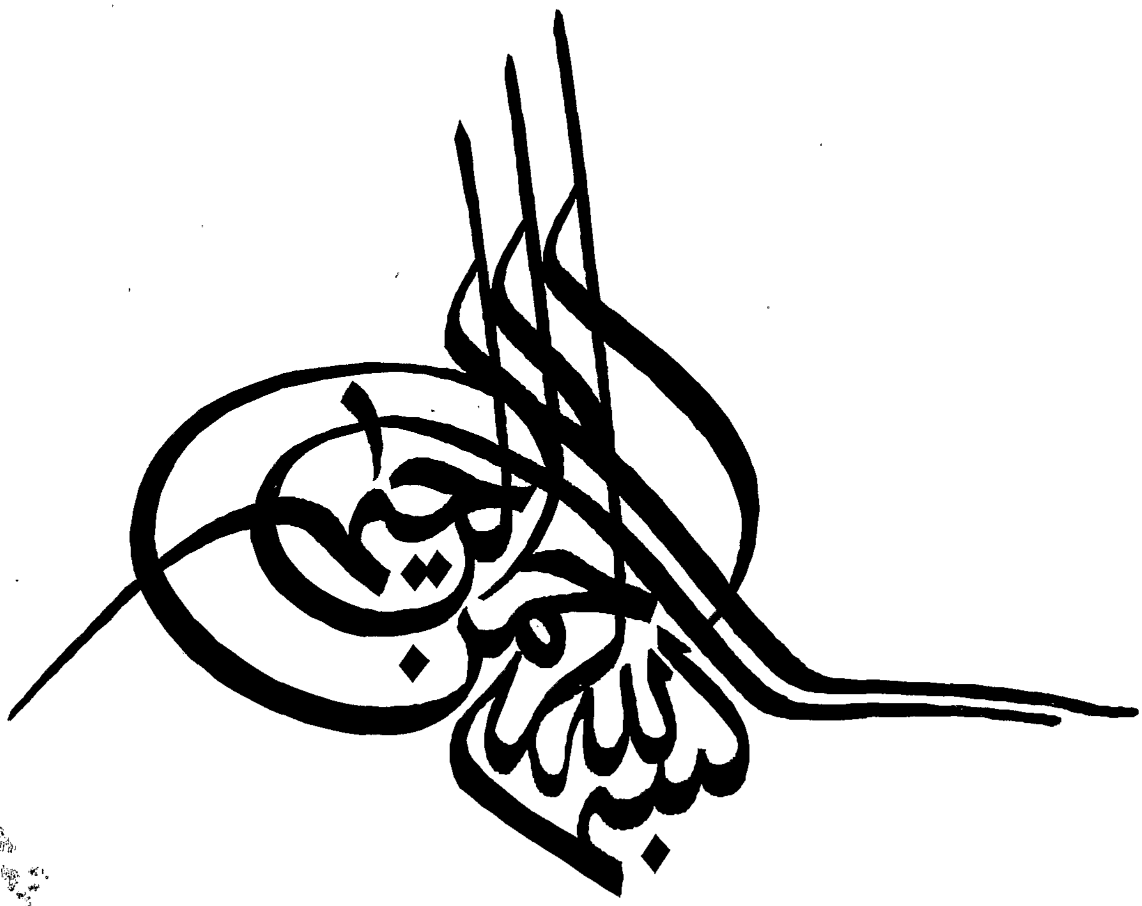
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

حلقه های پاک

استاد راهنما :

دکتر رضا نکویی

مؤلف :

مهدیه ابراهیم پور

آذر ماه ۱۳۸۶

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مهدیه ابراهیم پور

استاد راهنما : دکتررضا نکویی

داور ۱ : دکتراسفندیار اسلامی

داور ۲ : دکترسینا هدایت

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

با سپاس از خداوند منان

و تشکر و قدردانی از پدر و مادر مهربانم که همیشه و در همه جا پشتیبان من بوده اند . . .

و استاد ارجمندم دکتر نکویی که در تهیه و ارائهٔ این پایان نامه از راهنمایی های بی دریغ ایشان بهره برده ام.

