دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

نظریه نقطه ثابت

برای توابع انقباضی مجموعه—مقدار

استاد راهنما:

دکترشیرین حجازیان

استاد مشاور:

دکتر تکتم آقاسی زاده

نگارش:

سمیه موحدی زاده

دی ماه ۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

نظریه نقطه ثابت برای انقباض های مجموعه–مقدار توسط نادلر آغاز شد.این نظریه سپس توسط ریاضیدانان بسیاری بسط و گسترش یافت.

در این پایان نامه مفهوم انقباض های مجموعه–مقدار در فضاهای متریک معرفی می شود و به بررسی شرایطی می پردازیم که لزوم وجود یک نقطه ثابت را برای چنین نگاشتهایی تضمین می کند.

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول، مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به نظریه نقطه ثابت و توابع انقباضی به طور مختصر توضیح داده‌می شود. در فصل دوم،تعمیمی از قضایای نادلر و فنگ لیو ارائه می شود و مقایسه آنها با قضایای میزوگوچی و تاکاهاشی مورد بررسی قرار می گیردکه مبنای کار مقاله

$D.Klim, D.Wardowski, Fixed\ point\ theorems\ for\ set{-}valued\ contractions\ in\ complete$
$metric\ spaces, J.Math.Anal.Appl.$ ۳۳۴(۲۰۰۷)۱۳۲ – ۱۳۹

می باشد.

در فصل سوم،تعمیم قضیه نقطه ثابت سیریک به جهات مختلف مورد مطالعه قرار می گیرد که مبنای کار مقاله

$Barada\ K.Ray, On\ Ciric's\ fixed\ point\ theorem$

است و در نهایت تعمیم قضیه سیریک با یک فاصله جدید در فصل چهارم معرفی می شود که مبنای کار مقاله‌زیر می باشد:

$Duran\ Turkoglu\ , Brian\ Fisher, A\ generalhzation\ of\ a\ fixed\ point\ theorem\ of\ Ciric,$
$Novi\ Sad\ J.Math.Vol.$۲۹, $No.$۱, (۱۹۹۹), ۱۱۷ – ۱۲۱.

فصل ۱

پیش نیاز

۱−۱ تعاریف و مثال ها

تعریف ۱−۱.۱ : فرض کنیم X یک مجموعه نا تهی باشد.یک نگاشت d از $X \times X$ به R یک **متریک (تابع فاصله)** نامیده میشود اگر و تنها اگر d در شرایط زیر صدق کند:

i) $d(x,y) \geqslant 0$ ؛ $\forall x,y \in X$

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ؛

iii) $d(x,y) = d(y,x)$ ؛ $\forall x,y \in X$

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\forall x,y,z \in X$ (نابرابری مثلث).

تعریف ۱—۱.۲ : اگر d یک متریک برای X باشد،آنگاه دوتائی مرتب (X,d) یک **فضای متریک** نامیده میشود.

تعریف ۱—۱.۳ : فضای متریک (X,d) **کامل** نامیده میشود اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در X همگرا به یک نقطه در X باشد.

تعریف ۱—۱.۴ : **تابع فاصله بین هر نقطه از M و هر مجموعه نا تهی Y از M** به صورت زیر تعریف می شود:

$$d_\circ(x,Y) = inf_{y\in\ Y}\ \ d(x,y)$$

مثال ۱—۱.۵ :

$$d(۷,[۳,۶]) = ۱ \qquad\qquad d(۱,[۳,۶]) = ۲$$

تعریف ۱—۱.۶ : **تابع فاصله بین هر دو مجموعه نا تهی X و Y از M** به صورت زیر تعریف می شود:

$$D(X,Y) = sup_{x\in\ X}\ \ d_\circ(x,Y)$$

که در آن $d_\circ$ فاصله نقطه x از مجموعه Y را نشان می دهد .

مثال ۱—۱.۷ :

$D([۱,۷],[۳,٦]) = d_{\circ}(۱,[۳,٦]) = ۲$

تعریف ۱—۱.۸ :فرض کنیم X و Y دو زیرمجموعه غیر تهی از یک فضای متریک (M,d) باشند . آنگاه **فاصله هاسدورف دو مجموعه** X و Y که به صورت $d_H(X,Y)$ نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$H(X,Y) := d_H(X,Y) = max\{sup_{x\in X}\ inf_{y\in Y}\ d(x,y), sup_{y\in Y}\ inf_{x\in X}\ d(x,y)\}$

به عبارت دیگر ؛

$$d_H(X,Y) = max\{D(X,Y), D(Y,X)\}$$

تعریف ۱—۱.۹ : یک **تابع مجموعه ـ مقدا ر** یک تابع ازمجموعه X به مجموعه توانی مجموعه Y است . به عبارت دیگر تابعی مانند $\varphi : X \to ۲^Y$ یک تابع مجموعه مقدار است .

