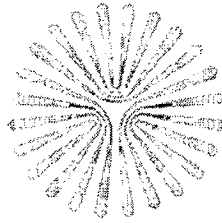


رسالة محمد

١٢٨٩١١



دانشگاه پیام نور استان فارس

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض
دانشکده علوم ریاضی

عنوان پایان نامه:

مشخصه سازی برای شبکه‌هایی که فاقد شرط DCC هستند.

استاد راهنما:

دکتر محبوبه حسین یزدی

استاد مشاور:

دکتر احمد خاکساری

نگارش:

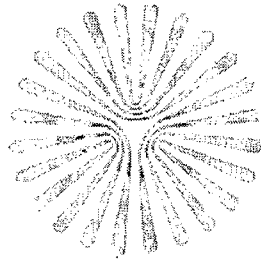
امین قنبرنژاد فرد جهرمی

خرداد ۱۳۸۸

۱۳۸۸/۰۹/۰۷

کتابخانه دانشگاه پیام نور
گیلان

۱۲۸۴۱۸



دانشگاه پیام نور استان فارس

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان مشخصه سازی برای شبکه‌های فاقد شرط *DCC* که توسط
امین قنبرنژاد فرد جهرمی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد
تأیید می باشد.


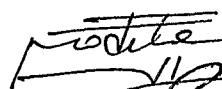
تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۳/۲۳

نمره: ۱۹٫۵

درجه ارزشیابی: *ب*

۱۳۸۸/۱۰/۷

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر محبوبه حسین یزدی	استاد راهنما	استادیار	
۲- دکتر احمد خاکساری	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر ناصر امیری	استاد داور	استادیار	
۴- دکتر حسین توللی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

تقدیم به

پیشگاه آفتاب امامت حضرت ولی عصر (عج) که همان در انتظار عدالت

اوست.

تقدیر و تشکر

سپاس لطف بیکران خدایی که قدرت نوشتن را به انسان آموخت و او را به همان قلمی که می‌نویسد، قسم داد. به او قوه ادراک بخشید و سپس از روح خود در آن دمید تا امانت‌دار بزرگترین اثر خلقتش در عالم ناسوت باشد و بیاموزد از گهواره تا گور، که لاجوتی شود.

ستایش او را که در این راه بزرگ من را یاری نمود تا توانستم گامی کوچک، اما مشتاق در راهی بردارم که او برایم گشوده بود.

بدینوسیله مراتب قدردانی و تشکر عمیق خود را از سرکار خانم **دکتر محبوبه حسین‌زوی** به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و مساعدت‌های گرانبهای ایشان در تهیه و تدوین این پایان‌نامه ابراز می‌دارم.

از استاد مشاور ارجمند جناب آقای **دکتر احمد خاکساری** که از شروع تا پایان جمع‌آوری مطالب مرا یاری نمودند و با دقت دست نوشته‌هایم را مطالعه و تصحیح کرده‌اند تشکر می‌نمایم.

از استاد محترم جناب آقای **دکتر امیری** که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل نمودند صمیمانه سپاس گذاری می‌نمایم.

از دوست عزیزم جناب آقای **معوود مصطفی‌زاد** که از هر گونه کمک به بنده دریغ نکرده اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در آخر از کلیه اساتیدی که در مراحل مختلف تحصیل از محضر ایشان کسب علم نموده‌ام تقدیر و تشکر را دارم.

فهرست مطالب

۲	چکیده
۳	مقدمه
۵	فصل اول: مقدمات و مفاهیم اولیه
۳۰	فصل دوم: نمایش عناصر در شبکه‌های متناهی
۴۰	فصل سوم: مشخصه سازی برای شبکه‌های فاقد شرط <i>DCC</i>
۴۱	بخش اول: شبکه دنباله‌ها
۴۳	بخش دوم: <i>CJ</i> -مشبکه
۵۰	واژه نامه
۵۴	مراجع

چکیده

عناصر تحویل ناپذیر الحاقی در شبکه‌ها نقش مهمی را ایفا می‌کنند. در بسیاری از شبکه‌ها هر عنصر آن را می‌توان به صورت سوپریممی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نمایش داد. در اینجا به دنبال جستجوی شبکه‌ای هستیم که عناصر آن را بتوان به صورت سوپریممی نامتناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت. یکی از این شبکه‌ها، شبکه دنباله‌هاست که ما آن را معرفی خواهیم کرد، سپس در فصل سوم به بیان مشخصه سازی شبکه‌هایی که در شرط DCC صدق نمی‌کنند می‌پردازیم.

