بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور استان فارس

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض
دانشکده علوم ریاضی

عنوان پایان نامه:

مشخصه سازی برای مشبکه‌هایی که فاقد شرط DCC هستند.

استاد راهنما:

دکتر محبوبه حسین یزدی

استاد مشاور:

دکتر احمد خاکساری

نگارش:

امین قنبرنژاد فرد جهرمی

خرداد ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نور استان فارس

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان مشخصه سازی برای مشبکه‌های فاقد شرط DCC که توسط

امین قنبرنژاد فرد جهرمی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد

تأیید می باشد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۳/۲۳

نمره: ۱۹٫۵

درجه ارزشیابی: عالی

۱۳۸۸/۱۰/۷

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- **دکتر محبوبه حسین یزدی**	استاد راهنما	استادیار	
۲- **دکتر احمد خاکساری**	استاد مشاور	استادیار	
۳- **دکتر ناصر امیری**	استاد داور	استادیار	
۴- **دکتر حسین توللی**	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

تقدیم به

پیشگاه آفتاب امامت حضرت ولی عصر (عج) که جهان در انتظار عدالت

اوست.

تقدیر و تشکر

سپاس لطف بیکران خدایی که قدرت نوشتن را به انسان آموخت و او را به همان قلمی که می‌نویسد، قسم داد. به او قوه ادراک بخشید و سپس از روح خود در آن دمید تا امانت‌دار بزرگترین اثر خلقتش در عالم ناسوت باشد و بیاموزد از گهواره تا گور، که لاحوتی شود.

ستایش او را که در این راه بزرگ من را یاری نمود تا توانستم گامی کوچک، اما مشتاق در راهی بردارم که او برایم گشوده بود.

بدینوسیله مراتب قدردانی و تشکر عمیق خود را از سرکار خانم *دکتر محبوبه حسین یزدی* به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و مساعدت‌های گرانبهای ایشان در تهیه و تدوین این پایان‌نامه ابراز می‌دارم.

از استاد مشاور ارجمند جناب آقای *دکتر احمد خاکساری* که از شروع تا پایان جمع‌آوری مطالب مرا یاری نمودند و با دقت دست نوشته‌هایم را مطالعه و تصحیح کرده‌اند تشکر می‌نمایم.

از استاد محترم *جناب آقای دکتر امیری* که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل نمودند صمیمانه سپاس گذاری می‌نمایم.

از دوست عزیزم جناب آقای *مسعود مصلی نژاد* که از هر گونه کمک به بنده دریغ نکرده اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در آخر از کلیه اساتیدی که در مراحل مختلف تحصیل از محضر ایشان کسب علم نموده‌ام تقدیر و تشکر را دارم.

فهرست مطالب

چکیده ۲

مقدمه ۳

فصل اول: مقدمات و مفاهیم اولیه ۵

فصل دوم: نمایش عناصر در مشبکه‌های متناهی ۳۰

فصل سوم: مشخصه سازی برای مشبکه‌های فاقد شرط DCC ۴۰

بخش اول : مشبکه دنباله‌ها ۴۱

بخش دوم : CJ—مشبکه ۴۳

واژه نامه ۵۰

مراجع ۵۴

چکیده

عناصر تحویل ناپذیر الحاقی در مشبکه‌ها نقش مهمی را ایفا می‌کنند. در بسیاری از مشبکه‌ها هر عنصر آن را می توان به صورت سوپریممی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نمایش داد. در اینجا به دنبال جستجوی مشبکه‌ای هستیم که عناصر آن را بتوان به صورت سوپریممی نامتناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت. یکی از این مشبکه‌ها، مشبکه دنباله‌هاست که ما آن را معرفی خواهیم کرد، سپس در فصل سوم به بیان مشخصه سازی مشبکه‌هایی که در شرط DCC صدق نمی‌کنند می‌پردازیم.