تعریف ۱—۱.۱۰ : فرض کنیم $\varphi : X \to ۲^X$ یک تابع مجموعه مقدار باشد. آنگاه $a \in X$ یک **نقطه ثابت** φ است اگر $a \in \varphi(a)$. واضح است که اگر $\varphi : X \to X$ یک تابع باشد ، به عبارتی به ازای هر $x \in X$ ، $\varphi(x)$ یک مجموعه تک نقطه ای باشد آنگاه مفهوم نقطه ثابت همان مفهوم متداول است یعنی $a \in X$ یک نقطه ثابت φ است اگر $\varphi(a) = a$.

تذکر ۱—۱۱.۱ :در اینجا یادآوری می کنیم که برای نگاشت $T : X \to X$ نمودار T عبارت است از مجموعه $\{(x, Tx) : x \in X\}$. وقتی می گوئیم نمودار T بسته است یعنی مجموعه فوق به عنوان زیر مجموعه ای از فضای حاصلضربی $X \times X$ بسته می باشد .

قضیه ۱—۱۲.۱ (قضیه‌نقطه ثابت کا کوتا نی [1] [۸]): فرض کنیم S یک زیر مجموعه محدب ، فشرده و نا تهی از فضای اقلیدسی R^n باشد.فرض کنیم $\varphi : S \to ۲^S$ یک تابع مجموعه ـمقدار روی S بایک گراف بسته و با این ویژگی باشد که $\varphi(x)$ برای هر $x \in S$ نا تهی و محدب است. در این صورت φ یک نقطه ثابت دارد.

مثال ۱—۱۳.۱ : فرض کنیم f یک تابع مجموعه ـمقدار باشد که روی $[۰, ۱]$ تعریف شده است و هر نقطه مانند x را به بازه‌ی بسته‌ی $[۱ - \frac{x}{۲}, ۱ - \frac{x}{۴}]$ می نگارد.در این صورت f در تمام فرضیات قضیه ۱ـ۱۱.۱ صدق کرده و لذا باید نقطه ثابت داشته باشد.
در نمودار زیر، هر نقطه روی خط ۴۵ درجه که با نمودار تابع، اشتراک دارد یک نقطه ثابت است. بنابراین در این مثال تعداد نامتناهی نقطه ثابت داریم.به طور نمونه،$x = ۰/۷۲$ یک نقطه ثابت است، چون

$$./۷۲ \in [۱ - \frac{./۷۲}{۲}, ۱ - \frac{./۷۲}{۴}]$$

---

[1] $Kakutani$

مثال ۱—۱۴.۱ : برای برقراری قضیه ۱ـ۱۱.۱، اینکه $\varphi(x)$ به ازای هر x محدب باشد، لازم است. به طور نمونه، تابع زیر را که روی $[۰,۱]$ تعریف شده است را در نظر می گیریم:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۴} & ۰ \leq x < ./۵ \\ \{\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴}\} & x = ./۵ \\ \frac{۱}{۴} & ./۵ < x \leq ۱ \end{cases}$$

این تابع هیچ نقطه ثابتی ندارد، اگر چه در دیگر فرضیا ت قضیه ۱ـ۱۱.۱ صدق می کند اما در $x = ./۵$ ، $\varphi(x)$ محدب نیست.