مقدمه

مساله بهینه سازی روی زنجیر کراندار توسط نویسندگان زیادی ([۱۱], [۱۲]) مورد مطالعه قرار گرفته است. این مفاهیم روی شبکه‌های توزیع پذیر در [۶], [۸], [۹] توسعه پیدا کرده است. در [۶] الگوریتمی داده شده که در محاسبه مقدار مینیمم یک تابع هدف روی دستگاه نامعادلات کاربرد دارد. این الگوریتم در حالت کلی به مجموعه $J(a)$ بستگی دارد. این مجموعه، مجموعه همه عناصر تحویل ناپذیر الحاقی کمتر یا مساوی a می‌باشد. در مراجعی چون [۱], [۵] مشاهده می‌کنیم که هر عنصر از یک شبکه متناهی را می‌توان به صورت سوپریمی متناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت، اگر و تنها اگر در شرط DCC صدق کند. بعلاوه می‌توان شبکه‌ای پیدا کرد که در شرط DCC صدق نکند. بدیهی است شبکه‌هایی وجود دارد که نتوان کلیه عناصر آنها را به صورت سوپریمی متناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نمایش داد. در سال ۱۹۷۳ کراولی^۱ و دیلورت^۲ مشخصه‌ای برای شبکه‌های به طور فشرده تولید شده ارائه کردند که هر عنصر آن را بتوان به صورت سوپریمی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نمایش داد. در سال ۲۰۰۷ این شبکه‌ها در یکی از الگوریتم‌های مورد استفاده در بهینه سازی بر روی شبکه‌ها مورد استفاده قرار گرفتند [۱۰].

در اینجا می‌خواهیم شبکه دنباله‌های نامتناهی را معرفی کنیم. مشخص است که شبکه دنباله‌های نامتناهی به هیچ وجه در شرط DCC صدق نخواهد کرد، از این رو این شبکه حاوی عناصری خواهد بود که نتوان آنها را به صورت سوپریمی متناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت. در حقیقت شبکه دنباله‌ها حاوی عناصری است که می‌توان آنها را به صورت سوپریمی نامتناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت. مفاهیم بالا کلاسی از شبکه‌ها را معرفی می‌کنند که ما به دنبال آن هستیم.

در فصل اول به بیان پیش نیازها می‌پردازیم که در تنظیم آن سعی بر این بوده است که خواننده در ارتباط با موضوعات مورد بحث اطلاعات جامعی را کسب نماید به طوری که

Crawley^۱
Dilworth^۲

مطالعه مباحث بعدی پایان نامه سهل تر گردد.
در فصل دوم تعاریف و قضیه‌هایی در مورد شبکه‌های متناهی مطرح کرده و فصل سوم را با معرفی شبکه دنباله‌ها و بیان قضیه اصلی و اثبات آن، به پایان می‌رسانیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

این فصل به بیان پیش نیازها می‌پردازد و در تنظیم آن سعی بر آن بوده است که تمام تعاریف و قضایای ابتدایی لازم به همراه مثال‌های گوناگون ذکر شوند.

تعریف ۱.۱.

رابطه دو تایی R روی مجموعه P را یک ترتیب جزئی گویند اگر و تنها اگر R شامل خواص زیر باشد:

$$a \leq a \quad (\text{بازتابی}) \quad (۱)$$

$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b \quad (\text{نامتقارن}) \quad (۲)$$

$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{انتقالی}) \quad (۳)$$

معمولاً ترتیب جزئی را با علامت « \leq » نمایش می‌دهند. این علامت به معنی «کوچکتر یا مساوی» که در اعداد حقیقی به کار برده می‌شود نیست. اگر « \leq » یک ترتیب جزئی روی مجموعه P باشد، زوج مرتب $(P; \leq)$ را یک مجموعه جزئاً مرتب^۱ می‌نامند.

تعریف ۲.۱.

فرض کنید $(P; \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. اگر برای هر $x, y \in P$ داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$ ، آنگاه « \leq » را یک ترتیب کامل^۲ و $(P; \leq)$ را یک مجموعه مرتب کامل یا زنجیر^۳ می‌گویند.

نکته ۳.۱.

توجه کنید که برای هر دو عنصر در مجموعه‌ای جزئاً مرتب ضروری نیست که داشته باشیم

partially order set^۱
linear ordering^۲
chain^۳

یا $x \leq y$ یا $y \leq x$ ، یعنی ممکن است در یک مجموعه جزئاً مرتب دو عنصر x, y رابطه‌ای با یکدیگر نداشته باشند یا به عبارتی غیرقابل مقایسه^۴ باشند.