چکیده

در ابتدا حلقهٔ یکدار پاک را تعریف می کنیم وپس از معرفی حلقه های یکدار نیم- تام، عملگرهای خطی روی فضای برداری با بعد شمارای نامتناهی، یکه- منظم وتبادل، بـه بررسـی پـاک بـودن ایـن حلقه ها می پردازیم. سپس مفهوم پاک بودن را در حلقه های نه لزوماً یکدار بیان کـرده وبعـضی از قضایای مربوطه را که قبلاً برای حلقه های یکدار اثبات شده اند به حلقه های نه لزوماً یکدار تعمـیم می دهیم. همچنین به بررسی پاک بـودن چنـد حلقـهٔ مـرتبط بـا یـک حلقـهٔ نـه لزومـاً یکـدار پـاک می پردازیم. مفهوم حلقهٔ نه لزوماً یکدار منحصراً پاک را بیان کرده وبه بررسی خواص ایـن نـوع از حلقه ها می پردازیم. در پایان حلقه های نیم- بولی را معرفـی کـرده وبـه بررسـی نـیم- بـولی بـودن بعضی از حلقه های مرتبط با یک حلقهٔ نیم- بولی می پردازیم. همچنین ارتباط حلقه های نیم- بولی را با حلقه های پاک و منحصراً پاک بررسی می کنیم.

مقدمه

در این پایان نامه، حلقه های یکدار را با R,S وحلقه های نه لزوماً یکدار را با B,A,K,L,I، رادیکال ژاکوبسون یک حلقه مانند I را با $J(I)$،گروه عناصر یکه در یک حلقهٔ یکدار مانند R را با $U(R)$و برای $n \geq 1$ حلقهٔ ماتریس ها وماتریس های بالا مثلثی $n \times n$روی حلقهٔ I را به ترتیب با $M_n(I)$ و $T_n(I)$نمایش می دهیم. حلقهٔ یکدار R را پاک گوییم هرگاه بتوان هر عضو آن را به شکل حاصل جمع یک عضو یکه ویک عضو خودتوان نوشت.

در فصل اول به بررسی حلقه های یکدار پاک می پردازیم که طی چهار بخش به ترتیبی که در زیر بیان می کنیم در مورد پاک بودن چند حلقهٔ یکداربحث خواهیم کرد.

در بخش اول که عمدتاً برگرفته از مرجع [8]می باشد حلقه های نیم- تام، در بخش دوم که برگرفته از مرجع [12]می باشد، حلقهٔ عملگرهای خطی روی فضای برداری با بعد شمارای نامتناهی و در بخش سوم که عمدتاً برگرفته از مراجع [2],[3]می باشد، حلقه های یکه- منظم را معرفی می کنیم. در انتهای هر یک از این سه بخش نشان می دهیم که حلقهٔ معرفی شده یک حلقهٔ یکدار پاک است. در بخش چهارم که عمدهٔ مطالب آن از مراجع [11],[16]گرفته شده حلقهٔ تبادل را معرفی کرده و نشان می دهیم که هر حلقهٔ پاک یک حلقهٔ تبادل است. در ضمن هر حلقهٔ تبادل که عناصرخودتوان آن مرکزی باشند، پاک می باشد.

حلقهٔ نه لزوماً یکدار I را پاک گوییم، هرگاه بتوان هر عضو I را به شکل حاصل جمع یک عضو خودتوان ویک عضو q نوشت که برای $p \in I$، $p+q+pq=0=q+p+qp$است. درفصل دوم که مطالب آن عمدتاً برگرفته از مرجع [15]می باشد، به بررسی حلقه های نه لزوماً یکدار پاک پرداخته که طی چهار بخش به ترتیب زیر این حلقه ها را بررسی می کنیم.

در بخش اول نشان می دهیم که تعریف حلقهٔ نه لزوماً یکدار پاک برای حلقه های یکدار با تعریف حلقهٔ یکدار پاک معادل است. در این بخش همچنین حلقهٔ نه لزوماً یکدار تبادل را تعریف کرده و نشان می دهیم که این تعریف نیز برای حلقه های یکدار با تعریفی که در فصل اول برای حلقه های تبادل یکدار آورده ایم، معادل است. سپس به تعمیم چند قضیه که قبلاً برای حلقه های یکدار اثبات شده اند، به حلقه های نه لزوماً یکدار می پردازیم.

در بخش دوم ابتدا شرایطی معادل با پاک بودن را برای حلقهٔ نه لزوماً یکدار I بیان کرده ونشان می دهیم که هر ایده آل از یک حلقهٔ پاک، پاک است. همچنین در این بخش نشان می دهیم، که اگر I حلقه ای نه لزوماً یکدار پاک باشد آنگاه برای هر $n \geq 1$، حلقهٔ $M_n(I)$ پاک است. در بخش سوم مفهوم حلقهٔ نه لزوماً یکدار منحصراً پاک را بیان کرده وبعضی از خواص این حلقه ها را بررسی می کنیم. در این بخش همچنین شرایطی معادل با منحصراً پاک بودن را بیان خواهیم کرد.