تعریف ۱—۱۵.۱ : یک **نگاشت انقباضی** یا به عبارت دیگر یک **انقباض** روی یک فضای متریک (M,d) ، یک تابع f از M به M است با این ویژ گی که

$$\exists \ \ k \in R, ۰ < k < ۱ \quad \text{و}\ \forall x, y \in M \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y).$$

تعریف ۱—۱۶.۱ :فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x_۰$ یک نقطه در X و $f : X \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ یک تابع حقیقی مقدار توسعه یافته باشد .در این صورت f را در $x_۰$

یک **تابع نیم پیوسته بالائی** گوئیم اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ یک همسایگی U از x_0 وجود داشته باشد به طوریکه $(x \in U) \quad f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$ ، به عبارت دیگر؛

$$limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

مثال ۱—۱.۱۷ : تابع f را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{1}{2} + (1 - x) & x > 1 \end{cases}$$

این تابع در $x = 1$ یک تابع نیم پیوسته بالائی است. زیرا؛

$$limsup_{x \to 1} f(x) \leq f(1) = 2$$

مثال ۱—۱.۱۸ : تابع زیر در $x = 0$ یک تابع نیم پیوسته بالائی است ، زیرا $limsup_{x \to 0} f(x) \leq 1$ (می دانیم $|\, sinx \,| \leq 1$)

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

توجه شود حد تابع از چپ و راست در صفر حتی وجود ندارد. لذا این تابع نه از راست و نه از چپ پیوسته است.

تعریف ۱—۱.۱۹ :فرض کنیم X یک فضای تو پو لو ژ یک باشد و x_0 یک نقطه در X و $f : X \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ یک تابع حقیقی مقدار توسعه یافته باشد.در این صورت

f را در $x_\circ$ یک **تابع نیم پیوسته پائینی** گوئیم اگر به ازای هر $\epsilon > \circ$ یک همسایگی U از $x_\circ$ وجود داشته باشد به طوریکه $f(x) \geq f(x_\circ) - \epsilon \quad (x \in U)$ ، به عبارت دیگر؛ $liminf_{x\to x_\circ} f(x) \geq f(x_\circ).$

مثال ۱—۱.۲۰ : تابع زیر در نقطه $x_\circ = \circ$ یک تابع نیم پیوسته بالائی است اما یک تابع نیم پیوسته پائینی نیست. زیرا که ؛

$$limsup_{x\to\circ} f(x) \leq f(x_\circ) = f(\circ) = ۱ \quad , \quad -۱ = liminf_{x\to\circ} f(x) \ngeq f(x_\circ) = ۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x < \circ \\ ۱ & x \geq \circ \end{cases}$$

تذکر ۱—۱.۲۱ : توجه شود که تابع مورد نظر در مثال ۱ـ۱.۱۶ از راست یا چپ پیوسته نیست ، زیرا حد از چپ برابر با ۱ و حد از راست برابر با $\frac{۱}{۲}$ است که هیچ یک برابر با مقدار تابع در $x = ۱$ نیستند. لذا با این مثال می توان تفاوت بین تابع نیم پیوسته بالائی (نیم پیوسته پائینی) را با تابع پیوسته‌از راست (پیوسته‌از چپ) درک نمود.

تذکر ۱—۱.۲۲ :از این پس $CB(M)$،$K(M)$،$C(M)$،$N(M)$ به ترتیب عبارتند از مجموعه تمام زیرمجموعه های ناتهی ، بسته ، فشرده ،بسته و کرانداراز M .

تعریف ۱—۱.۲۳ : نگاشت $T : M \to N(M)$ را در نظر می گیریم . به ازای $x \in M, b \in (\circ, ۱]$ تعریف می کنیم:

$$I_b^x = \{y \in Tx : bd(x,y) \leq d_\circ(x,Tx)\}.$$

فصل ۲

تعمیمی از قضایای نادلر و فنگ ـ لیو

در این فصل به چند قضیه مهم از جمله قضیه نادلر ، ریک ، میزوگوچی ـتاکاهاشی و... اشاره می کنیم .همچنین چند نتیجه از این قضایا در این فصل بیان می شود . در نهایت به‌ارائه چند مثال می پردازیم .

۲ـ۱ چند قضیه مهم

ابتدا به ذکر چند قضیه مهم در مبحث نقطه ثابت توابع مجموعه مقدار می پردازیم .

قضیه ۲ـ۱.۱ :(نادلر [۱][۱۲])

فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل باشد و $T : M \to CB(M)$. همچنین فرض می کنیم $c \in [\circ, \text{۱})$ وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $x, y \in M$:

[۱] $Nadler$

$$H(Tx,Ty) \leq c\ d(x,y). \qquad (۱)$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد.

قضیه ۲—۲.۱ :(ریک[۲] [۱۶])

فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل باشد و $T : M \to K(M)$ و نیز فرض کنیم نگاشت $\varphi : (۰,\infty) \to [۰,۱)$ وجود دارد به طوریکه

$$lim_{r\to t^+} sup\ \varphi(r) < ۱ \qquad (t \in (۰,\infty))$$

و

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) \quad (x,y \in M, x \neq y).$$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد.