مثال ۴.۱.

(۱) فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی باشد. رابطه کوچکتر مساوی یا « \leq » یک ترتیب جزئی است. وارون این رابطه «بزرگتر مساوی» یا « \geq » نیز یک ترتیب جزئی است.

(۲) فرض کنیم $P(A) = 2^A$ مجموعه توانی مجموعه A باشد، رابطه « \subseteq » روی $P(A)$ یک ترتیب جزئی است، زیرا « \subseteq » دارای خواص بازتابی، نامتقارن و انتقالی می‌باشد.

(۳) اگر « $|$ » رابطه بخش پذیری باشد، $(\mathbb{Z}^+; |)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی است.

(۴) رابطه « $<$ » در \mathbb{Z}^+ یک ترتیب جزئی نیست، چون خاصیت بازتابی ندارد.

نکته ۵.۱.

در مجموعه با ترتیب جزئی $(P; \leq)$ گوئیم عضو $y \in P$ عضو $x \in P$ را می‌پوشاند^۵، اگر $x < y$ و هیچ عضوی مانند $z \in P$ بین آن دو وجود نداشته باشد به طوری که $x \leq z$ و $z \leq y$ یعنی

$$y \text{ covers } x \Leftrightarrow (x < y \ \& \ x \leq z \leq y \rightarrow x = z \vee y = z)$$

همچنین ترتیب جزئی \leq روی P را می‌توان به کمک نموداری به نام هاس^۶ نشان داد. در چنین نموداری هر عضو از مجموعه P به صورت یک دایره کوچک نشان داده می‌شود. دایره متناظر با $x \in P$ در زیر دایره متناظر با $y \in P$ قرار می‌گیرد، اگر $x < y$ و اگر y عضو

^۴ incomparable
^۵ to cover
^۶ hasse diagram

x را بپوشاند^۷، آنگاه بین x, y یک خط رسم می‌شود. اگر $x < y$ باشد ولی y عضو x را نپوشاند، آنگاه x, y مستقیماً بوسیله یک خط به هم متصل نمی‌شوند، بلکه بوسیله یک یا چند خط دیگر P که در بین x, y قرار می‌گیرند به هم متصل می‌گردند. زوج‌های مرتب شامل در \leq را می‌توان از روی نمودار هاس بدست آورد.

اگر $(P; \leq)$ یک مجموعه مرتب کامل باشد، نمودار آن متشکل از دایره‌هایی خواهد بود که یکی زیر دیگری قرار گرفته است، به همین دلیل مجموعه با ترتیب کامل را یک زنجیر می‌گویند.

تعریف ۶.۱.

$a \in A$ بزرگترین عضو A^{\wedge} خوانده می‌شود هرگاه $\forall x \in A : x \leq a$. کوچکترین عضو A^{\vee} خوانده می‌شود هرگاه $\forall x \in A : a \leq x$. بزرگترین عضو یک مجموعه مرتب جزئی را در صورت وجود با 1 نمایش داده و آن را عضو واحد می‌نامیم و کوچکترین عضو یک مجموعه جزئی مرتب را در صورت وجود با 0 نمایش داده و آن را عضو صفر می‌نامند.

نکته ۷.۱.

بزرگترین (کوچکترین) عضو $(P; \leq)$ کوچکترین (بزرگترین) عضو $(P; \geq)$ است.

مثال ۸.۱.

(۱) مجموعه Z^+ با ترتیب جزئی \leq دارای کوچکترین عضو صفر است، ولی بزرگترین عضو ندارد.

(۲) مجموعه Z با \leq بزرگترین و کوچکترین عضو ندارد.

y covers x ^۷
maximum^۸
minimum^۹

تعریف ۹.۱

فرض کنید $(P; \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $A \subseteq P$ باشد، عضوی مانند $x \in P$ را یک کرن بالا^{۱۰} برای زیرمجموعه A گویند، اگر برای همه عضوهای $a \in A$ داشته باشیم $a \leq x$. به طریق مشابه، عضوی مانند $x \in P$ را یک کرن پایین^{۱۱} برای زیرمجموعه A گویند، اگر برای همه عضوهای $a \in A$ داشته باشیم $x \leq a$.

نکته ۱۰.۱

کرن‌های بالا و پایین یک زیرمجموعه در صورت وجود، لزوماً منحصر به فرد نمی‌باشد.