مقدمه

مساله بهینه سازی روی زنجیر کراندار توسط نویسندگان زیادی ([۱۱] ,[۱۲]) مورد مطالعه قرار گرفته است. این مفاهیم روی مشبکه‌های توزیع پذیر در [٦] ,[۸] ,[۹] توسیع پیدا کرده است. در[٦] الگوریتمی داده شده که در محاسبه مقدار مینیمم یک تابع هدف روی دستگاه نامعادلات کاربرد دارد. این الگوریتم در حالت کلی به مجموعه $J(a)$ بستگی دارد. این مجموعه، مجموعه همه عناصر تحویل ناپذیر الحاقی کمتر یا مساوی a می‌باشد. در مراجعی چون [۱] ,[۵] مشاهده می کنیم که هر عنصر از یک مشبکه متناهی را می توان به صورت سوپرممی متناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت، اگر و تنها اگر در شرط DCC صدق کند. بعلاوه می توان مشبکه‌ای پیدا کرد که درشرط DCC صدق نکند. بدیهی است مشبکه‌هایی وجود دارد که نتوان کلیه عناصر آنها را به صورت سوپریممی متناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نمایش داد. در سال ۱۹۷۳ کراولی [۱] و دیلورث [۲] مشخصه‌ای برای مشبکه‌های به طور فشرده تولید شده ارائه کردند که هر عنصر آن را بتوان به صورت سوپریممی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نمایش داد. در سال ۲۰۰۷ این مشبکه‌ها در یکی از الگوریتم‌های مورد استفاده در بهینه سازی بر روی مشبکه‌ها مورد استفاده قرار گرفتند [۱۰].

در اینجا می‌خواهیم مشبکه دنباله‌های نامتناهی را معرفی کنیم . مشخص است که مشبکه دنباله‌های نامتناهی به هیچ وجه در شرط DCC صدق نخواهد کرد، از این رو این مشبکه حاوی عناصری خواهد بود که نتوان آنها را به صورت سوپریممی متناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت. در حقیقت مشبکه دنباله‌ها حاوی عناصری است که می‌توان آنها را به صورت سوپرممی نامتناهی از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی نوشت. مفاهیم بالا کلاسی از مشبکه‌ها را معرفی می‌کنند که ما به دنبال آن هستیم.

در فصل اول به بیان پیش نیازها می‌پردازیم که در تنظیم آن سعی بر این بوده است که خواننده در ارتباط با موضوعات مورد بحث اطلاعات جامعی را کسب نماید به طوری که

[۱] Crawley
[۲] Dilworth

مطالعه مباحث بعدی پایان نامه سهل تر گردد.

در فصل دوم تعاریف و قضیه‌هایی در مورد مشبکه‌های متناهی مطرح کرده و فصل سوم را با معرفی مشبکه دنباله‌ها و بیان قضیه اصلی و اثبات آن، به پایان می‌رسانیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

این فصل به بیان پیش نیازها می‌پردازد و در تنظیم آن سعی بر آن بوده است که تمام تعاریف و قضایای ابتدایی لازم به همراه مثال های گوناگون ذکر شوند.

تعریف ۱.۱.
رابطه دو تایی R روی مجموعه P را یک ترتیب جزئی گویند اگر و تنها اگر R شامل خواص زیر باشد:

$$a \leq a \quad \text{(بازتابی)} \tag{۱}$$

$$a \leq b \;,\; b \leq a \Rightarrow a = b \quad \text{(نامتقارن)} \tag{۲}$$

$$a \leq b \;,\; b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \text{(انتقالی)} \tag{۳}$$

معمولاً ترتیب جزئی را با علامت «$\leq$» نمایش می‌دهند. این علامت به معنی « کوچکتر یا مساوی » که در اعداد حقیقی به کار برده می شود نیست. اگر« $\leq$» یک ترتیب جزئی روی مجموعه P باشد، زوج مرتب $(P;\leq)$ رایک مجموعه جزئاً مرتب [۱] می‌نامند.

تعریف ۲.۱.
فرض کنید $(P;\leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. اگر برای هر $x,y \in P$ داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$، آنگاه «$\leq$» را یک ترتیب کامل [۲] و $(P;\leq)$ را یک مجموعه مرتب کامل یا زنجیر [۳] می گویند.

نکته ۳.۱.
توجه کنید که برای هر دو عنصر در مجموعه‌ای جزئاً مرتب ضروری نیست که داشته باشیم

[۱] partially order set
[۲] linear ordering
[۳] chain

$y \leq x$ یا $x \leq y$ ، یعنی ممکن است در یک مجموعه جزئاً مرتب دو عنصر x, y رابطه‌ای با یکدیگر نداشته باشند یا به عبارتی غیرقابل مقایسه [۴] باشند.

مثال ۱.۴.

(۱) فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی باشد. رابطه کوچکتر مساوی یا «$\leq$» یک ترتیب جزئی است. وارون این رابطه « بزرگتر مساوی » یا« $\geq$» نیز یک ترتیب جزئی است.

(۲) فرض کنیم $P(A) = ۲^A$ مجموعه توانی مجموعه A باشد، رابطه «$\subseteq$» روی $P(A)$ یک ترتیب جزئی است، زیرا «$\subseteq$» دارای خواص بازتابی، نامتقارن و انتقالی می‌باشد.