قضیه ۲—۳.۱ :(میزوگوچی ـ تاکاهاشی[۳] [۱۰])

فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل باشد و $T : M \to CB(M)$ و نیز فرض کنیم نگاشت $\varphi : (۰,\infty) \to [۰,۱)$ وجود دارد به طوریکه

$$lim_{r\to t^+} sup\ \varphi(r) < ۱ \qquad (t \in [۰,\infty))$$

و

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) \quad (x,y \in M, x \neq y).$$

در این صورت T، یک نقطه ثابت دارد.

---

[۲] $Reich$

[۳] $Mizoguchi - Takahashi$

قضیه ۲—۱.۴ :(فنگ — لیو[۴][٦])

فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل باشد و $T : M \to C(M)$ و نیز فرض کنیم که شرایط زیر برقرار باشند:

(i) نگاشت $f : M \to R$ که $f(x) = d_\circ(x,Tx)$ به ازای هر $x \in M$ ، یک نگاشت نیم پیوسته پائینی است.

(ii) $b,c \in (\circ,۱)$ وجود دارند که $c < b$ و برای هر $x \in M$، $y \in I_b^x$ وجود دارد به طوریکه $d(y,Ty) \leq c\, d(x,y)$

در این صورت T، یک نقطه ثابت دارد.

۲—۲ نتایج

قضیه ۲—۲.۱ : فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل و $T : M \to C(M)$یک نگاشت مجموعه مقدار باشد و نیز فرض کنیم که شرایط زیر برقرار باشند:

(i) نگاشت $f : M \to R$ که $f(x) = d_\circ(x,Tx)$ به ازای هر $x \in M$ ،یک نگاشت نیم پیوسته پائینی است.

(ii) $b \in (\circ,۱)$ و $\varphi : [\circ,\infty) \to [\circ,b)$ وجود دارند به طوریکه؛

$$limsup_{r \to t^+}\ \varphi(r) < b \qquad (t \in [\circ,\infty)) \qquad (۲)$$

و

$$\forall\ x \in M, \exists\ y \in I_b^x \quad \ni \quad d(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y).$$

[۴] $Feng - Liu$

در این صورت T یک نقطه ثابت دارد.

برهان : به برهان خلف فرض می کنیم T هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد. بنابراین $d(x,Tx) > \circ (x \in M)$. با توجه به اینکه $Tx \in C(M)$ و $x \in M$، داریم :

$$\forall\, b \in (\circ, \text{۱}) \;\;,\;\; \forall\, x \in M \;\; \exists\, y \in Tx \quad \ni \quad y \in I_b^x$$

زیرا $Tx \in C(M)$ پس ناتهی است و لذا $d(x,Tx) \neq +\infty$ و نیز از طرفی

$d_\circ(x,Tx) = inf_{y \in Tx}\; d(x,y)$

لذا بنا به خاصیت مشخصه اینفیمم اگر $y = x$ آنگاه $x \in Tx$ که یک تناقض است ، زیرا فرض کردیم T هیچ نقطه ثابتی ندارد.بنابر این

$$\exists\, \alpha \in R \quad \ni \quad d(x,Tx) < \alpha < \tfrac{1}{b}\; d(x,Tx)$$

و در نتیجه

$$\exists y \in Tx \;\; \ni \;\; d_\circ(x,Tx) \leq d(x,y) \leq \tfrac{1}{b}\; d_\circ(x,Tx)$$

پس

$b\; d(x,y) \leq d_\circ(x,Tx)$

و از اینجا نتیجه می شود که ؛

$$\forall\, b \in (\circ, \text{۱}) \;\;, \forall\, x \in M \;\; \exists\, y \in Tx \quad \ni \quad y \neq x \;,\; b\; d(x,y) \leq d_\circ(x,Tx) \qquad (\text{۳})$$

حال φ و b را همانطور که در شرط (ii) بیان شد ، در نظر می گیریم و فرض می کنیم $x_\text{۱} \in M$ ثابت و دلخواه باشد. بنا به **(۳)** و (ii) ، $x_\text{۲} \in Tx_\text{۱}$ وجود دارد که $x_\text{۱} \neq x_\text{۲}$ و داریم :

$$b\; d(x_\text{۱}, x_\text{۲}) \leq d_\circ(x_\text{۱}, Tx_\text{۱}) \qquad (\text{۴})$$