تعریف ۱۱.۱

اگر A یک مجموعه مرتب جزئی باشد و B زیرمجموعه‌ای از آن باشد، عضو $a \in A$ را در صورت وجود کوچکترین کرن بالایی^{۱۲} برای B گوئیم، هرگاه a یک کرن بالایی B بوده و اگر a' نیز کرن بالایی B باشد، آنگاه $a \leq a'$ ، به طریق مشابه، $a \in A$ را در صورت وجود بزرگترین کرن پایینی^{۱۳} برای B گوئیم اگر a یک کرن پایینی برای B بوده و اگر a' نیز کرن پایینی برای B باشد، آنگاه $a' \leq a$.

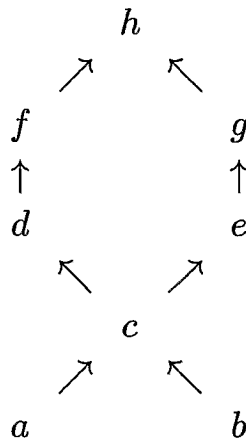
مثال ۱۲.۱

فرض کنید A یک مجموعه جزئی مرتب باشد که نمودارهای آن در شکل (۱) نمایش داده شده است و همچنین داشته باشیم

$$B_1 = \{a, b\}$$

$$B_2 = \{c, d, e\}$$

 upper bound^{۱۰}
lower bound^{۱۱}least upper bound(LUB)^{۱۲}greatest lower bound(GLB)^{۱۳}



شکل ۱

آنگاه

$$B_1 = \{ \text{کرانه‌های پایین} \}$$

$$B_1 = \{c, d, e, f, g, h\}$$

$$B_2 = \{ \text{کرانه‌های پایین} \}$$

$$B_2 = \{a, b, c\}$$

$$LUB(B_1) = c$$

$$LUB(B_2) = h$$

$$GLB(B_2) = \text{وجود ندارد}$$

$$GLB(B_2) = c$$

و $GLB(B_2)$ به این علت وجود ندارد که f, g غیرقابل مقایسه هستند.

نکته ۱۳.۱.

کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین برای زیر مجموعه B از مجموعه مرتب جزئی مرتب $\langle A; \leq \rangle$ در صورت وجود منحصر به فرد است.

تعریف ۱۴.۱.

یک شبکه^{۱۴} مجموعه‌ای است جزئاً مرتب مثل $(L; \leq)$ که در آن $\sup\{a, b\}$ و $\inf\{a, b\}$ برای هر $a, b \in L$ وجود داشته باشند.

قضیه ۱۵.۱.

مجموعه مرتب جزئی $(L; \leq)$ یک شبکه است اگر $\sup H$ و $\inf H$ برای هر زیرمجموعه متناهی غیر تهی H از L وجود داشته باشد.

برهان :

فرض کنیم که $(L; \leq)$ یک شبکه باشد. حکم با استفاده از تعریف مستقیم شبکه قابل اثبات است. اگر $H = \{a\}$ ، آنگاه بدیهی است که $\sup H = \inf H = \{a\}$. اگر $H = \{a, b, c\}$ باشد، برای اینکه نشان دهیم $\sup H$ وجود دارد، کافی است $d = \sup\{a, b\}$ و $e = \sup\{d, c\}$ بگیریم و ثابت کنیم که $e = \sup H$. داریم $a \leq d$ و $b \leq d$ و همچنین $d \leq e$ و $c \leq e$ ، بنابراین بنا به خاصیت تعدی $x \leq e$ برای هر $x \in H$. اگر f یک کران بالایی برای H باشد آنگاه $a \leq f$ و $b \leq f$ خواهد بود، بنابراین $d \leq f$ و همچنین ثابت می‌شود که $e \leq f$ ، پس برابر با سوپریمم H خواهد بود. اگر $H = \{a_0, \dots, a_n\}$ و $n \geq 1$ ، آنگاه بنا به استقرا

$$\sup\{\dots \sup\{\sup\{a_0, a_1\}, a_2\}, \dots, a_{n-1}\}$$

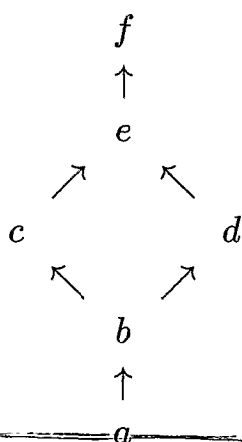
برابر با $\sup H$ می‌شود.

بنا به اصل دوگان براحتی وجود $\inf H$ ثابت می‌شود. \square

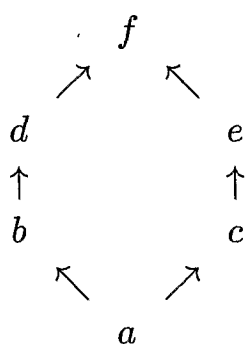
^{۱۴}lattice

مثال ۱۶.۱.