در بخش چهارم حلقه های نیم- بولی را معرفی کرده و نشان می دهیم که هر حلقهٔ منحصراً پاک نیم- بولی بوده و هر حلقهٔ نیم- بولی، پاک است. اما با یک مثال نشان می دهیم که عکس این مطالب حتی در حلقه های آرتینی درست نیست. در این بخش همچنین شرایطی معادل با نیم- بولی بودن را بیان خواهیم کرد.

فهرست مطالب

فصل اول: حلقه های یکدار پاک

فصل دوم: حلقه های نه لزوماً یکدار پاک

فصل اول

حلقه های یکدار پاک

در این فصل همهٔ حلقه ها را یکدار در نظر می گیریم. پس ازمعرفی حلقهٔ پاک، در چهار بخش به بررسی این مفهوم در چند حلقهٔ خاص می پردازیم. اگر R یک حلقه باشدآنگاه مجموعهٔ همهٔ یکه های R را با $U(R)$نمایش می دهیم.همچنین رادیکال ژاکوبسون حلقهٔ R رابا $J(R)$نمایش می دهیم.

۱.۱ حلقه های نیم - تام

تعریف ۱.۱.۱ عضو aدر حلقهٔ یکدار R پاک نامیده میشود هرگاه بتوان a رابصورت حاصل جمع یک یکه و یک خودتوان نوشت . همچنین حلقهٔ R را پاک گوییم هر گاه هر عضو آن پاک باشد.

به عنوان مثال بدیهی است که هر حلقهٔ تقسیمی و هر حلقهٔ موضعی پاک است.

تعریف ۲.۱.۱ حلقهٔ یکدار Rرا نیم - ساده گوییم هر گاه هر ایده آل چپ (راست) آن جمعوند مستقیمی از R باشد.

تعریف ۳.۱.۱ حلقهٔ R را نیم - موضعی گوییم هرگاه $\frac{R}{J(R)}$ نیم - ساده باشد.

تعریف ۴.۱.۱ حلقهٔ یکدار Rرا نیم - تام گوییم هرگاه Rنیم - موضعی باشدو خودتوان ها به پیمانهٔ $J(R)$صعود کنند، یعنی اگر $x^2 - x \in J(R)$ آنگاه $e^2 = e \in R$ موجود بوده به قسمی که $e - x \in J(R)$ باشد.

نکته ۵.۱.۱ برای حلقهٔ R و $e^2 = e \in R$ داریم $R \cong \begin{pmatrix} e\mathrm{Re} & eRf \\ f\mathrm{Re} & fRf \end{pmatrix}$،که درآن $f = 1 - e$ وحلقهٔ سمت راست را با جمع و ضرب معمولی ماتریس هادرنظر می گیریم.

برهان : تابع $h : R \to \begin{pmatrix} e\mathrm{Re} & eRf \\ f\mathrm{Re} & fRf \end{pmatrix}$ را با ضابطهٔ $h(r) = \begin{pmatrix} ere & erf \\ fre & frf \end{pmatrix}$، برای هر $r \in R$ درنظر می گیریم. بوضوح hیک همریختی حلقه ای است. همچنین برای هر $r \in R$؛ $r = ere + erf + fre + frf$ و لذا hیک به یک است. برای اثبات پوشایی h

عـــــــضو $\begin{pmatrix} eRe & eRf \\ fRe & fRf \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} er_1e & er_2f \\ fr_3e & fr_4f \end{pmatrix}$ را در نظـــــــر مــــــــی گیـــــــــریم.

چــــــــــــــون $h(er_1e) = \begin{pmatrix} er_1e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، $h(er_2f) = \begin{pmatrix} 0 & er_2f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، $h(fr_3e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ fr_3e & 0 \end{pmatrix}$

و $h(fr_4f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & fr_4f \end{pmatrix}$ ؛ لذا $h(er_1e + er_2f + fr_3e + fr_4f) = \begin{pmatrix} er_1e & er_2f \\ fr_3e & fr_4f \end{pmatrix}$. ■

لم ۶.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $e^2 = e \in R$ باشد. اگرحلقه های $eRe, (1-e)R(1-e)$ پـاک باشند، آنگاه R نیز پاک است.