و

$$d_\circ(x_\text{۲}, Tx_\text{۲}) \leq \varphi(d(x_\text{۱}, x_\text{۲}))d(x_\text{۱}, x_\text{۲}) \qquad , \qquad \varphi(d(x_\text{۱}, x_\text{۲})) < \; b \qquad (\text{۵})$$

از (۴) و (۵) بدست می آوریم :

$$d_0(x_1, Tx_1) - d_0(x_2, Tx_2) \geq b\ d(x_1, x_2) - \varphi(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)$$

$$= [b - \varphi(d(x_1, x_2))]d(x_1, x_2) > 0$$

همچنین برای x_2 ، $x_3 \in Tx_2$ وجود دارد که $x_2 \neq x_3$ و داریم :

$$b\ d(x_2, x_3) \leq d_0(x_2, Tx_2) \tag{6}$$

و

$$d_0(x_3, Tx_3) \leq \varphi(d(x_2, x_3))d(x_2, x_3) \qquad , \qquad \varphi(d(x_2, x_3)) < b \tag{7}$$

از (۶) و (۷) بدست می آوریم

$$d_0(x_2, Tx_2) - d_0(x_3, Tx_3) \geq b\ d(x_2, x_3) - \varphi(d(x_2, x_3))d(x_2, x_3)$$

$$= [b - \varphi(d(x_2, x_3))]d(x_2, x_3) > 0.$$

به علاوه از (۶) و (۵) داریم

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{1}{b}\ d_0(x_2, Tx_2) \leq \frac{1}{b}\ \varphi(d(x_1, x_2))\ d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2).$$

به استقراء ثابت می شود که برای هر $n > 1$، $x_{n+1} \in Tx_n$ وجود دارد به گونه ای که $x_n \neq x_{n+1}$ و

$$b\ d(x_n, x_{n+1}) \leq d_0(x_n, Tx_n) \tag{8}$$

و

$$d_0(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq \varphi(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \qquad , \qquad \varphi(d(x_n, x_{n+1})) < b \tag{9}$$

از (۸) و (۹) نتیجه می شود :

$$d_0(x_n, Tx_n) - d_0(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \geq b\ d(x_n, x_{n+1}) - \varphi(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1})$$

$$= [b - \varphi(d(x_n, x_{n+1}))]d(x_n, x_{n+1}) > 0 \tag{10}$$

و

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{b}\ d_0(x_n, Tx_n) \leq \frac{1}{b}\ \varphi(d(x_{n-1}, x_n))\ d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n) \tag{11}$$

حال‌از (۱۰) و (۱۱) نتیجه می شود که دنباله های $\{d(x_n, Tx_n)\}$ و $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ نزولی و از

پائین نیز کراندارند ،(توجه شود $d(x_n, x_{n+1}) > 0 \ , \ d(x_n, Tx_n) > 0$) ودر نتیجه همگرا می باشند.

حال بنا بر (۲) $q \in [0, b)$ وجود دارد به گونه ای که

$$limsup_{n\to\infty} \varphi(d(x_n, x_{n+1})) = q$$

بنابراین برای هر $b_0 \in (q, b)$ ، $n_0 \in N$ وجود دارد که

$$\varphi(d(x_n, x_{n+1})) < b_0 \qquad (n > n_0) \tag{۱۲}$$

در نتیجه بنا بر (۱۰) داریم

$$d_0(x_n, Tx_n) - d_0(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \geq \alpha\, d(x_n, x_{n+1}) \tag{۱۳}$$

که $\alpha = b - b_0$ و $n > n_0$.

به علاوه ، از (۸) ، (۹) و (۱۲) برای $n > n_0$ بدست می آوریم

$$d_1(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq \varphi\ (d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varphi(d(x_n,x_{n+1})}{b}\ d_0(x_n, Tx_n) \leq \cdots$$
$$\leq \frac{\varphi\ (d(x_n,x_{n+1}))\cdots\varphi\ (d(x_1,x_2))}{b^n}\ d_0(x_1, Tx_1) = \frac{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))\cdots\varphi(d(x_{n_0+1},x_{n_0+2}))}{b^{n-n_0}}\times$$
$$\frac{\varphi(d(x_{n_0},x_{n_0+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))}{b^{n_0}} d_0(x_1, Tx_1) < (\tfrac{b_0}{b})^{n-n_0} \frac{\varphi(d(x_{n_0},x_{n_0+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))}{b^{n_0}} d_0(x_1, Tx_1).$$