(۳) اگر« | » رابطه بخش پذیری باشد، $(Z^+; |)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی است.

(۴) رابطه «$<$» در Z^+ یک ترتیب جزئی نیست، چون خاصیت بازتابی ندارد.

نکته ۱.۵.

در مجموعه با ترتیب جزئی $(P; \leq)$ گوییم عضو $y \in P$ عضو $x \in P$ را می‌پوشاند[۵]، اگر $x < y$ و هیچ عضوی مانند $z \in P$ بین آن دو وجود نداشته باشد به طوری که $x \leq z$ و $z \leq y$ یعنی

$$y \;\; covers \;\; x \Leftrightarrow (x < y \;\; \& \;\; x \leq z \leq y \rightarrow x = z \vee y = y)$$

همچنین ترتیب جزئی $\leq$ روی P را می‌توان به کمک نموداری به نام هاس [۶] نشان داد. در چنین نموداری هر عضو از مجموعه P به صورت یک دایره کوچک نشان داده می‌شود. دایره متناظر با $x \in P$ در زیر دایره متناظر با $y \in P$ قرار می‌گیرد، اگر $x < y$ و اگر y عضو

[۴] incomparable
[۵] to cover
[۶] hasse diagram

x را بپوشاند[۷]، آنگاه بین x, y یک خط رسم می‌شود. اگر $x < y$ باشد ولی y عضو x را نپوشاند، آنگاه x, y مستقیماً بوسیله یک خط به هم متصل نمی‌شوند، بلکه بوسیله یک یا چند خط دیگر P که در بین x, y قرار می‌گیرند به هم متصل می‌گردند. زوج‌های مرتب شامل در $\leq$ را می توان از روی نمودار هاس بدست آورد.

اگر $(P; \leq)$ یک مجموعه مرتب کامل باشد، نمودار آن متشکل از دایره‌هایی خواهد بود که یکی زیر دیگری قرار گرفته است، به همین دلیل مجموعه با ترتیب کامل را یک زنجیر می‌گویند.

تعریف ۶.۱.

$a \in A$ بزرگترین عضو [۸] A خوانده می‌شود هر گاه $\forall x \in A : x \leq a$. $a \in A$ کوچکترین عضو[۹] A خوانده می‌شود هر گاه $\forall x \in A : a \leq x$. بزرگترین عضو یک مجموعه مرتب جزئی را در صورت وجود با ۱ نمایش داده و آن را عضو واحد می‌نامیم و کوچکترین عضو یک مجموعه جزئی مرتب را در صورت وجود را با o نمایش داده و آن را عضو صفر می‌نامند.

نکته ۷.۱.

بزرگترین (کوچکترین) عضو $(P; \leq)$ کوچکترین (بزرگترین) عضو $(P; \geq)$ است.

مثال ۸.۱.

(۱) مجموعه Z^+ با ترتیب جزئی $\leq$ دارای کوچکترین عضو صفر است، ولی بزرگترین عضو ندارد.

(۲) مجموعه Z با $\leq$ بزرگترین و کوچکترین عضو ندارد.

---

[۷] y covers x

[۸] maximum

[۹] minimum

تعریف ۹.۱
فرض کنید $(P;\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $A \subseteq P$ باشد، عضوی مانند $x \in P$ را یک کرن بالا [۱۰] برای زیرمجموعه A گویند، اگر برای همه عضوهای $a \in A$ داشته باشیم $a \leq x$. به طریق مشابه، عضوی مانند $x \in P$ را یک کران پایین[۱۱] برای زیرمجموعه A گویند، اگر برای همه عضو های $a \in A$ داشته باشیم $x \leq a$.

نکته ۱۰.۱
کران‌های بالا و پایین یک زیرمجموعه در صورت وجود، لزوماً منحصر به فرد نمی‌باشد.

تعریف ۱۱.۱
اگر A یک مجموعه مرتب جزئی باشد و B زیر مجموعه‌ای از آن باشد، عضو $a \in A$ را در صورت وجود کوچکترین کران بالایی [۱۲] برای B گوییم، هر گاه a یک کران بالایی B بوده و اگر a' نیز کران بالایی B باشد، آنگاه $a \leq a'$، به طریق مشابه، $a \in A$ را در صورت وجود بزرگترین کران پایین [۱۳] برای B گوییم اگر a یک کران پایین برای B بوده و اگر a' نیز کران پایینی برای B باشد، آنگاه $a' \leq a$.