برهان: گیریم $f = 1-e$ طبق نکتهٔ ۵.۱.۱کافیست ثابت کنیم حلقـهٔ $R' = \begin{pmatrix} eRe & eRf \\ fRe & fRf \end{pmatrix}$ پـاک است. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R'$ چون eRe پاک است، لذا $h^2 = h \in eRe$ و $u \in U(eRe)$ موجود است به قسمی که $a = h+u$.قرار دهید $u_1 = u^{-1}$. بوضوح $b - yu_1x \in fRf$. چون حلقهٔ fRf پاک است، لذا $g^2 = g \in fRf$ و $v \in U(fRf)$ موجود است به قسمیکه $b - yu_1x = g + v$.

حال قرار دهید $v_1 = v^{-1}$.

بنــــا بـــــر ایـــــن $A = \begin{pmatrix} h+u & x \\ y & g+v+yu_1x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & x \\ y & g+v+yu_1x \end{pmatrix}$، کـــــه در آن $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ خودتوان است. لذاکافیست نشان دهیم $\begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{pmatrix}$ در R' یکه است.داریم

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & -u_1x \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & x \\ 0 & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & -u_1x \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

به سادگی دیده می شود که $\begin{pmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e & -u_1x \\ 0 & f \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ به ترتیب دارای معکوسهای $\begin{pmatrix} e & 0 \\ yu_1 & f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e & u_1x \\ 0 & f \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix}$ می باشند ولذادر R' یکه هستند.بنابراین $\begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{pmatrix}$

در R' یکه بوده و در نتیجه A در R' پاک است. ■

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $e_1, e_2, ..., e_n$ خودتوان هایی متعامد(یعنی $e_i e_j = 0$ برای هر $i \neq j$) در R باشندبقسمیکه $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$. اگرحلقهٔ $e_i \mathrm{R} e_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ، پاک باشد آنگاه R نیز پاک است.

برهان : با استقرا روی n قضیه را ثابت می کنیم.

طبق لم ۶.۱.۱، قضیه برای $n = 2$ برقرار است. فرض می کنیم قضیه برای $n = k$ درست باشد. نشان می دهیم قضیه برای $n = k + 1$ نیزدرست است. گیریم $1 = e_1 + e_2 + ... + e_k + e_{k+1}$ که برای هر i، $1 \leq i \leq k+1$، $e_i^2 = e_i$ و $e_i e_j = 0$ برای هر $i \neq j$، قرار دهید $f_i = 1 - e_i$ ؛ $1 \leq i \leq k+1$. چون $1 - e_{k+1} = e_1 + e_2 + ... + e_k$، داریم $f_{k+1} = f_{k+1} e_1 f_{k+1} + f_{k+1} e_2 f_{k+1} + ... + f_{k+1} e_k f_{k+1}$. حال از آنجا که برای i، $1 \leq i \leq k$، $f_{k+1} e_i f_{k+1}$ ها عناصر خود توان متعامدی در حلقهٔ $f_{k+1} R f_{k+1}$ هستندوحلقهٔ $(f_{k+1} e_i f_{k+1}) f_{k+1} R f_{k+1} (f_{k+1} e_i f_{k+1})$ همان حلقهٔ $e_i \mathrm{R} e_i$ است، که طبق فرض پاک است، لذا بنا به فرض استقرا حلقهٔ $f_{k+1} R f_{k+1}$ نیزپاک است. همچنین طبق فرض حلقهٔ $e_{k+1} \mathrm{R} e_{k+1}$ نیز پاک است. حال بنا بر لم ۶.۱.۱، R پاک است. ■

تعریف ۸.۱.۱ گوییم عضو خود توان e در حلقهٔ R موضعی است، هرگاه حلقهٔ $e\mathrm{R}e$ موضعی باشد.

قضیه ۹.۱.۱ حلقهٔ R نیم - تام است اگر وتنها اگرخود توانهای متعامد موضعی $e_1, e_2, ..., e_n$ در R موجودباشند بقسمیکه $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$.

برهان: [۹، قضیهٔ ۲۳.۶]. ■

قضیه ۱۰.۱.۱ هر حلقهٔ نیم - تام پاک است.