واضح است که $lim_{n\to\infty}\ (\frac{b_0}{b})^{n-n_0} = 0$ زیرا که $b_0 < b$. لذا؛

$$lim_{n\to\infty}\ d_0(x_n, Tx_n) = 0 \tag{۱۴}$$

حال فرض کنیم $m > n > n_0$ ، بنا به (۱۳) داریم :

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^{j=m-1} d(x_j, x_j + 1) \leq \frac{1}{\alpha}\ \sum_{j=n}^{j=m-1}(d_0(x_j, Tx_j) - d_0(x_{j+1}, Tx_{j+1}))$$
$$= \frac{1}{\alpha}(d_0(x_n, Tx_n) - d_0(x_m, Tx_m)).$$

و بنابر (۱۴)

$$lim_{n,\ m\to\infty}\ d(x_m, x_n) = 0$$

در نتیجه ثابت می شود که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است و چون (M, d) یک فضای متریک کامل است ، بنابراین دنباله مورد نظر ، همگراست. در نتیجه $x_0 \in M$ وجود دارد به گونه ای که

$x_n \to x_\circ$. حال بنا به شرط (i)

$$\circ \leq d_\circ(x_\circ, Tx_\circ) \leq lim_{n\to\infty} inf\ d_\circ(x_n, Tx_n) = \circ$$

بسته بودن $Tx_\circ$ نتیجه می دهد که $x_\circ \in Tx_\circ$ و لذا $x_\circ$ یک نقطه ثابت T است که این متناقض با این است که T هیچ نقطه ثابتی ندارد و لذافرض خلف باطل است . یعنی T دارای نقطه ثابت می باشد.

■

قضیه ۲–۲.۲ : فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل و $T : M \to K(M)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد و نیز فرض کنیم که شرایط زیر برقرار باشند :

(i) نگاشت $f : M \to R$ که $f(x) = d(x, Tx)$ به ازای هر $x \in M$ ، یک نگاشت نیم پیوسته پائینی است.

(ii) $\varphi : [\circ, \infty) \to [\circ, ۱)$ وجود دارد به طوریکه ؛

$$limsup_{r\to t^+}\ \varphi(r) < ۱ \qquad (t \in [\circ, \infty)) \qquad (۱۵)$$

و

$$\forall\ x \in M, \exists\ y \in I_۱^x \quad \ni \quad d(y, Ty) \leq \varphi(d(x,y)) d(x,y).$$

در این صورت T ، یک نقطه ثابت دارد.

برهان : به برهان خلف فرض می کنیم T هیچ نقطه ثابتی ندارد . بنابراین به ازای هر $x \in M$ ، $d_\circ(x, Tx) > \circ$. با توجه به اینکه $x \in M, Tx \in K(M)$ داریم :

$$\forall\ x \in M \qquad \exists\ y \in Tx \qquad \ni \qquad y \in I_۱^x$$

توجه شود که برهان مانند قضیه قبل می باشد .

اگر $y = x$ که $x \in Tx$ که یک تناقض است ، زیرا فرض کردیم T هیچ نقطه ثابتی ندارد . بنابراین

$$\forall\, x \in M \qquad \exists\, y \in Tx \qquad \ni \qquad y \neq x \ , \ d(x,y) \leq d(x,Tx) \ . \qquad (16)$$

حال φ را همانطور که در شرط (ii) بیان شد ، در نظر می گیریم و فرض می کنیم $x_1 \in M$ دلخواه و ثابت باشد . بنا به (۱۶) و (ii)، $x_2 \in Tx_1$ وجود دارد که $x_2 \neq x_1$ و داریم :

$$d(x_1,x_2) \leq d_0(x_1,Tx_1) \qquad (17)$$

و

$$d_0(x_2,Tx_2) \leq \varphi(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) \quad , \quad \varphi(d(x_1,x_2)) < 1 \qquad (18)$$