شکل (۲) شبکه هست ولی (۳) شبکه نیست چون $b \vee c$ و $d \wedge e$ وجود ندارند.



شکل ۲



شکل ۳

تعریف ۱۷.۱.

ساختمان جبری متشکل است از یک مجموعه غیر تهی مانند S و چندین عمل n تایی f_1, f_2, f_3, \dots بر روی S که به صورت $(S; f_1, f_2, f_3, \dots)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۸.۱.

فرض کنید $X = \{1, 2\}$ و $f: X \rightarrow X$ تابعی روی X باشد، در صورتی که S مجموعه توابع تعریف شده روی X باشد داریم:

$$S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

$$\begin{cases} f_1(1) = 1 \\ f_1(2) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(1) = 1 \\ f_2(2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(1) = 2 \\ f_3(2) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_4(1) = 2 \\ f_4(2) = 1 \end{cases}$$

آنگاه $(S; \circ)$ که در آن \circ ترکیب چپ توابع است، یک ساختمان جبری است که جدول ترکیب آن به صورت زیر خواهد بود.

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_4	f_2	f_1

حال چون تمام درایه‌های جدول، عضو S هستند پس $(S; \circ)$ یک ساختمان جبری است.

تعریف ۱۹.۱.

ساختمان جبری $(L; \vee, \wedge)$ یک شبکه است اگر L یک مجموعه غیر تهی باشد و \vee و \wedge دو

عمل دوتایی روی L باشند که هر دو \vee و \wedge دارای خواص زیر باشند

$$a \wedge a = a, \quad a \vee a = a \quad (\text{خودتوانی}) \quad (۴)$$

$$a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a \quad (\text{جابجایی}) \quad (۵)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad (\text{شرکت پذیری}) \quad (۶)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a \quad (\text{قانون جذب}) \quad (۷)$$

قضیه ۲۰.۱.

(۱) مجموعه مرتب جزئی $(L; \leq)$ یک شبکه می‌گیریم و قرار می‌دهیم $a \vee b = \sup\{a, b\}$ و $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ آنگاه ساختمان جبری $\mathcal{L}^a = (L; \wedge, \vee)$ یک شبکه است.

(۲) فرض کنیم که ساختمان جبری $\mathcal{L} = (L; \wedge, \vee)$ یک شبکه باشد و $a \leq b$. اگر $a \wedge b = a$ آنگاه $\mathcal{L}^P = (L; \leq)$ مجموعه جزئی مرتب است که شبکه نیز می‌باشد.

(۳) فرض کنیم مجموعه جزئی مرتب $\mathcal{L} = (L; \leq)$ شبکه باشد، آنگاه $\mathcal{L}^a = (L^a)^P$

(۴) اگر ساختمان جبری $\mathcal{L} = (L; \wedge, \vee)$ شبکه باشد، آنگاه $(\mathcal{L}^P)^a = \mathcal{L}$

برهان :

به مرجع (۳) مراجعه شود. □

تعریف ۲۱.۱.

مجموعه مرتب جزئی P در شرط DCC ^{۱۵} صدق می‌کند، هرگاه هر زیرمجموعه غیر تهی از P دارای کوچکترین عضو باشد.

نکته ۲۲.۱.

واضح است که اگر مجموعه جزئی مرتب P در شرط DCC صدق کند آنگاه همه زیر مجموعه‌های غیر تهی آن در این شرط صدق می‌کنند.

مثال ۲۳.۱.

(۱) هر مجموعه مرتب جزئی متناهی (و در نتیجه مشبکه متناهی) L در شرط DCC صدق می‌کند.

(۲) فرض کنیم N مجموعه همه اعداد طبیعی باشد، آنگاه N با رابطه ترتیب معمولی و رابطه بخش پذیری در شرط DCC صدق خواهد کرد.

(۳) اگر $L \cong \overbrace{N \times \dots \times N}^n$ و \leq رابطه ترتیب القا شده از ترتیب معمولی یا رابطه بخش پذیری روی N باشد، آنگاه L در شرط DCC صدق خواهد کرد.

تعریف ۲۴.۱.

فرض کنیم $(L; \leq)$ یک مشبکه باشد. در این صورت هر عنصر مینیمال غیر صفر از L را یک اتم^{۱۶} می‌نامیم، به عبارتی $a \in L$ را اتم می‌نامیم هرگاه از $b \leq a$ نتیجه شود که $b = 0$ یا $b = a$.

^{۱۵}Descending Chain Condition
^{۱۶}atom