برهان: فرض کنیم R حلقه ای نیم - تام باشد. طبق قضیهٔ قبل خود توانهای متعامد موضعی $e_1, e_2, ..., e_n$ در R موجودند بقسمیکه $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$. بوضوح هرحلقهٔ موضعی پاک است، لذا برای هر $i, 1 \le i \le n$، $e_i \operatorname{Re}_i$ پاک است. بنابراین طبق قضیهٔ ۱.۱.۷، R پاک خواهد بود. ■

۲.۱ حلقهٔ عملگرهای خطی روی فضای برداری با بعد شمارای نا متناهی

فضای برداری V از بعد شمارای نامتناهی روی حلقهٔ تقسیمی D رادر نظر می گیریم. در این بخش به بررسی پاک بودن حلقهٔ $end(V_D)$ می پردازیم.

لم ۱.۲.۱ فرض کنید $\{x_1, x_2, ...\}$ یک پایه برای V_D باشد. عملگر خطی $\sigma : V \to V$ که برای هر $i, i \ge 1$, بصورت $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ تعریف می شود در حلقهٔ $end(V_D)$ پاک است .

برهان : $\pi \in end(V_D)$ رابه صورت زیرتعریف می کنیم

$\pi(x_1) = x_1 + x_2 , \pi(x_2) = 0$ و برای هر $k \ge 1$، $\pi(x_{2k+1}) = x_{2k} + x_{2k+2}$

و $\pi(x_{4k}) = x_{4k} + x_2$ و $\pi(x_{4k+2}) = x_{4k+2} - x_2$.

ابتدانشان می دهیم که π خود توان است.

$\pi^2(x_1) = \pi(x_1 + x_2) = \pi(x_1)$ و $\pi^2(x_2) = \pi(0) = 0 = \pi(x_2)$ برای $K = 1$ داریم

$$\pi^2(x_{2k+1}) = \pi(x_{2k} + x_{2k+2}) = \pi(x_2 + x_4) = \pi(x_4) = x_4 + x_2 = \pi(x_3) = \pi(x_{2k+1}).$$

برای $k = 2k', (k' \ge 1)$, داریم

$$\pi^2(x_{2k+1}) = \pi(x_{2k} + x_{2k+2}) = \pi(x_{4k'} + x_{4k'+2}) = (x_{4k'} + x_2) + (x_{4k'+2} - x_2) = x_{4k'} + x_{4k'+2}$$

$$= x_{2k} + x_{2k+2} = \pi(x_{2k+1}).$$

برای $k = 2k' + 1$, $(k' \geq 1)$, داریم

$$\pi^2(x_{2k+1}) = \pi(x_{2k} + x_{2k+2}) = \pi(x_{4k'+2} + x_{4k'+4}) = \pi(x_{4k'+2} + x_{4(k'+1)}) = (x_{4k'+2} - x_2) +$$

$$x_{4(k'+1)} + x_2 = x_{4k'+2} + x_{4k'+4} = x_{2k} + x_{2k+2} = \pi(x_{2k+1}).$$

برای $k \geq 1$ داریم

$$\pi^2(x_{4k}) = \pi(x_{4k} + x_2) = \pi(x_{4k}) + 0 = x_{4k} + x_2 = \pi(x_{4k}),$$

$$\pi^2(x_{4k+2}) = \pi(x_{4k+2} - x_2) = \pi(x_{4k+2}) - 0 = x_{4k+2} - x_2 = \pi(x_{4k+2}).$$

لذا برای هر $i \geq 1$, $\pi^2(x_i) = \pi(x_i)$. بنابراین π در $end(V_D)$ خود توان است .حال نشان می دهیم که $\pi - \sigma$ یکه است .ابتدا ثابت می کنیم $\sigma - \pi$ پوشاست.

$$(\sigma - \pi)(x_1) = x_2 - (x_1 + x_2) = -x_1 \qquad (۱)$$

$$(\sigma - \pi)(x_2) = x_3 - 0 = x_3 \qquad (۲)$$

$$(\sigma - \pi)(x_{2k+1}) = x_{2k+2} - (x_{2k} + x_{2k+2}) = -x_{2k}; k \geq 1 \qquad (۳)$$