مثال ۱۲.۱
فرض کنید A یک مجموعه جزئی مرتب باشد که نمودار هاس آن در شکل (۱) نمایش داده شده است و همچنین داشته باشیم

$$B_۱ = \{a,b\}$$

$$B_۲ = \{c,d,e\}$$

[۱۰] upper bound
[۱۱] lower bound
[۱۲] least upper bound(LUB)
[۱۳] greatest lower bound(GLB)

$$\begin{tikzcd}
 & h & \\
f \arrow[ur] & & g \arrow[ul] \\
d \arrow[u] & & e \arrow[u] \\
 & c \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
a \arrow[ur] & & b \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

شکل ۱

آنگاه

کرانه‌های پایین $B_1 = \{\ \}$

کرانه‌های بالایی $B_1 = \{c, d, e, f, g, h\}$

کرانه‌های پایین $B_2 = \{a, b, c\}$

کرانه‌های بالایی $B_2 = \{h\}$

$$LUB(B_1) = c$$

$$LUB(B_2) = h$$

$GLB(B_2) =$ وجود ندارد

$$GLB(B_2) = c$$

و $GLB(B_2)$ به این علت وجود ندارد که f, g غیرقابل مقایسه هستند.

نکته ۱.۱۳.

کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین برای زیر مجموعه B از مجموعه مرتب جزئی مرتب $< A; \leq >$ در صورت وجود منحصر به فرد است.

تعریف ۱.۱۴.

یک مشبکه [۱۴] مجموعه‌ای است جزئاً مرتب مثل $(L: \leq)$ که در آن $\sup\{a,b\}$ و $\inf\{a,b\}$ برای هر $a, b \in L$ وجود داشته باشند.

قضیه ۱.۱۵.

مجموعه مرتب جزئی $(L: \leq)$ یک مشبکه است اگر $\sup H$ و $\inf H$ برای هر زیرمجموعه متناهی غیر تهی H از L وجود داشته باشد.

برهان :

فرض کنیم که $(L; \leq)$ یک مشبکه باشد. حکم با استفاده از تعریف مستقیم مشبکه قابل اثبات است . اگر $H = \{a\}$ ، آنگاه بدیهی است که $\sup H = \inf H = \{a\}$. اگر $H = \{a, b, c\}$ باشد، برای اینکه نشان دهیم $\sup H$ وجود دارد، کافی است $d = \sup\{a, b\}$ و $e = \sup\{d, c\}$ بگیریم و ثابت کنیم که $e = \sup H$. داریم $a \leq d$ و $b \leq d$ و همچنین $d \leq e$ و $c \leq d$، بنابراین بنا به خاصیت تعدی $x \leq e$ برای هر $x \in H$. اگر f یک کران بالایی برای H باشد آنگاه $a \leq f$ و $b \leq f$ خواهد بود، بنابراین $d \leq f$ و همچنین ثابت می‌شود که $e \leq f$، پس e برابر با سوپریمم H خواهد بود. اگر $H = \{a_۰, \cdots, a_n\}$ و $n \geq ۱$، آنگاه بنا به استقرا

$$\sup\{\cdots \sup\{\sup\{a_۰, a_۱\}, a_۲\}, \cdots, a_{n-۱}\}$$

برابر با $\sup H$ می‌شود.

بنا به اصل دوگان براحتی وجود $\inf H$ ثابت می‌شود.□

[۱۴] lattice

مثال ۱.۱۶.
شکل (۲) مشبکه هست ولی (۳) مشبکه نیست چون $b \vee c$ و $d \wedge e$ وجود ندارند.

$$\begin{tikzcd}
& f & \\
& e \arrow[u] & \\
c \arrow[ur] & & d \arrow[ul] \\
& b \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& a \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۲

$$\begin{tikzcd}
& f & \\
d \arrow[ur] & & e \arrow[ul] \\
b \arrow[u] & & c \arrow[u] \\
& a \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۳

تعریف ۱.۱۷.
ساختمان جبری متشکل است از یک مجموعه غیر تهی مانند S و چندین عمل n تایی $f_۱, f_۲, f_۳, \cdots$ بر روی S که به صورت $(S; f_۱, f_۲, f_۳, \cdots)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱.۱۸.
فرض کنید $X = \{۱, ۲\}$ و $f : X \longrightarrow X$ تابعی روی X باشد، درصورتی که S مجموعه توابع تعریف شده روی X باشد داریم:

$$S = \{f_۱, f_۲, f_۳, f_۴\}$$

$$\begin{cases} f_۱(۱) = ۱ \\ f_۱(۲) = ۲ \end{cases} , \quad \begin{cases} f_۲(۱) = ۱ \\ f_۲(۲) = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_۳(۱) = ۲ \\ f_۳(۲) = ۲ \end{cases} , \quad \begin{cases} f_۴(۱) = ۲ \\ f_۴(۲) = ۱ \end{cases}$$

آنگاه $(S; \circ)$ که در آن $\circ$ ترکیب چپ توابع است، یک ساختمان جبری است که جدول ترکیب آن به صورت زیر خواهد بود.