از (۱۷) و (۱۸) بدست می آوریم :

$$d_0(x_1,Tx_1) - d_0(x_2,Tx_2) \geq d(x_1,x_2) - \varphi(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) = [1-\varphi(d(x_1,x_2))]$$

$$d(x_1,x_2) > 0$$

همچنین برای x_2 ، $x_3 \in Tx_2$ وجود دارد که$x_3 \neq x_2$ و داریم :

$$d(x_2,x_3) \leq d_0(x_2,Tx_2) \qquad (19)$$

و

$$d_0(x_3,Tx_3) \leq \varphi(d(x_2,x_3))d(x_2,x_3) \quad , \quad \varphi(d(x_2,x_3)) < 1 \qquad (20)$$

از (۱۹) و (۲۰) بدست می آوریم

$$d_0(x_2,Tx_2) - d_0(x_3,Tx_3) \geq d(x_2,x_3) - \varphi(d(x_2,x_3))d(x_2,x_3) = [1-\varphi(d(x_2,x_3))]$$

$$d(x_2,x_3) > 0$$

به علاوه از (۱۹) و (۱۸) داریم

$$d(x_2,x_3) \leq d_0(x_2,Tx_2) \leq \varphi(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) < d(x_1,x_2).$$

به استقراء برای هر $n > 1$، $x_{n+1} \in Tx_n$ وجود دارد به گونه ای که $x_n \neq x_{n+1}$ و

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq d_0(x_n,Tx_n) \qquad (21)$$

و

$$d_0(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq \varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) \quad , \quad \varphi(d(x_n,x_{n+1})) < 1 \qquad (22)$$

از (۲۱) و (۲۲) بدست می آوریم :

$$d_\circ(x_n,Tx_n)-d_\circ(x_{n+1},Tx_{n+1})\geq d(x_n,x_{n+1})-\varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})$$

$$=[1-\varphi(d(x_n,x_{n+1}))]d(x_n,x_{n+1})>\circ \qquad (23)$$

و

$$d(x_n,x_{n+1})\leq d_\circ(x_n,Tx_n)\leq\varphi(d(x_{n-1},x_n))d(x_{n-1},x_n)<d(x_{n-1},x_n) \qquad (24)$$

از (۲۳) و (۲۴) نتیجه می شود که دنباله های $d(x_n,Tx_n)$ و $d(x_n,x_{n+1})$ نزولی و از پائین نیز کراندارند ولذا همگرا می باشند . (توجه شود که $d_\circ(x_n,Tx_n)>\circ \quad , \quad d(x_n,x_{n+1})>\circ$.)

حال از (۱۵) نتیجه می شود که $q\in[\circ,1)$ وجود دارد به گونه ای که

$$limsup_{n\to\infty}\,\varphi(d(x_n,x_{n+1}))=q$$

بنابراین برای هر $b_\circ\in(q,1)$ ، $n_\circ\in N$ وجود دارد که

$$\varphi(d(x_n,x_{n+1}))<b_\circ \qquad (n>n_\circ) \qquad (25)$$

لذا بنا بر (۲۳) داریم

$$d_\circ(x_n,Tx_n)-d_\circ(x_{n+1},Tx_{n+1})\geq\alpha d(x_n,x_{n+1}) \qquad (26)$$

که $\alpha=1-b_\circ$ و $n>n_\circ$.

به علاوه از (۲۲) ، (۲۱) و (۲۵) برای $n>n_\circ$ بدست می آوریم

$$d_\circ(x_{n+1},Tx_{n+1})\leq\varphi(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})\leq\varphi(d(x_n,x_{n+1}))d_\circ(x_n,Tx_n)\leq\cdots$$

$$\leq\varphi(d(x_n,x_{n+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))d_\circ(x_1,Tx_1)=[\varphi(d(x_n,x_{n+1}))\cdots\varphi(d(x_{n_\circ+1},x_{n_\circ+2}))]$$

$$\times[\varphi(d(x_{n_\circ},x_{n_\circ+1}\cdots\varphi(d(x_1,x_2))d_\circ(x_1,Tx_1)]<(b_\circ)^{n-n_\circ}\varphi(d(x_{n_\circ},x_{n_\circ+1}))\cdots\varphi(d(x_1,x_2))$$

$$d_\circ(x_1,Tx_1).$$

واضح است که $lim_{n\to\infty}(b_\circ)^{n-n_\circ}=\circ$ زیرا که $b_\circ<1$. لذا

$$lim_{n\to\infty}d_\circ(x_n,Tx_n)=\circ \qquad (27)$$

حال فرض کنیم $m>n>n_\circ$. بنا به (۲۶) داریم :