$$(\sigma - \pi)(x_{4k}) = x_{4k+1} - x_{4k} - x_2; k \geq 1 \qquad (۴)$$

$$(\sigma - \pi)(x_{4k+2}) = x_{4k+3} - x_{4k+2} + x_2; k \geq 1 \qquad (۵)$$

(۳)نشان می دهد که همهٔ x_iها با i زوج در برد $\sigma-\pi$ قراردارند. با استفاده از این مطلب و(۴)و (۵)، x_{4k+1} و x_{4k+3} نیز برای هر $k\geq 1$، در داخل برد $\sigma-\pi$ قرار دارند. طبق(۱) و (۲) x_1 و x_3 هم در برد $\sigma-\pi$ قرار دارند ولذا $\sigma-\pi$ پوشاست. حال ثابت می کنیم $\sigma-\pi$ یک به یک است .فرض کنیم برای، $a_i\in D$، $(\sigma-\pi)(x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n)=0$. (۱) نشان می دهد که ضریب x_1 برابر $-a_1$ است. ضریب x_2 طبق (۳) و(۴) و(۵) برابراست با $-a_3-a_4+a_6-a_8+a_{10}-...\pm a_t$، اگر $n\geq 4$ زوج باشد، $t=n$ واگر $n\geq 5$ فرد باشد، $t=n-1$، برای $n=1,2,3$، بدیهی است. (۲) و(۴) و (۵) نشان می دهند که ضریب x_{2k+1} برای $k\geq 1$، برابر a_{2k} است. حال نشان می دهیم که ضریب x_{2k+2} برای هر $k\geq 1$، برابر $-a_{2k+2}-a_{2k+3}$ است. برای $k=1$ با توجه به(۳)و (۴) ضریب x_4 برابر است با $-a_5-a_4$.برای $k'\geq 1, k=2k'$, ضریب $x_{4k'+2}$ طبق (۳) و (۵) برابر است با $-a_{4k'+2}-a_{4k'+3}=-a_{2k+2}-a_{2k+3}$.

برای $k'\geq 1, k=2k'+1$, ضریب $x_{4k'+4}=x_{4(k'+1)}$ طبق (۳)و (۴) برابر است با $-a_{4(k'+1)}-a_{4k'+4+1}=-a_{2k+2}-a_{2k+3}$. با توجه به استقلال خطی x_iها $a_1=0$ وبرای $k\geq 1$؛ $a_{2k}=0$ و $a_3=0$. همچنین $a_{2k+3}=0$. بنابراین برای هر $a_i=0, i\geq 1$ بوده و لذا $\sigma-\pi$ یک به یک است. پس $\sigma-\pi$ در $end(V_D)$ یکه است ولذا $\sigma=\pi+(\sigma-\pi)$ درحلقهٔ $end(V_D)$ پاک است. ■

لم ۲.۲.۱ فرض کنید R یک حلقهٔ یکدارپاک باشد.برای هر $n\geq 1$، $M_n(R)$ پاک است.

برهان: گیریم $R'=M_n(R)$.برای، $1\leq i\leq n$، گیریم $e_i\in R'$،ماتریسی باشد که درایهٔ سطر i و

ستون i آن یک وبقیهٔ درایه ها صفرند. بدیهی است که e_iها خودتوان های متعامدی هستند و $e_1+e_2+\ldots+e_n=1$. R پاک است وبرای هر $1\le i\le n$، $R\cong e_i\,\mathrm{Re}_i$.لذا طبق قضیهٔ ۷.۱.۱ R' پاک است.■

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید V_D یک فضای برداری از بعد متناهی روی حلقهٔ تقسیمی D باشد. آنگاه حلقهٔ $end(V_D)$ پاک است.

برهان: فرض کنیم بعد Vبرابر n و $\beta=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ پایهٔ مرتبی برای Vباشد. می دانیم که هر حلقهٔ تقسیمی پاک است، لذا طبق لم ۲.۲.۱حلقهٔ $M_n(D)$ پاک است. حال یکریختی $\phi:end(V_D)\to M_n(D)$ را با ضابطهٔ $\phi(f)=[f]_\beta$ برای هر $f\in end(V_D)$ در نظر می گیریم.

چون $M_n(D)$ پاک است ،لذا $end(V_D)$ نیز پاک است. ■

لم ۴.۲.۱ اگر $\alpha\in end(V_D)$ و $y\in V$ بقسمی باشند که V توسط $\{y,\alpha(y),\alpha^2(y),\ldots\}$ تولید شود، آنگاه α پاک است.