$\circ$	$f_۱$	$f_۲$	$f_۳$	$f_۴$
$f_۱$	$f_۱$	$f_۲$	$f_۳$	$f_۴$
$f_۲$	$f_۲$	$f_۲$	$f_۲$	$f_۲$
$f_۳$	$f_۳$	$f_۳$	$f_۳$	$f_۳$
$f_۴$	$f_۴$	$f_۴$	$f_۲$	$f_۱$

حال چون تمام درایه‌های جدول، عضو S هستند پس $(S; \circ)$ یک ساختمان جبری است.

تعریف ۱.۱۹.
ساختمان جبری $(L; \vee, \wedge)$ یک مشبکه است اگر L یک مجموعه غیر تهی باشد و $\vee$ و $\wedge$ دو

عمل دوتایی روی L باشند که هر دو $\vee$ و $\wedge$ دارای خواص زیر باشند

$$a \wedge a = a \quad , \quad a \vee a = a \quad \text{(خودتوانی)} \qquad (۴)$$

$$a \wedge b = b \wedge a \quad , \quad a \vee b = b \vee b \quad \text{(جابجایی)} \qquad (۵)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad , \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad \text{(شرکت پذیری)} \qquad (٦)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad , \quad a \vee (a \wedge b) = a \quad \text{(قانون جذب)} \qquad (۷)$$

قضیه ۱.۲۰.

(۱) مجموعه مرتب جزئی $(L; \leq)$ یک مشبکه می‌گیریم و قرار می‌دهیم $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ و $a \vee b = \sup\{a, b\}$ آنگاه ساختمان جبری $\pounds^a = (L; \wedge, \vee)$ یک مشبکه است.

(۲) فرض کنیم که ساختمان جبری $\pounds = (L; \wedge, \vee)$ یک مشبکه باشد و $a \leq b$. اگر $a \wedge b = a$ آنگاه $\pounds^P = (L; \leq)$ مجموعه جزئی مرتب است که مشبکه نیز می‌باشد.

(۳) فرض کنیم مجموعه جزئی مرتب $\pounds = (L; \leq)$ مشبکه باشد، آنگاه $(\pounds^a)^P = \pounds$

(۴) اگر ساختمان جبری $\pounds = (L; \wedge, \vee)$ مشبکه باشد، آنگاه $(\pounds^p)^a = \pounds$

برهان :

به مرجع (۳) مراجعه شود.□

تعریف ۲۱.۱.

مجموعه مرتب جزئی P در شرط DCC[۱۵] صدق می‌کند، هر گاه هر زیرمجموعه غیر تهی از P دارای کوچکترین عضو باشد.

نکته ۲۲.۱.

واضح است که اگر مجموعه جزئی مرتب P در شرط DCC صدق کند آنگاه همه زیر مجموعه‌های غیر تهی آن در این شرط صدق می‌کنند.

مثال ۲۳.۱.

(۱) هر مجموعه مرتب جزئی متناهی (و در نتیجه مشبکه متناهی) L در شرط DCC صدق می‌کند.

(۲) فرض کنیم N مجموعه همه اعداد طبیعی باشد، آنگاه N با رابطه ترتیب معمولی و رابطه‌بخش پذیری در شرط DCC صدق خواهد کرد.

(۳) اگر $L \cong \overbrace{N \times \cdots \times N}^{n}$ و $\leq$ رابطه ترتیب القا شده از ترتیب معمولی یا رابطه بخش پذیری روی N باشد، آنگاه L در شرط DCC صدق خواهد کرد.

تعریف ۲۴.۱.

فرض کنیم $(L;\leq)$ یک مشبکه باشد. در این صورت هر عنصر مینیمال غیر صفر از L را یک اتم[۱۶] می‌نامیم، به عبارتی $a \in L$ را اتم می‌نامیم هر گاه از $b \leq a$ نتیجه شود که $b = 0$ یا $b = a$.

---

[۱۵] Desending Chain Condition

[۱۶] atom