix}^{-۱} \times \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

چون داریم $rank(EF) \leq min(rank(E), rank(F))$ پس داریم:

$$rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \leq min(m+n, rank(A)) = rank(A) \quad (II)$$