برهان : لم برای $V=0$ بدیهی است. لذا فرض می کنیم $V\ne 0$.ابتدا نشان می دهیم اگر برای هر $n\ge 1$، $\alpha^n(y)\notin yD+\alpha(y)D+\ldots+\alpha^{n-1}(y)D$ آنگاه $\{y,\alpha(y),\alpha^2(y),\ldots\}$ پایه ای برای Vاست. فرض کنیم $r_0,r_1,\ldots,r_n$ در D بقسمی باشند که $yr_0+\alpha(y)r_1+\ldots+\alpha^n(y)r_n=0$. اگر $r_n\ne 0$ آنگاه

$$\alpha^n(y)=y(-r_n^{-1}r_0)+\alpha(y)(-r_n^{-1}r_1)+\ldots+\alpha^{n-1}(y)(-r_n^{-1}r_{n-1})\in yD+\ldots+\alpha^{n-1}(y)D.$$

که تناقض است. لذا $r_n = 0$.بطور مشابه $r_1 = 0 ,r_2,...,r_{n-1}$. اما اگر $r_0 \neq 0$ آنگاه $yr_0 = 0$ نتیجه می دهد $y = 0$ ولذا $V = 0$،که تناقض است. در نتیجه $\{y,\alpha(y),...\}$ پایه ای برای V است.

بنابراین طبق لم ۱.۲.۱ , α در $end(V_D)$ پاک است. حال فرض کنیم $n \geq 1$ موجود باشد بقسمیکه $\alpha^n(y) \in yD + \alpha(y)D + ... + \alpha^{n-1}(y)D$ و n با این خاصیت کمین باشد.ادعا می کنیم که $A = \{y.\alpha(y),...,\alpha^{n-1}(y)\}$ پایه ای برای V_D است. بدلیل کمین بودن n با برهانی مشابه قسمت قبل می توان دید که این مجموعه مستقل خطی است. حال نشان می دهیم A یک مجموعهٔ مولد برای V است. چون $r_0, r_1,...,r_{n-1} \in D$ موجودندبقسمیکه

$\alpha^n(y) = yr_0 + \alpha(y)r_1 + ... + \alpha^{n-1}(y)r_{n-1}$، لذا

$$\alpha^{n+1}(y) = \alpha(y)r_0 + \alpha^2(y)r_1 + ... + \alpha^{n-1}(y)r_{n-2} + \alpha^n(y)r_{n-1} \ .$$

بطور مشابه برای هر $i \geq 2$، $\alpha^{n+i}(y)$ ترکیب خطی از $y,\alpha(y),...,\alpha^{n-1}(y)$ است و چون $\{y,\alpha(y),\alpha^2(y),...\}$ مجموعهٔمولدی برای V_D بود لذا $\{y,\alpha(y),...,\alpha^{n-1}(y)\}$ نیز یک مجموعهٔمولد V_D است. بنابراین A یک پایه برای V بوده و طبق قضیهٔ ۳.۲.۱، حلقهٔ $end(V_D)$ پاک است. پس α نیز پاک است. ■

لم ۵.۲.۱ فرض کنیم $\alpha \in end(V_D)$ و U زیرفضایی α- پایا از V باشد.گیریم $y \in V \setminus U$ بقسمی باشد که $V = U + K$ که در آن $K = yD + \alpha(y)D + ...$. اگر تحدید α به U در $end(U)$ پاک باشد، آنگاه α در $end(V)$ پاک است. به عبارت دیگر اگر $\alpha|_U = \pi + \sigma$ که در آن $\pi^2 = \pi$ و σ در $end(U)$ یکه است، آنگاه $\alpha = \varphi + \tau$ که $\varphi^2 = \varphi \in end(V)$ و τ در

$end(V)$ یکه است به قسمی که $\tau|_U=\sigma, \varphi|_U=\pi$.

برهان : پایه ای مانند B برای U در نظر گرفته و y را به B اضافه می کنیم. حاصل زیرمجموعه ای مستقل خطی از V است، زیرا اگر برای $r_0, r_1, ..., r_n$ متعلق به D، $yr_0+x_1r_1+x_2r_2+...+x_nr_n=0$ که در آن برای $x_i \in B, 1\le i\le n$. اگر $r_0\neq 0$ آنگاه $y\in U$ که تناقض است. لذا $r_0=0$. بقیهٔ r_i ها هم که بدلیل مستقل خطی بودن x_i ها صفرند.

حال $B\cup\{y\}$ را به پایه ای مثل W برای V گسترش می دهیم. گیریم $M=<W\setminus B>$. بوضوح M زیرفضایی از V شامل y است و $V=M\oplus U$. فضای برداری $\frac{V}{U}$ را در نظر گرفته واعضای آنرا با $\bar{v}=v+U$ که $v\in V$ نمایش می دهیم. حال نگاشت $\tilde{\alpha}:\frac{V}{U}\to\frac{V}{U}$ را با ضابطهٔ $\tilde{\alpha}(\bar{v})=\overline{\alpha(v)}$ درنظر می گیریم. فرض کنیم $v_1-v_2\in U$ باشد. چون U، α-پایاست لذا $\alpha(v_1-v_2)=\alpha(v_1)-\alpha(v_2)\in U$. بنابراین $\tilde{\alpha}$ خوشتعریف است. به سادگی می توان دید که برای هر $n\ge 1$ وهر $v\in V$ ، $\tilde{\alpha}^n(\bar{v})=\overline{\alpha^n(v)}$.

$\theta\in end(V)$ را برای $m\in M$ $u\in U$ با ضابطهٔ $\theta(m+u)=m$ در نظر می گیریم. بداهتاً $\theta(V)=M$ و $\ker\theta=U$. حال نگاشت $\theta_0:\frac{V}{U}\to M$ را با ضابطهٔ $\theta_0(\bar{v})=\theta(v)$ تعریف می کنیم. اگر $v_1-v_2\in U=\ker\theta$ آنگاه $\theta(v_1)=\theta(v_2)$ ولذا θ_0 خوشتعریف است. اما اگر $v\in\ker\theta=U$ آنگاه $\bar{v}=0$ ولذا θ_0 یک به یک است. از طرفی برای هر $m\in M$، $\theta_0(\overline{m})=\theta(m)=m$، پس θ_0 پوشاست. بنابراین θ_0 یکریختی است.

قراردهید $\beta=\theta_0\tilde{\alpha}\theta_0^{-1}$. بوضوح $\beta\in end(M)$ و $\beta\theta_0=\theta_0\tilde{\alpha}$. بنابراین برای هر $v\in V$ داریم

$\beta(\theta(v)) = \beta(\theta_0(\bar{v})) = \theta_0\tilde{\alpha}(\bar{v}) = \theta_0(\overline{\alpha(v)}) = \theta(\alpha(v))$. حـــال اگـــر $m \in M$ آنگـــاه $\theta(\alpha(m)) = \beta(\theta(m)) = \beta(m)$. حـال بـا اسـتفاده از ایـن مطلـب و اینکـه θ خودتـوان اسـت داریـــم $\theta(\beta(m)) = \theta^2(\alpha(m)) = \theta(\alpha(m))$. بنـــابراین بـــرای هـــر $m \in M$، $\alpha(m) - \beta(m) \in \ker\theta = U$.

طبق فرض $\{y, \alpha(y), \alpha^2(y), \ldots\}$ مولدی برای K است ولذا $\{\bar{y}, \overline{\alpha(y)}, \overline{\alpha^2(y)}, \ldots\}$ مجموعهٔ مولدی بـرای $\frac{V}{U}$ اسـت. بنـابراین $\{\bar{y}, \tilde{\alpha}(\bar{y}), \tilde{\alpha}^2(\bar{y}), \ldots\}$ مجموعـهٔ مولـدی بـرای $\frac{V}{U}$ خواهـد بـود. حـال چون θ_0 یکریختی است لذا

$$\{\theta_0(\bar{y}), \theta_0\tilde{\alpha}(\bar{y}), \theta_0\tilde{\alpha}^2(\bar{y}), \ldots\} = \{\theta_0(\bar{y}), \beta\theta_0(\bar{y}), \beta^2\theta_0(\bar{y}), \beta^3\theta_0(\bar{y}), \ldots\}$$

مجموعهٔ مولدی برای M است.اما $\theta_0(\bar{y})$ متعلق به M است لذا طبق لم۱.۲.۴، β درحلقهٔ $end(M)$ پاک است . بنابراین π_0 خودتوان و σ_0 یکه در $end(M)$ موجودند به قسمی که $\beta = \sigma_0 + \pi_0$.طبق فــرض $\alpha|_U$ در $end(U)$ پــاک اســت لــذا π خودتــوان و σ یکــه در $end(U)$ موجودنــد بقـــــــــسمیکه $\alpha|_U = \sigma + \pi$. حـــــــــال $\varphi, \tau \in end(V)$ را بـــــــــرای هر $m \in M$ و $u \in U$، $(V = M \oplus U)$ بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\tau(m+u) = \sigma_0(m) + [\alpha(m) - \beta(m) + \sigma(u)] \text{ و } \varphi(m+u) = \pi_0(m) + \pi(u).$$

بدیهی است که φ و τ وشتعریفند و $\varphi|_U = \pi$ و $\tau|_U = \sigma$. برای هر $m \in M$ و $u \in U$ داریم